

**OPCIONES REALES EMPLEANDO PROCESOS DE MARKOV  
DE ESTADO CONTINUO**

**Sebastián Alberto Grillo**

Orientadores: Prof. Christian E. Schaerer, D.Sc.  
Prof. Gerardo Blanco Bogado, D.Sc.

Tesis presentada a la Facultad Politécnica, Universidad Nacional de Asunción,  
como requisito para la obtención del Grado de Máster en Ciencias de la  
Computación.

ASUNCIÓN - PARAGUAY  
Noviembre - 2011

**OPCIONES REALES EMPLEANDO PROCESOS DE MARKOV  
DE ESTADO CONTINUO**

**Sebastián Alberto Grillo**

Aprobado en Noviembre del 2011.

---

Prof. Benjamín Baran, D.Sc.

---

Prof. Gerardo Blanco Bogado, D.Sc.

---

Prof. Walter Causarano, M.Sc.

---

Prof. Ernesto Mordecki, Ph.d.

---

Prof. Christian E. Schaerer, D.Sc.

Datos internacionales de Catalogación en la Publicación (CIP)  
DE BIBLIOTECA CENTRAL DE LA UNA

Grillo, Sebastián Alberto

Opciones reales empleando procesos de Markov de estado continuo/Sebastián Alberto Grillo. – Asunción, 2011.

80 p. : il.

Tesis (Maestría en Ciencias de la Computación) – Facultad Politécnica, 2011.

Bibliografía.

1. Opciones reales. 2. Proceso de Markov. 3. Control de calidad. I.  
Título.

CDD 519.4

*A mi familia y amigos por su  
comprensión a las horas que tuve  
que dedicar a este proyecto.*

# Agradecimientos

Al LCCA (Laboratorio de Computación Científica y Aplicada) de la Facultad Politécnica de la Universidad Nacional de Asunción.

Al Conacyt y a la Facultad Politécnica por facilitar mi viaje al Real Option Congress 2011.

A mis orientadores: los profesores D.Sc. Schaerer y D.Sc. Blanco, por su guía y paciencia.

A Rolando Cuevas y Christian Cappelletti, por su desinteresada ayuda a mis problemas técnicos.

## OPCIONES REALES EMPLEANDO PROCESOS DE MARKOV DE ESTADO CONTINUO

Autor: Sebastián Alberto Grillo

Orientadores: Christian E. Schaerer

Gerardo Blanco Bogado

### RESUMEN

El enfoque de opciones reales es el planteamiento más apropiado para la valuación de inversiones de capital bajo incertidumbre, en la actualidad. Este enfoque consiste básicamente en la aplicación de las técnicas empleadas en matemática financiera, para valorar derivados financieros, instrumentos comúnmente empleados en los mercados financieros, como ser opciones europeas o americanas. El método de opciones reales permite plantear la valuación de una oportunidad de inversión como un problema de control estocástico descrito por ecuaciones de Bellman, donde se identifica y se calcula un valor para la política que optimiza los beneficios económicos en cada situación según la evolución de las variables estocásticas, que poseen un comportamiento que puede ser modelado según un sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas (EDEs). Los métodos numéricos más empleados en la literatura para la evaluación de opciones consideran EDEs que describen movimientos geométricos brownianos, siendo que para analizar o calcular resultados con otro tipo de modelos se debe acudir con frecuencia a métodos Monte Carlo. Pero el inconveniente de emplear métodos estocásticos está en lidiar con la posibilidad (aunque sea muy baja) de que el error salga de un rango dado en función de un mismo INPUT.

Esta tesis propone aprovechar la versatilidad de un método no estocástico: el *path integration method* (PIM) para aplicarlo a un rango amplio de posibles problemas de opciones reales. La practicidad de la propuesta se testeó empleando un caso de estudio, el cual está basado en la opción real de emplear controles de calidad en un proceso productivo. Los experimentos numéricos de este caso de estudio se realizaron comparando la propuesta con los métodos más populares en la literatura para valuación de opciones. En el presente trabajo se trataron cuatro casos para el mismo problema, casos que dependen de que se aplique un modelo de valuación de opciones europeas o americanas y de una o dos variables inciertas. Finalmente los resultados numéricos se presentan como evidencia experimental,

de que las aplicaciones del PIM aquí propuestas son lo suficientemente versátiles y eficientes para tratar valuaciones de opciones reales, específicamente para valorar problemas donde no se puedan aplicar otros algoritmos más eficientes. Por lo tanto, el aporte principal de este trabajo reside en proponer al PIM como un enfoque apto para tratar un amplio rango de problemas que no se limitan solamente a dinámicas univariadas, siendo esta implementación multivariable un paso más allá de trabajos previos que ya aplican el PIM a la valuación de opciones.

## REAL OPTIONS USING A CONTINUOUS-STATE MARKOV PROCESS APPROXIMATION

Author: Sebastián Alberto Grillo

Advisors: Christian E. Schaerer

Gerardo Blanco Bogado

### SUMMARY

Nowadays the real option method is the most proper approach for valuing flexible capital investments under uncertainty. This approach is based on the application of techniques used in financial mathematics, focussing on valuing financial derivatives, commonly traded in financial markets, such as European and American options. The real option approach presents the valuation of an investment opportunity as a stochastic control problem in terms of Bellman equations, where it is identified the policy that optimizes the profitability of the investment. The stochastic optimization considers every scenery that evolves according to uncertain variables, which behavior can be modeled according to a system of stochastic differential equations (SDEs). The most well-known numerical methods in the literature consider EDE that describes the geometric Brownian motion dynamics. If we want to calculate problems that are based on other models, we will have to employ Monte Carlo methods. But the disadvantage of using stochastic methods is the possibility (even low) of an error beyond a given range for an unique INPUT.

The proposal of this thesis takes advantage of the versatility of a non-stochastic approach: the path integration method (PIM), for applying this approach to a wide range of real option problems. The practicality of the proposal was tested using a study case, which is based on the real option of using quality control charts in a production process.

The numerical results of this test were conducted comparing the proposal with traditional methods found in the literature for option pricing. There are four cases for the same problem, depending on if an European or American valuation model and, one or two variables are used. Finally the numerical results are presented as experimental evidence, that the PIM application proposed here are versatile and efficient enough for valuing real options, specifically for valuing problems where the most efficient algorithms are not applicable. Therefore, the

principal development in this work is proposing the PIM as an approach able for treating a wide range of problems, problems that are not limited only to univariate dynamics. Then this multivariable implementation is a step beyond the previous works that already apply the PIM to option pricing.

# ÍNDICE GENERAL

<b>LISTA DE FIGURAS</b>	<b>xii</b>
<b>LISTA DE TABLAS</b>	<b>xiii</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>xiv</b>
<b>Lista de Abreviaturas</b>	<b>xviii</b>
<b>1 INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
1.1 Originalidad y relevancia . . . . .	3
1.2 Organización del trabajo . . . . .	4
<b>2 OPCIONES REALES</b>	<b>5</b>
2.1 Opciones financieras . . . . .	5
2.2 Incertidumbre en inversiones de capital. . . . .	7
2.2.1 Impacto de la incertidumbre en el VPN. . . . .	7
2.2.2 Impacto de la incertidumbre en el valor de la inversión. . . . .	7
2.3 Valuación de opciones aplicada a las inversiones de capital. . . . .	8
<b>3 VALUACIÓN DE OPCIONES</b>	<b>10</b>
3.1 Métodos que involucran EDP . . . . .	10
3.1.1 Modelo Black-Scholes . . . . .	11
3.2 Métodos que involucran cadenas de Markov . . . . .	14
3.2.1 Método binomial . . . . .	15
3.2.2 Método pentanomial . . . . .	17
3.2.3 Aproximación por cadenas de Markov . . . . .	20
3.3 Métodos Monte Carlo . . . . .	21
3.3.1 Simulación Monte Carlo . . . . .	22
3.3.2 Método Monte Carlo para valuación de opciones europeas . . . . .	24
3.3.3 Método Monte Carlo de mínimos cuadrados (LSM) . . . . .	25

<b>4</b>	<b>EL ENFOQUE DE VARIABLE CONTINUA</b>	<b>27</b>
4.1	Descripción del algoritmo . . . . .	28
4.2	Un ejemplo numérico simple . . . . .	31
<b>5</b>	<b>UN MODELO PARA CONTROLES DE CALIDAD</b>	<b>37</b>
5.1	Modelo financiero de una variable estocástica . . . . .	38
5.2	Modelo financiero de dos variables estocásticas . . . . .	39
5.3	Modelo de valuación según una opción europea. . . . .	39
5.4	Modelo de valuación según una opción americana . . . . .	40
<b>6</b>	<b>IMPLEMENTACIONES</b>	<b>42</b>
6.1	Implementaciones para el caso de una variable . . . . .	42
6.1.1	Fórmula Black-Scholes . . . . .	44
6.1.2	Método Binomial . . . . .	45
6.1.3	Método Monte Carlo . . . . .	46
6.1.4	Path Integration . . . . .	47
6.2	Implementación para dos variables . . . . .	50
6.2.1	Método Pentanomial . . . . .	51
6.2.2	Método Monte Carlo . . . . .	52
6.2.3	Path Integration . . . . .	52
<b>7</b>	<b>RESULTADOS NUMÉRICOS.</b>	<b>55</b>
7.1	Comparación de resultados numéricos . . . . .	56
<b>8</b>	<b>CONCLUSIÓN.</b>	<b>60</b>
	<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>61</b>

# LISTA DE FIGURAS

3.1	Arbol binomial con la condición $u=1/d$ . . . . .	16
3.2	Evolución de estados en el siguiente instante a través del plano, el evento cinco implica permanecer en el mismo estado. . . . .	18
3.3	Arbol pentanomial de dos etapas, gráfico extraído de [NHB02]. . .	19
3.4	Esquema del LSM aplicado a una opción americana [BG11]. . . .	26
6.1	Ejemplo gráfico de reflexividad: A la derecha un camino reflexivo y a la izquierda uno no-reflexivo . . . . .	48

## LISTA DE TABLAS

7.1	Valores exactos de las opciones europeas de una variable, por medio de la fórmula Black-Scholes. . . . .	56
7.2	Comparación de errores absolutos para la valuación europea de una variable. . . . .	57
7.3	Comparación de tiempos de cómputo para la valuación europea de una variable. . . . .	57
7.4	Valores casi exactos de las opciones americanas de una variable, por medio del overkill del método binomial. . . . .	57
7.5	Comparación de errores absolutos para la valuación americana de una variable. . . . .	58
7.6	Comparación de tiempos para la valuación americana de una variable. . . . .	58
7.7	Comparación de resultados para la valuación europea de dos variables. . . . .	59
7.8	Comparación de tiempos para la valuación europea de dos variables. . . . .	59
7.9	Comparación de resultados para la valuación americana de dos variables. . . . .	59
7.10	Comparación de tiempos para la valuación americana de dos variables. . . . .	59

## Lista de Símbolos

$1_A$	Función característica en relación a $A$ , p. 48
$G(P, a, i)$	Forma alternativa de representar la esperanza condicional, p. 30
$J(., \dots, .)$	Función de densidad conjunta, p. 30
$K$	Precio strike, p. 12
$K_A$	Precio Strike para la opción americana, p. 40
$M$	Matriz de transición de una cadena de Markov homogénea en el tiempo, p. 20
$S_{n,p}^m$	Discretización de la variable subyacente para el método pentanomial, del nodo $(n, p)$ del emésimo instante, p. 19
$S_n$	Discretización de $S$ en el instante $t_n$ , p. 14
$S_n^{em}$	Enésimo término de $S$ discretizado por el esquema Euler-Maruyama, p. 46
$S_n^m$	Discretización de la variable subyacente para el método binomial, enésimo término del emésimo instante, p. 16
$S_t(\omega)$	Activo subyacente en el instante $t$ para la realización $\omega$ , p. 6
$VA_{n,p}^m$	Término de índice $(n, p)$ en el emésimo instante para $V_A$ en el método pentanomial, p. 51
$VA_n^m$	Enésimo término en el emésimo instante para $V_A$ en el método binomial, p. 45
$VE_{n,p}^m$	Término de índice $(n, p)$ en el emésimo instante para $V_E$ en el método pentanomial, p. 51

$VE_n^m$	Enésimo término en el emésimo instante para $V_E$ en el método binomial, p. 45
$V(S, t)$	Función de valuación para el activo $S$ en el instante $t$ , p. 6
$V_A$	Función de valuación de la opción americana, p. 43
$V_E$	Función de valuación de la opción europea, p. 43
$V_a$	Función de valuación auxiliar para la opción americana, p. 43
$V_e$	Función de valuación auxiliar para la opción europea, p. 43
$V_{n,p}^m$	Discretización de la función de valuación para el método pentanomial, del nodo $(n, p)$ del emésimo instante, p. 19
$V_n^m$	Discretización de la función de valuación para el método binomial, enésimo término del emésimo instante, p. 16
$Vam_{n,p}^m$	Término de índice $(n, p)$ en el emésimo instante para $V_a$ en el método pentanomial, p. 51
$Vam_n^m$	Enésimo término en el emésimo instante para $V_a$ en el método binomial, p. 45
$Ve_{n,p}^m$	Término de índice $(n, p)$ en el emésimo instante para $V_e$ en el método pentanomial, p. 51
$Ve_n^m$	Enésimo término en el emésimo instante para $V_e$ en el método binomial, p. 45
$W_t$	Proceso de Wiener en el instante $t$ , p. 12
$\Omega$	Espacio Muestral, p. 6
$\Omega_i$	Región de integración correspondiente a $P_i$ , p. 30
$\Pi(S, t)$	Función de pago para el activo $S$ en el instante $t$ , p. 6
$\Pi_p$	Portfallo libre de riesgo, p. 12
$\{M_i\}, \{N_i\}$	Conjuntos cuyo producto cartesiano define a $\{P_{ij}\}$ , el conjunto de puntos de interpolación para el caso bidimensional, p. 53

$\{P_i\}$	Puntos selectos de interpolación y estimación de la función de valuación, p. 30
$\{X_i\}$	Proceso estocástico discreto, p. 20
$\{a_i\}$	Espacio de estados de una cadena de Markov, p. 20
$\mathbb{B}()$	Ecuación de Bellman arbitraria, p. 17
$\mathbb{E}(X/Y)$	Esperanza condicional de la variable $X$ respecto de $Y$ , p. 16
$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(X/\mathcal{F})$	Esperanza condicional de la variable aleatoria $X$ sobre el sigma álgebra $\mathcal{F}$ , según la medida de Martingala, p. 6
$\mathbb{P}^*$	Medida de Martingala o libre de riesgo, p. 6
$\mathcal{F}_{t_0}$	Sigma algebra generada por $S_{t_0}$ , p. 6
$\mu$	Tasa anual de crecimiento del activo, p. 12
$\rho$	Coefficiente de correlación entre dos variables, p. 17
$\sigma$	Volatilidad del activo, p. 12
$\Delta W_n$	$W_{(n+1)\Delta t} - W_{n\Delta t}$ , p. 23
$\tilde{G}(\cdot, \cdot, \cdot)$	Aproximación de $G(\cdot, \cdot, \cdot)$ , p. 31
$\tilde{V}(\cdot, \cdot)$	Aproximación de $V(\cdot, \cdot)$ , p. 30
$d$	Factor de bajada para el método binomial, p. 16
$d_x$	Desviación estándar de $f_x$ , p. 32
$f_x$	Función de densidad del proceso estocástico homogéneo (4.10) en el instante siguiente si tiene valor $x$ en el previo, p. 32
$g$	Fracción de ingreso perdido si el control de calidad no es implementado, p. 38
$m_x$	Media de la función de densidad de $f_x$ , p. 32
$p$	Probabilidad de subida para el método binomial, p. 16
$p_i$	Probabilidad de ocurrencia de evento $E_i$ para el metodo pentanomial, p. 18

$r$	Tasa de interés libre de riesgo, p. 12
$t_n$	Enésimo instante de tiempo discreto, p. 14
$u$	Factor de subida para el método binomial, p. 16
$v_\omega$	Valor obtenido para la realización $\omega$ , p. 24

## Lista de Abreviaturas

EDE	Ecuación Diferencial Estocástica, p. 12
EDP	Ecuación diferencial Parcial, p. 1
LSM	Método Monte Carlo de mínimos cuadrados o Least Square Monte Carlo, p. 3
PIM	Path Integration Method, p. 2
VPN	Valor Presente Neto, p. 7

# Capítulo 1

## INTRODUCCIÓN

El concepto de Opciones Reales se remonta hasta Myers [S.C77], quien fue uno de los primeros en plantear la analogía entre las inversiones en activos reales y las opciones financieras. De este modo el enfoque de las opciones reales emerge de la idea de aplicar el planteamiento de la teoría de opciones financieras a proyectos de inversión de capital. Por un lado, las opciones financieras se basan en contratos, mientras que por el otro las opciones reales son características estratégicas intrínsecas de flexibilidad de las inversiones que deben ser identificadas y especificadas [DA94].

Varios métodos se desarrollaron para valorar opciones financieras [WP95], pero sus aplicaciones directas a los problemas de opciones reales están condicionadas a las características particulares de cada caso de estudio. En la práctica; sin embargo, los supuestos subyacentes a los métodos tradicionales de valoración de opciones a menudo no se cumplen a la hora de evaluar proyectos de inversión de capital. En este sentido, los enfoques más conocidos para la valuación de opciones (considerando sus posibles variantes) son: a) ecuaciones diferenciales parciales (EDP) [Bla77], b) los *lattice methods* [CJ79] y c) la simulación Monte Carlo [P.P77]. Las EDP tienen limitaciones para hacer frente a los problemas de opciones reales debido a que las hipótesis y condiciones básicas de los modelos a menudo no son satisfechas. Sin embargo, las EDP son bastante empleadas para tratar problemas tradicionales de opciones de forma más analítica.

El enfoque de los *lattice methods* normalmente es más versátil que las EDP. Su simplicidad y eficiencia lo hacen una alternativa práctica en problemas de valuación de opciones reales. Sin embargo, adaptar estos métodos a cualquier dinámica estocástica no es trivial, hecho que se hace notorio en trabajos donde los autores deben recurrir a tablas [P.P88].

Finalmente, los métodos basados en el enfoque Monte Carlo que podría ser

considerado el más versátil, sufren de un error estocástico e ineficiencia computacional [C.09]. Este enfoque es utilizado en problemas complejos donde a priori ningún otro método es aplicable.

Además de estos enfoques típicos que son mencionados, uno menos tradicional es la aproximación por cadenas de Markov [DJ99]. Este enfoque puede ser visto como una generalización de los *lattice methods*, resultando más fácil de adaptarlo a dinámicas estocásticas complejas, pues si consideramos cadenas de Markov con menos restricciones que los *Lattice Methods*, entonces el planteamiento se hace más sencillo. En cierta manera este enfoque busca un mejor compromiso entre la versatilidad y la eficiencia computacional. Este trabajo analiza un enfoque alternativo llamado *Path Integration Method*(PIM)[MG02], el cual es similar a los enfoques que emplean aproximaciones por cadenas de Markov, pero con una diferencia substancial: se evita la discretización de las variables estocásticas. Esto se consigue mediante el uso de integrales a la hora de estimar esperanzas condicionales e interpolaciones que aproximan la función de valuación, lo cual mantiene a las variables estocásticas de forma continua a pesar de realizar algunas manipulaciones de forma discreta. Por otro lado, la variable tiempo sigue siendo discretizado por medio de los esquemas numéricos [KP92] que se aplican a las correspondientes ecuaciones que modelan la dinámica estocástica del problema. El objetivo de esto es seguir la filosofía de pretender un punto de compromiso intermedio entre la eficiencia computacional de los *lattice methods* y la versatilidad de los métodos de Monte Carlo. La programación dinámica es aplicada de atrás para adelante en relación a la variable temporal [P.06], de igual manera que en los *lattice methods* y métodos Monte Carlo. Pero la aplicación del PIM toma en cuenta que el uso de variables continuas implica infinitos estados estocásticos dentro de un rango dado de valores a considerar, siendo que eso lo distingue de enfoques completamente discretizados que lidian con un número finito de estados. Teóricamente la aplicabilidad de este enfoque no está limitado por el número de variables o a un modelo estocástico específico, el verdadero requerimiento es la existencia de un sistema estocástico de ecuaciones diferenciales en término de integrales de Ito<sup>1</sup> y con solución única [kB03], que caracterice a las variables estocásticas subyacentes en un problema de opciones reales y una discretización numérica que transforme el sistema en una ecuación estocástica recursiva, de forma que cada estado en cada instante discreto evolucione según una función de densidad<sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup>Ver anexo A (8).

<sup>2</sup>Ver anexo A (8).

Este trabajo aplica el PIM a un esquema de opciones reales general bajo cualquier dinámica planteada por integrales de Ito. También implementa una aplicación de la propuesta para un problema específico de valuación de controles de calidad a un proceso productivo [NHB02], el cual presenta dos casos: una y dos variables estocásticas subyacentes, y esos casos a su vez pueden ser planteados como dos modelos distintos cuyas hipótesis se asemejan a problemas de opciones europeas o americanas. Los resultados y la eficacia de esta aplicación del *path integration method* se analizaron mediante las pruebas computacionales empíricas obtenidas del problema de [NHB02]. También se emplearon dichos resultados numéricos para comparar el método propuesto con la fórmula Black-Scholes [Bla77], el método binomial y simulación Monte Carlo de una variable para opciones europeas, de la misma manera con el método binomial y Monte Carlo de mínimos cuadrados (LSM) [LF01] para los resultados de una variable de opciones americanas. En el caso de los resultados multivariantes se realizó la comparación numérica con el método pentanomial [KB91] y simulación Monte Carlo simple para la valuación de la opción europea bivariable, así como el método pentanomial y el método Monte Carlo de Mínimos Cuadrados (LSM) para dos opciones americanas bivariables.

## 1.1 Originalidad y relevancia

Bajo el objetivo de aproximar las variables estocásticas de un modelo financiero por medio de un proceso de Markov de estados estocásticos continuos para la evaluación de inversiones flexibles, la presente tesis presenta los siguientes avances:

- Se describe un procedimiento inspirado en el *path integration method* que puede ser implementado en un amplio rango de problemas de valuación de opciones reales, porque se contempla un número  $n$  de dimensiones y una gran familia de dinámicas estocásticas.
- Se presentan implementaciones concretas para varios modelos del caso de estudio propuesto por Nembhard ([NHB02]).
- Se realiza una comparación numérica con los EDP, *Lattice Methods* y métodos Monte Carlo tradicionalmente usados en la literatura, para validar la implementación propuesta.

## 1.2 Organización del trabajo

Este trabajo está organizado de la siguiente manera: primeramente en el Capítulo 2 se comentan conceptos fundamentales de la valuación de opciones financieras y reales, así como el Valor Presente Neto (VPN) como método predecesor a la valuación de inversiones por opciones reales. El Capítulo 3 describe los principales enfoques numéricos utilizados en la valuación de opciones. Luego, el Capítulo 4 plantea un procedimiento general de valuación de opciones a partir del *path integration method*. En el Capítulo 5 se presenta un caso de estudio consistente en un modelo de valuación de controles de calidad que será empleado para comparar la propuesta con los métodos tradicionales. En el Capítulo 6 se describe la implementación para los distintos problemas del caso de estudio y el Capítulo 7 presenta los principales resultados. Finalmente en el Capítulo 8 son expuestas las conclusiones finales mas relevantes del presente trabajo. La continuación de este trabajo estaría volcada a analizar la convergencia del método y teoremas para determinar aproximaciones de las esperanzas condicionales<sup>3</sup>.

---

<sup>3</sup>Ver anexo A (8).

## Capítulo 2

# OPCIONES REALES

### 2.1 Opciones financieras

En finanzas, una opción es un instrumento financiero que especifica un contrato entre dos partes para una transacción futura de bienes o valores (al activo subyacente) a un precio de ejercicio determinado (precio *strike*) [WP95]. El comprador de la opción adquiere el derecho, pero no la obligación, de participar en la transacción, mientras que el vendedor incurre en la obligación correspondiente a cumplir con la transacción si el comprador así lo desea. Una opción que otorga el derecho a comprar un activo es llamada *call option*, una opción que otorga el derecho a vender es conocida como *put option*. El proceso de activar una opción y por lo tanto comerciar el activo subyacente al precio de ejercicio se conoce como el *ejercicio de la opción*. La mayoría de las opciones tienen una fecha de caducidad (vencimiento) y si la opción no es ejercida en el tiempo válido de ejercicio, se vuelve nula y sin valor. A cambio de la concesión de la opción<sup>1</sup>, el lanzador de la opción recoge un pago, la prima, por parte del comprador. El problema de valorar primas para opciones financieras ha originado toda una teoría matemático-financiera comúnmente conocida en la literatura como *Option-Pricing*. La valoración de primas se realiza generalmente en función de los precios de ejercicio, el precio actual de los activos subyacentes, el tiempo de expiración, una tasa libre de riesgo, la dinámica del valor de los activos subyacentes y el tipo de opción a valorar. Los dos tipos de opciones financieras más comunes son:

- Opción europea: Es aquella opción que solo puede ser ejercida al momento de su fecha de expiración. A continuación definimos las siguientes variables, sean:  $S$  el valor del activo subyacente,  $T$  el tiempo de expiración,  $K$  el precio de ejercicio, la tasa  $r$  libre de riesgo y la función  $V(S, t)$  que determina el

---

<sup>1</sup>Llamada la escritura de la opción.

valor de la opción europea para el activo de valor  $S$  en el tiempo  $t$ . Entonces el beneficio de poseer una opción *call* europea en el tiempo  $T$  de expiración será:

$$V(S_T, T) = \max(S_T - K, 0) \quad (2.1)$$

y el beneficio de poseer una opción *put* europea en el tiempo  $T$  de expiración será:

$$V(S_T, T) = \max(K - S_T, 0). \quad (2.2)$$

El hecho que dichos valores no puedan ser negativos condiciona al inversor racional a ejecutar la opción solo en caso que esto realmente le origine un beneficio económico.

Según la teoría del *risk-neutral pricing* [LS06] los enfoques numéricos que no emplean EDP parten de definir previamente una *medida de martingala o libre de riesgo*  $\mathbb{P}^*$ , medida que permite representar a la función de valuación de una opción europea de la siguiente forma alternativa:

$$V(S_0(\omega), t_0) = e^{-r(T-t_0)} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(V(S_T, T) / \mathcal{F}_{t_0})(\omega) \quad (2.3)$$

donde  $t_0$  es un instante de tiempo anterior a  $T$ ,  $\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(\cdot / \mathcal{F}_{t_0})$  es la esperanza condicional de dicha medida de probabilidad a partir del sigma algebra  $\mathcal{F}_{t_0}$ <sup>2</sup> y con  $\omega$  pertenece al espacio muestral  $\Omega$ . Por ejemplo para una opción financiera call europea tendríamos:

$$V(S_0(\omega), t_0) = e^{-r(T-t_0)} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(\max(S_T - K, 0))(\omega) \quad (2.4)$$

- Opción americana: Es considerada opción americana a aquella opción que puede ser ejercitada desde la emisión de la opción hasta su fecha de expiración. Manteniendo las anteriores notaciones de las variables, pero considerando a la función  $V(S, t)$  que determina el valor de la opción americana para el activo  $S$  en el tiempo intermedio  $t$ . Asumiendo que la opción americana solo puede ser ejecutada en instantes discretos  $t_n$ <sup>3</sup>, al aplicar nuevamente el planteamiento de la medida de martingala, el valor de poseer una opción americana en el instante  $t_n$  se traduce a la ecuación de Bellman<sup>4,5</sup>:

---

<sup>2</sup>Ver anexo A (8)

<sup>3</sup>En una implementación numérica el tiempo es un conjunto discreto, por lo tanto calcular una opción americana de forma numérica implica calcular una opción de Bermudas [Far10] empleando una malla tan fina como se pueda.

<sup>4</sup>Donde  $\max(\cdot, \cdot)$  tiene solo dos entradas.

<sup>5</sup>Ver anexo B (8)

$$V(S_{t_n}(\omega), t_n) = \max\left(\Pi(S_{t_n}(\omega), t_n), e^{-r(t_{n+1}-t_n)} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left(V(S_{t_{n+1}}, t_{n+1}) / \mathcal{F}_{t_n}\right)(\omega)\right) \quad (2.5)$$

donde  $\Pi(., .)$  es una función conocida de pago<sup>6</sup> o rentabilidad [G.10]. Por ejemplo para una opción financiera call americana tendríamos:

$$V(S_{t_n}(\omega), t_n) = \max\left(S_{t_n}(\omega) - K, e^{-r(t_{n+1}-t_n)} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left(\max(S_T - K, 0) / \mathcal{F}_{t_n}\right)(\omega)\right) \quad (2.6)$$

## 2.2 Incertidumbre en inversiones de capital.

En esta sección se introducen las problemáticas a la hora de evaluar proyectos de inversión.

### 2.2.1 Impacto de la incertidumbre en el VPN.

El enfoque tradicional basado en el VPN [BO] puede tener dificultades para valorar adecuadamente las oportunidades de inversión al ser un método que considera una planificación estática y lineal de las acciones, ignorando las oportunidades que se crean o destruyen en la toma de cada decisión. Una planificación que se desenvuelva como un árbol de decisión se acerca mucho más a la realidad, que un plan estático que considera poco a las posibles eventualidades, especialmente cuando la inversión depende de variables inciertas. Otro problema del VPN es que la valuación está influida en gran parte por la aversión o preferencia al riesgo del evaluador que elige las tasas de descuento [Par]. Esta dependencia a los criterios del evaluador agrega gran subjetividad a la valuación, y penaliza a la volatilidad del retorno, tanto negativa como positiva.

### 2.2.2 Impacto de la incertidumbre en el valor de la inversión.

Tal como afirma [LR01], la incertidumbre puede producir efectos negativos en inversiones efectuadas por aquellas firmas con una aversión al riesgo o para aquellas

---

<sup>6</sup>Esta función se emplea para modelar los ingresos o ganancias percibidos en caso de ejecutar la operación que se desea valorar.

cuyo rendimiento es una función cóncava en relación a los precios. Otro inconveniente importante son los retrasos en las decisiones de inversión, efecto que es ignorado por la teorías ortodoxas sobre inversión, que asumen que las decisiones son tomadas en el momento o nunca. Pero la realidad es que esperar nueva información puede ser beneficioso para un proyecto y tal posibilidad también debe ser debidamente valuada. Un último problema es que los métodos que ignoran la incertidumbre pueden exhortar a no invertir, mientras que una valuación que considere incertidumbre puede establecer lo contrario o el diferir la inversión [Mar06].

## 2.3 Valuación de opciones aplicada a las inversiones de capital.

Como afirma [L.04] la aplicación de conceptos de *option-pricing* para valuar activos del mundo real ha sido un área de crecimiento en la teoría y práctica de la evaluación de inversiones de capital. Este enfoque ha revolucionado la manera en que académicos y profesionales piensan acerca de proyectos de inversión incorporando flexibilidad administrativa dentro del análisis. Dicha flexibilidad son las diversas posibilidades financieras que acontecen hasta la expiración de un proyecto. Siendo que esta puede ser una parte sustancial del valor de muchos de estos proyectos, ignorar las posibilidades surgidas de la flexibilidad puede subvaluar oportunidades de inversión induciendo a un uso ineficiente de los recursos en una economía.

Como forma de sobrellevar las limitaciones del enfoque VPN se han planteado las opciones reales, que surgen como una extensión de la teoría de las opciones financieras aplicadas a problemas de valuación de inversiones de capital. Esto proporciona gran flexibilidad, al sustentarse en procesos estocásticos que modelan hábilmente los rangos de posibles escenarios. Estos escenarios surgen a partir de las distintas magnitudes de las variables aleatorias subyacentes a la valuación. Además el enfoque de opciones reales evita tasas de descuento subjetivas, pues introduce la hipótesis de que el mercado es perfecto y libre de arbitraje, lo que permite calcular un valor según su esperanza descontada a partir de una tasa libre de riesgo [HJ79].

Así pues de acuerdo a [CT03], este enfoque de valuación modela las oportunidades y posibles decisiones como diferentes tipos de opciones, entre las que podemos citar:

- Opción de posponer: Representa la alternativa de posponer una inversión por un periodo de tiempo en la espera de más información o circunstancias más favorables. Este tipo de opción real puede ser modelada utilizando una opción *call* americana<sup>7</sup>.
- Opción de abandono: Consiste en terminar toda actividad o inclusive oportunidad de futura inversión, ya sea liquidando o abandonando los activos o recursos con los cuales en un principio se ejecutó la inversión. Este tipo de opción es modelado según una opción *put* americana.
- Opción de expansión: Consiste en la adquisición de una mayor cantidad de recursos productivos o la aceleración de operaciones, en respuesta a resultados más beneficiosos de lo esperado. Este tipo de opción es modelado utilizando una opción *call* americana.
- Opción de contracción: Esta opción es lo contrario a la opción de expansión consistente en la reducción de recursos productivos u operaciones, en respuesta a resultados menos beneficiosos de lo esperado. Este tipo de opción es modelado utilizando una opción *put* americana.
- Opciones de extensión o pre-cancelación: Es la posibilidad de dilatación o contracción del periodo de uso de un bien en los términos de un contrato. El primero se modela como una opción *call* americana y el segundo como una opción *put* americana.
- Opción de cambio: Consiste en la alternativa de emplear los recursos disponibles para obtener resultados distintos. Esta opción puede ser modelada utilizando un portafolio consistente en opciones *call* y *put* americanas.
- Opción de clausura y re-apertura: Consiste en la posibilidad de detener y/o reanudar las operaciones, la primera se parece a la opción de abandono con la diferencia de ser una acción reversible. Estas opciones se modelan como opciones americanas *call* y *put* respectivamente.

Sin embargo, el uso de opciones europeas como modelo para opciones reales no esta completamente excluido, como sera visto posteriormente. En el siguiente capítulo se describirán los distintos métodos de valoración de opciones y se evaluaran su aplicabilidad y características.

---

<sup>7</sup>La opción real planteada como una opción americana no necesariamente implica las mismas ecuaciones de Bellman para toda opción real, su formulación específica depende del problema como se verá mas adelante.

## Capítulo 3

# VALUACIÓN DE OPCIONES

Desde el trabajo pionero de Black-Scholes [Bla77] varios métodos de valuación de opciones han surgido hasta la actualidad, la mayoría como modificación o adaptación de los métodos tradicionales y sus hipótesis. No obstante, los métodos más ampliamente mencionados en la bibliografía consultada para este trabajo serán clasificados en tres familias que serán descritas a continuación, junto a los modelos particulares que fueron implementados para este trabajo. Esos tres grupos principales son:

1. Métodos que involucran Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP).
2. Métodos que emplean cadenas de Markov.
3. Simulación Monte Carlo.

### 3.1 Métodos que involucran EDP

Los métodos basados en EDP asumen inicialmente que las variables subyacentes a la opción están definidas por una EDE. Si se trabaja el componente estocástico de la EDE se obtiene una EDP, la incógnita de la EDP es la función de valuación de la opción. Esta eliminación del componente estocástico resulta de una combinación de argumentos matemáticos y financieros dependientes de las restricciones e hipótesis del método en particular. Una vez obtenida la EDP, la ecuación es resuelta con métodos analíticos o numéricos por medio de uno de los algoritmos numéricos para resolver EDPs [E.S77],[ACA11]

El enfoque EDP posee un número alto de requerimientos para cumplir en las hipótesis y un mayor uso de consideraciones analíticas que le restan cierta versatilidad, sin embargo las EDP se han podido aplicar a dinámicas estocásticas más generales que involucran procesos de Levy [D.J09]. Así, las EDP resultan

más apropiadas para problemas que consideren opciones financieras clásicas. Sin embargo, solo es posible utilizar EDP en problemas de opciones reales que no tengan características muy particulares. Además, el hecho que el enfoque EDP sea capaz de dar una fórmula analítica exacta, como la fórmula Black-Scholes para opciones europeas, convierte a las EDP en una alternativa competitiva para aquellos problemas de opciones reales donde pueda aplicarse.

### 3.1.1 Modelo Black-Scholes

Particularmente, el modelo Black-Scholes requiere las siguientes hipótesis [J.05]:

1. El activo subyacente sigue una dinámica geométrica browniana con una tendencia<sup>1</sup> y volatilidad constantes<sup>2</sup>.
2. La opción a calcular es europea.
3. La tasa de interés libre de riesgo es conocida y constante.<sup>3</sup>
4. No existe la posibilidad de arbitraje, es decir que no es posible tomar una ventaja económica libre de riesgo de una diferencia de precios entre dos o más mercados, a una tasa mayor de la tasa libre de riesgo.
5. Es posible prestar dinero a una tasa de interés constante libre de riesgo.
6. Es posible comprar y vender cualquier cantidad fraccional del activo subyacente. Esta hipótesis también incluye ventas en corto<sup>4</sup>, es decir vender un activo arrendado en el momento, con el compromiso de devolverlo al arrendador en una fecha determinada.
7. No existen tarifas o costos de transacción<sup>5</sup>.
8. Los activos no producen dividendos a su poseedor.

Utilizando las siguientes notaciones:

- $t$  es el tiempo.
- $S$  es el precio estocástico del activo subyacente.

---

<sup>1</sup>*Drift.*

<sup>2</sup>Se refiere a  $\sigma$  constante en la ecuación (3.1)

<sup>3</sup>La tasa a la que es posible incrementar el valor de un activo sin ningún riesgo, como por ejemplo los bonos de algunos países (países con calificación de riesgo AAA).

<sup>4</sup>Short Selling o Shorting.

<sup>5</sup>Pese a ser poco realista es una hipótesis básica del modelo

- $V(S, t)$  el precio del derivado financiero a obtener.
- $K$  es el precio de ejercicio.
- $r$  es la tasa de interés libre de riesgo.
- $\mu$  es la tasa anual de crecimiento de  $S$ <sup>6</sup>.
- $\sigma$  es la volatilidad<sup>7</sup>.
- $W_t$  es un proceso de Wiener<sup>8</sup> en el instante  $t$ .

Bajo la primera hipótesis tenemos la siguiente ecuación diferencial estocástica (EDE)<sup>9</sup>:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW. \quad (3.1)$$

Suponiendo que  $V$  sea el precio del derivado, entonces debería estar en función de  $S$  y  $t$ , por lo que es posible aplicar el Lema de Ito<sup>10</sup> a la ecuación (3.1) obteniendo:

$$dV = \left( \frac{\partial V}{\partial S} \mu S + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \frac{\partial V}{\partial S} \sigma S dW. \quad (3.2)$$

Suponga que un portafolio  $\Pi_p$  es conformado al emitir la opción y poseer  $\delta$  unidades del activo subyacente<sup>11</sup>. Por lo tanto tendríamos:

$$\Pi_p = -V + \delta S. \quad (3.3)$$

El cual tendría la siguiente discretización de su variación en un periodo  $\Delta t$  infinitesimal:

$$\Delta \Pi_p = -\Delta V + \delta \Delta S. \quad (3.4)$$

Si también discretizamos (3.1) y (3.2), obtenemos respectivamente:

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta W, \quad (3.5)$$

---

<sup>6</sup>Es una tasa para la variación no-estocástica de  $S$  a lo largo del tiempo

<sup>7</sup>Es una tasa para el nivel de incertidumbre de  $S$  a lo largo del tiempo

<sup>8</sup>Ver anexo A (8).

<sup>9</sup>Ver definición de EDE en anexo A (8).

<sup>10</sup>Ver anexo A (8).

<sup>11</sup>En donde estaríamos haciendo uso de la sexta hipótesis pues  $\delta$  también toma valores no enteros.

$$\Delta V = \left( \frac{\partial V}{\partial S} \mu S + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) \Delta t + \frac{\partial V}{\partial S} \sigma S \Delta W. \quad (3.6)$$

Las expresiones (3.1) y (3.2) comparten un mismo proceso de Wiener por lo que para un instante dado  $\Delta W = \varepsilon \sqrt{\Delta t}$  será el mismo en (3.5) y (3.6), conforme a ([WP95]). Reemplazando (3.5) y (3.6) en (3.4) obtenemos:

$$\Delta \Pi_p = - \left( \frac{\partial V}{\partial S} \mu S + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) \Delta t - \frac{\partial V}{\partial S} \sigma S \Delta W + \delta (\mu S \Delta t + \sigma S \Delta W). \quad (3.7)$$

Si convenientemente se hace que la cantidad de activos del portafolio  $\Pi_p$  tenga el siguiente valor  $\delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ <sup>12</sup>, la ecuación (3.3) se convierte en:

$$\Delta \Pi_p = -\Delta V + \frac{\partial V}{\partial S} \Delta S \quad (3.8)$$

y entonces (3.7) se simplifica, obteniéndose:

$$\Delta \Pi_p = \left( -\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t. \quad (3.9)$$

Como el portafolio  $\Pi_p$  no depende de variables estocásticas entonces este carece de riesgos en el periodo  $\Delta t$ . De las hipótesis 3, 4, 5 y 7 se deduce que dicho portafolio tiene la misma tasa  $r$  de ganancia instantánea que otras inversiones libres de riesgo. Si se ganara más con este portafolio sería posible hacer una ganancia que viole la hipótesis de arbitraje al realizar ventas cortas de inversiones libres de riesgo para utilizar el efectivo obtenido invirtiendo en este portafolio; igualmente si se ganase menos con este portafolio entonces la hipótesis de arbitraje se violaría ante la posibilidad de vender de forma corta el portafolio para invertir el efectivo obtenido en inversiones libres de riesgo a la tasa  $r$ . Por lo tanto:

$$\Delta \Pi_p = r \Pi_p \Delta t. \quad (3.10)$$

Reemplazando (3.8) y (3.9) en (3.10), obtenemos:

$$\left( -\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t = r \left( -V + \frac{\partial V}{\partial S} S \right) \Delta t, \quad (3.11)$$

---

<sup>12</sup>Hecho posible gracias a la hipótesis 6.

que deriva finalmente en la ecuación de Black-Scholes([WP95]):

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} = rV. \quad (3.12)$$

La solución de esta ecuación dependerá de las condiciones de contorno que sean impuestas, para opciones europeas call y put tenemos que las condiciones respectivas son las siguientes para  $t = T$ :

$$V = \max(S - K, 0), \quad (3.13)$$

$$V = \max(K - S, 0). \quad (3.14)$$

La solución analítica de la ecuación Black-Scholes con estas condiciones de contorno nos provee de las fórmulas de Black-Scholes. Sean  $d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$ ,  $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$  y la función de distribución acumulada de una variable normal estándar  $N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy$ , entonces las respectivas fórmulas para opciones europeas call y put son<sup>13</sup>:

$$C(S, t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2), \quad (3.15)$$

$$P(S, t) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1). \quad (3.16)$$

## 3.2 Métodos que involucran cadenas de Markov

En estos métodos se discretizan el tiempo y las variables estocásticas subyacentes de modo que estas se comporten como cadenas de Markov y dependiendo del tipo de opción financiera, el cálculo se realiza aplicando programación dinámica, donde los valores estimados de la opción en un tiempo  $t_{n+1}$  se emplean para estimar la opción en el tiempo previo  $t_n$ . La forma en que se puede construir esas cadenas de Markov no es única, siendo que este enfoque tan general no es aplicable de una única manera. Sin embargo, los métodos más conocidos y presentes en la literatura son aquellos donde se asume que si  $S_n = x$ , entonces,  $S_{n+1}$  solo puede tener una cantidad finita y constante  $k$  de posibles valores, donde se estima la probabilidad condicional de que  $S_{n+1}$  tenga cada uno de esos  $k$  valores de modo que la cadena de Markov aproxime sus esperanzas y varianzas a otro proceso estocástico previo. Los métodos más conocidos con la característica recién

---

<sup>13</sup>Ver ejemplo en Anexo C(8)

descrita son el método binomial que considera  $k = 2$ , el trinomial donde  $k = 3$ , en el caso de una variable y en el caso de dos variables el pentanomial donde  $k = 5$ . A continuación es presentado el método binomial, luego del pentanomial y por último analizaremos el enfoque más general de la aproximación por cadenas de Markov.

### 3.2.1 Método binomial

En este método se asume que la variable subyacente  $S$  puede ser modelada utilizando un camino discreto aleatorio con las siguientes características[WP95]:

- El precio de  $S$  cambia solo en los instantes  $\Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t \dots$  hasta  $M\Delta t = T$ , la fecha de expiración de la opción.
- Si el precio de  $S$  es  $P$  en el instante  $m\Delta t$  entonces en el instante  $(m + 1)\Delta t$  este solo puede tomar dos posibles valores  $uP > P$  o  $dP < P$ , donde  $u$  sería un factor de subida y  $d$  un factor de bajada.
- La probabilidad  $p$  de que  $S$  se mueva para arriba  $uS$  es conocida y por lo tanto también la probabilidad  $1 - p$  de que se mueva para abajo  $dS$ .
- Una condición no necesaria es  $u = 1/d$ , sin embargo la condición simplificará el análisis del árbol binomial que analizaremos a continuación.

Nótese que estas propiedades nos permite emular un grafo dirigido que denota todos los posibles caminos<sup>14</sup>, en donde un nodo es un posible estado en un instante dado. En el primer instante 0 solo tenemos un estado conocido: el valor inicial de la variable subyacente  $S_0$ , después los dos únicos posibles valores  $uS_0$  y  $dS_0$  en el tiempo  $\Delta t$ <sup>15</sup>, donde ambos estados al evolucionar cada uno en solo otros dos estados generan a  $u^2S_0$ ,  $duS_0 = udS_0$  y  $d^2S_0$ , en el tiempo  $2\Delta t$ . Así sucesivamente hasta  $M\Delta t = T$ . Vemos también que  $d^{i+1}u^jS_0$  y  $d^iu^{j+1}S_0$  se reconectan cuando uno sube y el otro baja respectivamente<sup>16</sup>, eso implica que en el instante  $m\Delta t$  existen  $m + 1$  posibles estados. Sea  $S_n^m$  el  $n$ -ésimo estado en el  $m$ -ésimo instante, entonces definimos la siguiente indexación:

$$S_n^m = d^{m-n}u^nS_0 \quad (3.17)$$

<sup>14</sup>En la literatura se lo llama árbol binomial (3.1).

<sup>15</sup>Consecuencia directa del segundo item.

<sup>16</sup>Consecuencia de que no importe el orden de subidas o bajadas para ir de un nodo a otro, siempre que tanto el numero de subidas o bajadas permanezca igual, lo cual es independiente de  $u = \frac{1}{d}$ .

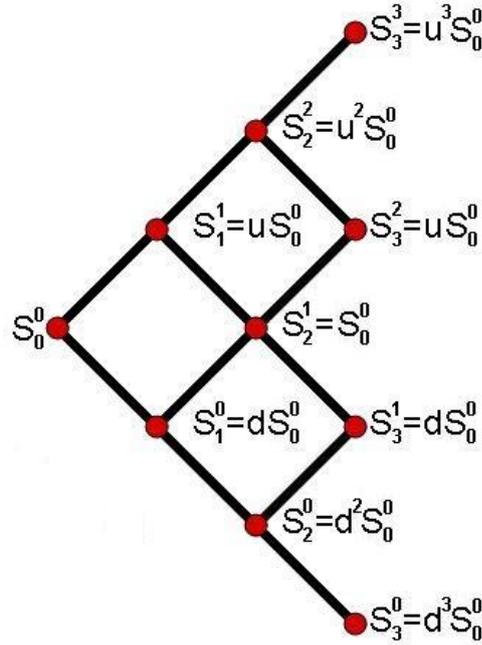


Figura 3.1: Arbol binomial con la condición  $u=1/d$ .

para  $n \in \{0, 1, \dots, m\}$ .

La condición  $u = 1/d$  implica las siguientes fórmulas para obtener el factor  $d$  de bajada, el factor  $u$  de subida y la probabilidad  $p$  de subida respectivamente [WP95]:

$$\begin{cases} d = A - \sqrt{A^2 - 1} \\ u = A + \sqrt{A^2 - 1} \\ p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}, \end{cases} \quad (3.18)$$

donde  $A = \frac{1}{2} \left( e^{-r\Delta t} + e^{(r+\sigma^2)\Delta t} \right)$ . De modo que para el proceso discreto binomial se tendría la siguiente esperanza condicional :

$$\mathbb{E} \left( V \left( S^{m+1} \right) / S^m = S_n^m \right) = pV_{n+1}^{m+1} + (1 - p) V_n^{m+1}. \quad (3.19)$$

La valuación de la opción se realiza primero asignando una variable  $V_n^m$  a cada nodo con su correspondiente  $S_n^m$  y conociendo de antemano las condiciones finales en el  $M$ -ésimo instante (último instante), por ejemplo para el caso de un call option europeo tendríamos:  $V_n^M = \max(0, S_n^M - K)$  donde  $K$  es el precio de ejercicio de la opción. Conocidos los valores de la opción en todos los nodos de un  $(m+1)$ -ésimo instante se procede a calcular los valores en los nodos del

$m$ -ésimo instante por medio de la siguiente recursión:

$$V_n^m = \mathbb{B} \left( S_n^m, r, \left( pV_{n+1}^{m+1} + (1-p)V_n^{m+1} \right) \right), \quad (3.20)$$

donde  $\mathbb{B}$  representa una ecuación de Bellman<sup>17</sup> para un problema de opción determinado, en función del valor de la variable subyacente  $S$  en dicho nodo, la tasa de interés libre de riesgo  $r$  y la esperanza condicional (3.19). En el caso de una opción europea (3.20),  $V$  se considera nada más que el valor de esa esperanza condicional al vencimiento descontándole la tasa de interés:

$$V_n^m = e^{-r\Delta t} \left( pV_{n+1}^{m+1} + (1-p)V_n^{m+1} \right). \quad (3.21)$$

Al aplicarse (3.20) iterativamente finalmente se obtendrá  $V_0^0$  el valor final de la opción<sup>18</sup>.

### 3.2.2 Método pentanomial

Por su velocidad de cálculo el método binomial es un excelente método para modelos que consideran una variable subyacente que sigue un movimiento geométrico browniano [D.J02], pero ya no es posible aplicarlo cuando debemos considerar dos variables subyacentes aleatorias  $S_1$  y  $S_2$ , con sus propias distribuciones geométrico-brownianas, es decir:

$$\begin{cases} dS_1 = \mu_1 S_1 dt + \sigma_1 S_1 dW_1, \\ dS_2 = \mu_2 S_2 dt + \sigma_2 S_2 dW_2, \end{cases} \quad (3.22)$$

donde un coeficiente de correlación  $\rho$  relaciona  $W_1$  y  $W_2$ . Un trabajo que ha tratado de desarrollar un método similar al método binomial en un intento de emular su misma eficiencia y simplicidad, es el de Kamrad y Ritchken [KB91], donde desarrollan un procedimiento relativamente simple que no requiere el empleo de tablas para la obtención de los parámetros necesarios como se ven en otros algoritmos [P.P88].

En cuanto a requerimientos técnicos, emplear un enfoque *lattice method* como éste pero con solo dos posibles eventos no es factible para un problema bidimensional, siendo que este método pentanomial considera cinco posibilidades para lidiar con esa dimensión extra, en donde cada una de las dos variables posee sus propios factores de subida  $u_i$  y bajada  $d_i$ ; como se relaciona en la tabla de abajo:

<sup>17</sup>Esta generalización es propuesta para representar una amplia gama de problemas de opciones reales indeterminados.

<sup>18</sup>Ver ejemplo en Anexo C(8)

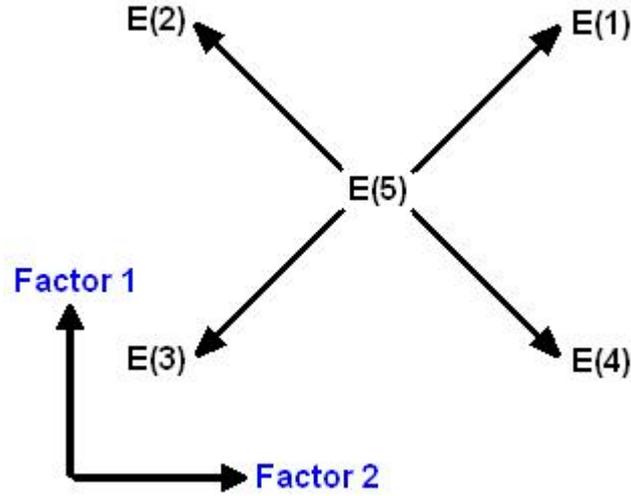


Figura 3.2: Evolución de estados en el siguiente instante a través del plano, el evento cinco implica permanecer en el mismo estado.

Evento	Factor 1	Factor 2	Prob. de ocurrencia
$E_1$	$u_1$	$u_2$	$p_1$
$E_2$	$u_1$	$d_2$	$p_2$
$E_3$	$d_1$	$d_2$	$p_3$
$E_4$	$d_1$	$u_2$	$p_4$
$E_5$	1	1	$p_5$

Los factores de subida y bajada se obtienen con las siguientes fórmulas [KB91]:  $u_i = e^{\lambda\sigma_i\sqrt{\Delta t}}$  y  $d_i = \frac{1}{u_i}$ , para un parámetro arbitrario  $\lambda \geq 1$  que afecta la magnitud de los saltos. Adicionalmente, es importante mencionar que también se emplea un planteamiento de igualar esperanzas y varianzas condicionales entre un proceso continuo y otro discreto similar al método binomial. Tomando  $\mu_i = r - \frac{\sigma_i^2}{2}$ <sup>19</sup> para la tasa libre de riesgo  $r$ , ese planteamiento nos permite representar las probabilidades  $p_i$  por medio de las siguientes formulaciones explícitas[KB91]:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{\lambda^2} + \frac{\sqrt{\Delta t}}{\lambda} \left( \frac{\mu_1}{\sigma_1} + \frac{\mu_2}{\sigma_2} \right) + \frac{\rho}{\lambda^2} \right], \\ p_2 = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{\lambda^2} + \frac{\sqrt{\Delta t}}{\lambda} \left( \frac{\mu_1}{\sigma_1} - \frac{\mu_2}{\sigma_2} \right) - \frac{\rho}{\lambda^2} \right], \\ p_3 = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{\lambda^2} + \frac{\sqrt{\Delta t}}{\lambda} \left( -\frac{\mu_1}{\sigma_1} - \frac{\mu_2}{\sigma_2} \right) + \frac{\rho}{\lambda^2} \right], \\ p_4 = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{\lambda^2} + \frac{\sqrt{\Delta t}}{\lambda} \left( -\frac{\mu_1}{\sigma_1} + \frac{\mu_2}{\sigma_2} \right) - \frac{\rho}{\lambda^2} \right], \\ p_5 = 1 - \frac{1}{\lambda^2}. \end{array} \right. \quad (3.23)$$

<sup>19</sup>Donde  $i \in 1, 2$ .

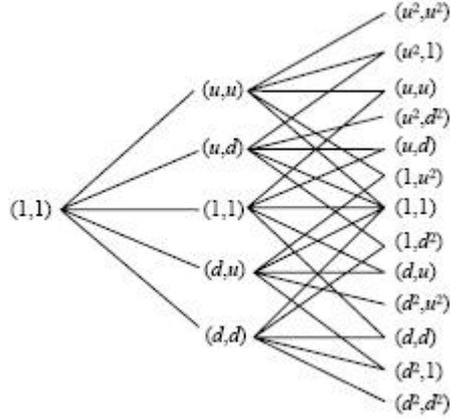


Figura 3.3: Arbol pentanomial de dos etapas, gráfico extraído de [NHB02].

El árbol pentanomial es más complejo, pero la implementación es la misma que en el método binomial. Si consideramos la siguiente variable subyacente final  $S = S_1 S_2$  tal que  $S_0 = S_{0,0}^0$ , entonces podemos definir la siguiente indexación, de modo a asignar cada posible valor de  $S$  a cada nodo del árbol pentanomial, en el instante discreto  $m$ <sup>20</sup>:

$$S_{n,p}^m = u_1^{n-p} u_2^{n+p} S_{0,0}^0. \quad (3.24)$$

donde  $m \geq |n| + |p|$ <sup>21</sup>. Entonces de forma similar al método binomial la valuación de la opción se realiza primero asignando una variable  $V_{n,p}^m$  a cada nodo de índice  $(n,p)$  con su correspondiente  $S_{n,p}^m$ . Conocidos los valores de la opción en todos los nodos de un  $m$ -ésimo instante se procede a calcular los valores en los nodos del  $(m-1)$ -ésimo instante por medio de la siguiente recursión, con  $\mathbb{B}$  como la ecuación de Bellman<sup>22</sup> de la opción financiera:

$$V_{n,p}^m = \mathbb{B} \left( S_{n,p}^m, r, p_1 V_{n+1,p+1}^{m+1} + p_2 V_{n+1,p-1}^{m+1} + p_3 V_{n-1,p-1}^{m+1} + p_4 V_{n-1,p+1}^{m+1} + p_5 V_{n,p}^{m+1} \right). \quad (3.25)$$

Finalmente, la recursión (3.25) permite retroceder en el índice del tiempo  $m$  hasta llegar al único nodo de  $m = 0$ , obteniéndose  $V_{0,0}^0$  el valor final de la opción<sup>23</sup>.

<sup>20</sup>Esta indexación es propuesta en esta tesis para dar al método pentanomial el mismo tratamiento que al método binomial, sin embargo no modifica al algoritmo de ninguna manera, pues solo afecta la forma en que se formula el cálculo de las opciones.

<sup>21</sup>Los índices pueden tomar inclusive valores negativos.

<sup>22</sup>La misma generalización que en el caso del método binomial.

<sup>23</sup>Ver ejemplo en Anexo C(8)

### 3.2.3 Aproximación por cadenas de Markov

Este enfoque generaliza los algoritmos de tipo binomial o pentanomial. Estos algoritmos consideran que el proceso estocástico discreto que aproxima las variables subyacentes posee la propiedad de evolucionar solo en un número fijo  $k$  de otros estados, mientras que considerando el concepto de Cadena de Markov podemos asumir que un estado es capaz de evolucionar en cualquier otro estado. Todos los estados posibles pertenecerían a un conjunto previo de estados que es llamado *espacio de estados*. Primeramente se definen dos conceptos matemáticos relevantes:

#### Cadena de Markov

Una cadena de Markov es un proceso estocástico discreto  $X_n$  tal que si  $\omega$  pertenece al espacio muestral  $\Omega$  entonces  $X(\omega) \in \{a_i\}$ , un conjunto numerable llamado espacio de estados y para todo  $n$  tenemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{P}((X_{n+1} = a_j) / (X_n = a_{i(n)})) = \\ \mathbb{P}((X_{n+1} = a_j) / (X_1 = a_{i(1)}, X_2 = a_{i(2)}, \dots, X_n = a_{i(n)})) \end{array} \right. \quad (3.26)$$

En donde el lado izquierdo de la igualdad representa la probabilidad que el proceso estocástico evolucione al estado  $a_j$  en el paso  $n + 1$ , si en el paso  $n$  estuvo en el estado  $a_{i(n)}$ ; mientras que el lado derecho representa la probabilidad de que el proceso estocástico evolucione al estado  $a_j$  en el paso  $n + 1$ , si previamente estuvo en los estados  $a_{i(k)}$  en cada paso  $k$  para  $0 < k < n + 1$ . En otras palabras, una cadena de Markov es un proceso estocástico discreto, cuya probabilidad de evolucionar a un estado futuro solo depende del estado en el que este en el momento actual.

#### Matriz de transición

Supongamos que una cadena de Markov  $X_n$  es homogénea en el tiempo, es decir para todo  $n$  y  $m$ :

$$\mathbb{P}((X_{n+1} = a_j) / (X_n = a_i)) = \mathbb{P}((X_{m+1} = a_j) / (X_m = a_i)). \quad (3.27)$$

Entonces se define la matriz de transición  $M$  según:

$$M_{ij} = \mathbb{P}((X_{m+1} = a_j) / (X_m = a_i)). \quad (3.28)$$

Esta matriz de transición junto a la distribución inicial<sup>24</sup> contienen la información que define el comportamiento de la cadena de Markov a lo largo del tiempo y cualquier algoritmo que sea caso particular de este enfoque general debe tener su propia matriz. Como se ha mencionado el método binomial y pentanomial pueden considerarse casos particulares de este enfoque. Para probarlo encontraremos sus respectivas matrices de transición. Manteniendo los mismos parámetros introducidos en la subsección (3.2.1) tenemos que un árbol binomial con  $n$  periodos tiene el siguiente espacio de estados  $\{a_k = u^{k-n-1}S_0\}$ <sup>25</sup> donde  $k \in \{1, 2, \dots, 2n + 1\}$  y una matriz  $M$  de transición que cumple lo siguiente:

- $M_{ij} = p$  si  $j = i + 1$ .
- $M_{ij} = p - 1$  si  $j = i - 1$ .
- $M_{ij} = 0$  para cualquier otro caso.

En el caso del método pentanomial definir una matriz de transición específica para  $n$  periodos puede implicar expresiones muy complejas, por lo que a continuación explicamos una construcción muy general que también sirve para el método binomial como otros *lattice methods*. Como estos algoritmos disponen de un número limitado de estados por instante de tiempo, entonces el número total de posibles estados es limitado y numerable por lo que existe una secuencia  $\{a_k\}$  de vectores de  $q$  dimensión para cada estado<sup>26</sup>, donde el  $j$ -ésimo valor del vector  $a_i$  representa el valor de la  $j$ -ésima variable estocástica para el estado  $i$ . Por lo tanto, tendríamos una matriz de transición donde para cada  $i$ -ésimo estado y suponiendo que cada estado solo puede evolucionar en  $h$  posibles estados, entonces:

- $M_{if(k)} = p_k$  donde  $k \in \{1, 2, \dots, h\}$ ,  $\sum p_k = 1$  y  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  determina los índices de los posibles futuros estados al que evolucionaría el estado  $i$ .
- $M_{il} = 0$  para cualquier otro  $l$ .

### 3.3 Métodos Monte Carlo

Los métodos Monte Carlo comentados en este trabajo y aplicados a la valuación de opciones consisten principalmente en un gran número de simulaciones de un

<sup>24</sup>La función de distribución de  $X_0$ .

<sup>25</sup>Recordando que se trató solamente el caso donde  $u = 1/d$ .

<sup>26</sup>Habiendo  $q$  variables estocásticas.

proceso estocástico discreto. Esta discretización es obtenida a partir de un esquema numérico aplicado a una ecuación diferencial estocástica y la simulación es realizada al emplear números aleatorios con cierta distribución para obtener un valor numérico igualmente aleatorio para cada simulación. Esos valores en su conjunto serían evaluados con un muestreo estadístico para obtener un valor numérico final como un promedio de todas las simulaciones individuales realizadas.

El enfoque Monte Carlo tiene tres puntos fuertes: en primer lugar es muy versátil y relativamente fácil de implementar por lo que frecuentemente es aplicado en problemas de opciones complejos para los cuales otros enfoques no han desarrollado todavía un algoritmo efectivo o implementable. En segundo lugar la literatura sugiere que el número de dimensiones del problema afecta menos la eficiencia de los algoritmos Monte Carlo que a los demás algoritmos [M.11]. Por último al emplear múltiples simulaciones individuales eso lo hace un enfoque muy paralelizable y fácil de implementar en varios procesadores.

En cuanto a las desventajas de este enfoque tenemos las siguientes: en primer lugar el error numérico de nuestro resultado siempre es estocástico, es decir a diferencia de otros métodos numéricos no existe una cota para el error con un 100% de confianza<sup>27</sup>. Este inconveniente puede ser revertido en cierto grado empleando técnicas de control de error [G.03]. Por último, está el inconveniente de la velocidad siendo que mantener un error estocástico relativamente minimizado puede requerir un número de simulaciones que van desde unos miles hasta millones.

Por todos los pro y contras mencionados, este enfoque suele ser principalmente empleado cuando los demás enfoques se muestran imposibles de implementar o muy ineficientes, por lo que el enfoque Monte Carlo es recomendado para tratar problemas de opciones que sean muy complejos.

### 3.3.1 Simulación Monte Carlo

Para implementar un método Monte Carlo en un problema de valuación de opciones cuyas variables subyacentes dependan de algún sistema de EDEs, primero debemos discretizar el tiempo, de modo a obtener una recursión estocástica cuyos caminos se acerquen lo más posibles al proceso estocástico solución del sistema.

---

<sup>27</sup>Por ejemplo, en el caso del método de Euler para ecuaciones diferenciales ordinarias existe en teoría una cota, que esta en función de ciertas constantes cuyo valor no es conocido de antemano [BRL10].

A continuación se explica la idea para el caso univariable, sea la siguiente EDE:

$$dS = a(S) dt + b(S) dW, \quad (3.29)$$

donde  $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $W$  es un proceso de Wiener. Sea  $S_0$  el valor inicial de la variable subyacente, entonces la discretización Euler-Maruyama [D.J01] con  $\Delta t$  fijo nos daría la siguiente recursión:

$$S_{n+1} = S_n + a(S_n) \Delta t + b(S_n) \Delta W_n, \quad (3.30)$$

donde  $\Delta W_n = W_{(n+1)\Delta t} - W_{n\Delta t}$ , este esquema es de primer orden de precisión. Otro esquema muy empleado para discretizar (3.29) es el esquema de Milstein [D.J01]. Esta discretización es de segundo orden de precisión y consiste en la siguiente recursión:

$$S_{n+1} = S_n + a(S_n) \Delta t + b(S_n) \Delta W_n + \frac{1}{2} b'(S_n) b(S_n) ((\Delta W_n)^2 - \Delta t). \quad (3.31)$$

Tanto en el esquema (3.30) como en el (3.31) podemos observar que la aleatoriedad del  $(n + 1)$ -ésimo termino se debe a  $\Delta W_n$ , que se implementa computacionalmente como una secuencia de números aleatorios probabilísticamente independientes según una distribución normal, de media 0 y varianza  $\Delta t$ <sup>28</sup>. Por lo tanto, por medio de estas discretizaciones trabajaremos con procesos estocásticos definidos solamente en instantes múltiplos de  $\Delta t$ . Cada simulación o realización del proceso estocástico discreto consiste en una secuencia  $\{S_n\}$  dependiente de otra secuencia  $\{\Delta W_n(\omega)\}$  donde  $\omega$  es un experimento aleatorio de un espacio muestral  $\Omega$ .

Si quisiéramos simular dos variables estocásticas que sean movimientos geométrico-brownianos con una correlación  $\rho$ , donde cada una cumple una ecuación de la forma (3.29), entonces cada una de las variables estocásticas  $S^1$  y  $S^2$  tendrá su correspondiente discretización  $\{S_n^1\}$  y  $\{S_n^2\}$ , dependientes de  $\{\Delta W_n^1\}$  y  $\{\Delta W_n^2\}$  respectivamente. Por lo tanto, se definirá otra secuencia auxiliar de números aleatorios probabilísticamente independientes  $\{\Delta W_n^3\}$  de distribución normal, media 0, varianza  $\Delta t$  y probabilísticamente independiente de  $\{\Delta W_n^1\}$  tal que  $\Delta W_n^2 = \rho \Delta W_n^1 + \sqrt{1 - \rho^2} \Delta W_n^3$  [J.05], obteniéndose de ese modo la correlación necesaria entre  $S^1$  y  $S^2$ .

---

<sup>28</sup>Sin entrar en muchos detalles, actualmente muchos paquetes científicos como Matlab ofrecen comandos para generar números aleatorios.

### 3.3.2 Método Monte Carlo para valuación de opciones europeas

La valuación Monte Carlo en su sentido más simple consiste únicamente en obtener un valor de valuación  $v_\omega$ <sup>29</sup> para cada una de las  $n$  realizaciones  $\omega$  y finalmente obtener el valor final  $V$  como un promedio de las  $n$  valuaciones anteriores:

$$V = \frac{\sum_{\omega=1}^n v_\omega}{n}. \quad (3.32)$$

Este tipo de valuación es efectivo para opciones europeas, pero no resulta aplicable a opciones americanas, por no brindar una forma clara de estimar esperanzas condicionales<sup>30</sup>.

#### Valuación de una opción financiera europea de una variable

Supongamos que deseamos calcular una opción europea (2.3), con tasa libre de riesgo  $r$ , tiempo de expiración  $T$  y precio strike  $K$ <sup>31</sup>. Una vez obtenidas las secuencias  $\{S_n(\omega)\}$  para cada realización  $\omega$ <sup>32</sup>, como la opción europea depende solamente del valor de la variable subyacente al vencimiento  $T$ , entonces para cada realización  $\omega$  la tenencia de una opción europea con los parámetros mencionados implica el siguiente beneficio económico al tiempo 0:

$$v_\omega = e^{-rT} \max \left( S_{\frac{T}{\Delta t}}(\omega) - K, 0 \right) \quad (3.33)$$

que siendo aplicado a la expresión (3.32) nos da el valor final de la opción.

#### Valuación de una opción europea de dos variables

Supongamos que deseamos calcular una opción europea con los mismos parámetros anteriores, pero donde la opción depende de una variable construida a partir de dos variables estocásticas  $S = S^1 S^2$ . Una vez obtenidas las secuencias  $\{S_n^1(\omega)\}$  y  $\{S_n^2(\omega)\}$ , para cada realización  $\omega$  la posesión de una opción europea implica el siguiente beneficio económico:

$$v_\omega = e^{-rT} \max \left( S_{\frac{T}{\Delta t}}^1(\omega) S_{\frac{T}{\Delta t}}^2(\omega) - K, 0 \right) \quad (3.34)$$

<sup>29</sup>Por lo que estaría en función de cada simulación  $\omega$  de las variables discretas  $S^i$  al tiempo de expiración  $T$ .

<sup>30</sup>Ver ejemplo en Anexo C(8)

<sup>31</sup>Tal como se definió en (2.1).

<sup>32</sup>Es decir cada camino de nuestro proceso discretizado que hallamos simulado.

que al ser aplicado a la expresión (3.32) nos da el valor final de la opción.

### 3.3.3 Método Monte Carlo de mínimos cuadrados (LSM)

El LSM tiene lo necesario para estimar esperanzas condicionales por lo que resulta útil para calcular opciones americanas. Esto parte de la idea matemática fundamental que la esperanza condicional

$$\mathbb{E}(V(S_{n+1}, (n+1)\Delta t) / S_n)$$

puede ser estimada por medio de una función obtenida con una regresión lineal de mínimos cuadrados en los puntos  $\{S_n(\omega), V(S_{n+1}(\omega), (n+1)\Delta t)\}$  con  $n$  fijo, utilizando una familia de funciones  $F_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  como base<sup>3334</sup>. [LF01]

#### Valuación de una opción cuya ecuación de Bellman este en función de una esperanza condicional

Supongamos que una función de valuación cumple la siguiente ecuación de Bellman:

$$V(S_n, n\Delta t) = \mathbb{B}(S_n, r, n\Delta t, \mathbb{E}(V(S_{n+a}, (n+a)\Delta t) / S_n)) \quad (3.35)$$

entonces se realiza una regresión lineal de mínimos cuadrados con una familia de funciones  $\{f_i\}$  en los siguientes puntos  $\{S_n(\omega), V(S_{n+a}(\omega), (n+a)\Delta t)\}$  obteniendo una función  $E(x)$ , tal que si  $S_n(\omega) = x$  entonces:

$$\mathbb{E}(V(S_{n+a}, (n+1)\Delta t) / S_n)(\omega) \approx E(x) \quad (3.36)$$

de modo que reemplazando en la ecuación de Bellman (3.35) obtenemos la siguiente estimación para cada  $\omega$ :

$$V(S_n(\omega), n\Delta t) \approx \mathbb{B}(S_n(\omega), r, n\Delta t, E(S_n(\omega))). \quad (3.37)$$

En el caso de una opción call americana común tendríamos:

$$\begin{cases} V(S_n(\omega), n\Delta t) = \mathbb{B}(S_n(\omega), r, n\Delta t, E(S_n(\omega))) \\ \approx \max(e^{-a\Delta t} E(S_n(\omega)), S_n(\omega) - K) \end{cases} \quad (3.38)$$

<sup>33</sup>Funciones de regresión, como ser polinomios.

<sup>34</sup>Ver ejemplo en Anexo C(8)

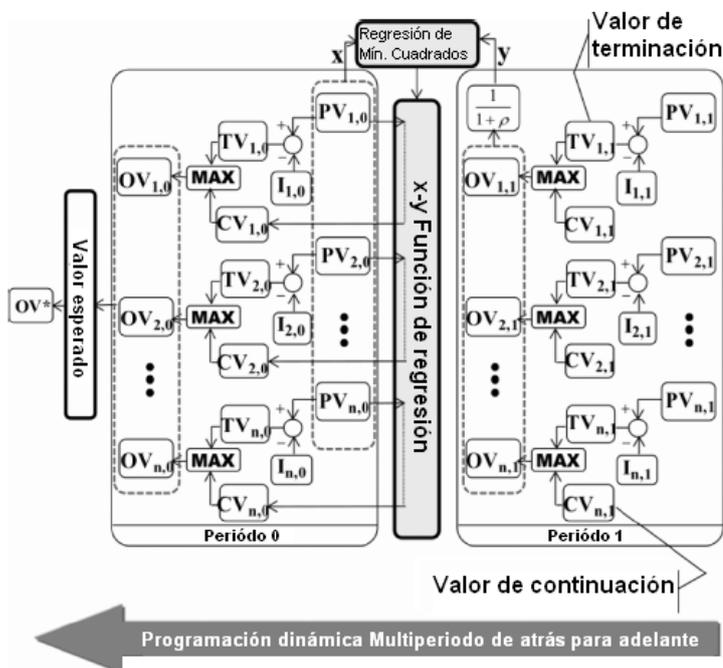


Figura 3.4: Esquema del LSM aplicado a una opción americana [BG11].

De esa manera, conociendo la función de valuación en el tiempo  $T$ , se estima la función en el tiempo  $T - a\Delta t$ , a partir de esta se estima  $T - 2a\Delta t$  y así hasta llegar al valor de la función de valuación en el tiempo 0. En el trabajo original que propone este método [LF01] se sugiere realizar la regresión solo en los  $\omega$  que estén *In the money*, es decir en aquellos  $\omega$  tales que  $S_n(\omega) - K > 0$ , por una cuestión de mera eficiencia computacional. El cálculo de la opción para  $S_n(\omega) = S_n^1(\omega) S_n^2(\omega)$  se realiza al igual que el caso univariable, con los  $S_n^i(\omega)$  definidos de la misma manera que en la valuación de opciones europeas bivariable.

## Capítulo 4

# EL ENFOQUE DE VARIABLE CONTINUA

La idea de este enfoque está fuertemente inspirada en la aproximación por cadenas de Markov, pero difiere de esta al considerar un conjunto de estados infinito y continuo para cada variable estocástica, mientras que los métodos por cadenas de Markov trabajan con un número finito y discreto de estados. Antes de hablar de la propuesta en si, se explica la idea fundamental de este enfoque para el caso univariable donde el proceso no varía su comportamiento en el tiempo, aunque dichas restricciones no son hipótesis necesarias para la propuesta que se aplica a procesos mucho más generales.

Como se ha comentado anteriormente el enfoque de aproximación por cadenas de Markov generaliza a otros algoritmos como el método binomial, pues es posible aproximar los procesos estocásticos continuos por medio de un proceso discreto donde un estado puede evolucionar a cualquier otro. Para utilizar este enfoque se debe asignar la probabilidad de que un estado  $a_i$  evolucione a otro estado  $a_j$  en el siguiente instante de modo a acercar el comportamiento del proceso discreto  $X_n$  lo más que se pueda al proceso continuo  $S_t$ . Eso se puede conseguir de distintas maneras. En el caso de los Lattice Methods se suelen igualar las esperanzas y varianzas condicionales de los procesos discretos y continuos. En el caso de esta propuesta se emplearán esquemas numéricos como se verá más adelante. Por lo tanto manteniendo la misma definición y notaciones para cadena de Markov  $X$  y matriz de transición  $M$  de la subsección (3.2.3), supongamos lo siguiente:

- El espacio de estados  $X_n \in \{a_i\}$  es un conjunto finito.
- Los procesos estocásticos  $X_n$  y  $S_t$  son homogéneos en el tiempo, es decir la probabilidad condicional de que un estado evolucione a otro no varía en el tiempo (como los modelos más usados en finanzas).
- Los valores  $\{a_i\}$  del espacio de estados discreto son elegidos para compor-

tarse de forma parecida a los mismos valores de la variable estocástica del modelo continuo  $S_t^1$ .

Si consideramos el vector columna  $V$  donde  $V_i = v(a_i)$  para  $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (una función que aproxima el valor de la opción en el instante),  $\mathbb{E}(X/A)$  la esperanza condicional de  $X$  sobre el evento  $A$  y definiendo  $Q := MV$ , entonces se tendría la siguiente esperanza condicional que cumple:

$$Q_i = \sum_{j=0} v(a_j) M_{ij} = \sum_{j=0} v(a_j) \mathbb{P}(v(a_j) / X_n = a_i) = \mathbb{E}(v(X_{n+1}) / X_n = a_i). \quad (4.1)$$

El cual se emplea para estimar la siguiente esperanza condicional:

$$\mathbb{E}\left(v\left(S_{t_{n+1}}\right) / S_{t_n}\right)(\omega) \approx \mathbb{E}\left(v\left(X_{n+1}\right) / X_n = a_i\right), \quad (4.2)$$

donde  $S_{t_n}(\omega) = a_i$  para  $\omega$  en el espacio muestral  $\Omega$ . El enfoque Path Integration toma todos los puntos de un intervalo finito  $[c_1, c_2]$  como estados para un proceso de Markov  $P_n : \Omega \times \mathbb{N} \rightarrow [c_1, c_2]$  aproximando  $S_t$  tanto como se requiera con solo afinar la discretización del tiempo, un proceso estocástico como ese posee un conjunto de estados no-contable. Entonces consideramos  $f : [c_1, c_2] \times [c_1, c_2] \rightarrow [0, \infty)$  tal que  $f(x, y)$  es la función de densidad de  $P_{n+1}$  si  $P_n = y$ , en tanto que el lado derecho de (4.2) puede ser remplazado por una integral que estima la esperanza de  $v(P_{n+1})$  si  $P_n = a_i$  y  $P_{n+1} \in [c_1, c_2]$ :

$$\mathbb{E}\left(v\left(S_{t_{n+1}}\right) / S_{t_n}\right)(\omega) \approx \int_{c_1}^{c_2} v(x) f(x, a_i) dx. \quad (4.3)$$

Generalmente la estimación es mejorada cuando  $[c_1, c_2]$  cubre gran parte de  $\mathbb{R}$  porque frecuentemente los valores de  $S_t$  no se restringen a un intervalo finito. Este ejemplo unidimensional puede ser extendido a múltiples dimensiones con casi los mismos conceptos. Lo que se acaba de comentar todavía no es un verdadero procedimiento, tan solo una comparación entre enfoques.

## 4.1 Descripción del algoritmo

Esta aplicación del PIM es propuesta para calcular multi-opciones de múltiples variables [GS11]. Las entradas de este algoritmo son a) Una discretización de las variables subyacentes (4.5), b) Las ecuaciones de Bellman que determinan el tipo de opción (4.6), c) Un conjunto de puntos  $\{P_k\}$  en  $\mathbb{R}^n$  y una región finita  $\Omega_P$  en

---

<sup>1</sup>Según algún criterio no definido para ser mas generales.

$\mathbb{R}^n$  para cada elemento  $P$  de  $\{P_k\}$ . Considerando la siguiente notación:

- La variable de tiempo es  $t$ .
- Un vector de  $n$  procesos estocásticos:  $X_t = (X_t^1, X_t^2, \dots, X_t^n)$ , con:  $dX_t = (dX_t^1, dX_t^2, \dots, dX_t^n)$ .
- Un vector de  $m$  procesos de Wiener  $W_t = (W_t^1, W_t^2, \dots, W_t^m)$ , con:  $dW_t = (dW_t^1, dW_t^2, \dots, dW_t^m)$  y una matriz de correlación  $\rho$  definida por  $\rho_{ij} = \text{corr}(W^i, W^j)$ .
- Una familia de  $n$  funciones  $f_i : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  y una familia de  $n \times m$  funciones  $g_{ij} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Adicionalmente, consideraremos un sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas con solución única fuerte [kB03]:

$$dX_t^i = f_i(t, X_t) dt + \sum_{j=1}^m g_{ij}(t, X_t) dW_t^j. \quad (4.4)$$

Sea un sistema de recursiones estocásticas obtenidas al aplicar en (4.4) un esquema numérico como Euler-Maruyama o Milstein [D.J01], con una discretización uniforme del tiempo:

$$X_{k+1}^i = F_i(k, \Delta t, X_k, \Delta W_k), \quad (4.5)$$

donde  $k$  representa el número de pasos,  $\Delta t$  la discretización constante del tiempo,  $X_k = (X_k^1, X_k^2, \dots, X_k^n)$  el vector de los procesos estocásticos discretizados en el paso  $k$ ,  $\Delta W_k = W_{(k+1)\Delta t} - W_{k\Delta t}$  y una familia de  $n$  funciones  $F_i : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^{2m+1} \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

Suponga la existencia de una función discreta de valuación  $V$  que depende de  $\{X_i\}$  como variables subyacentes y un vector  $Y$  conteniendo parámetros particulares de un problema específico (como el parámetro  $r$  de la tasa libre de riesgo), entonces tendríamos una ecuación de Bellman<sup>3</sup> de la forma:

$$V(X_{t_a}, t_a) = \max_{i \in I(X_{t_a})} \left\{ H_i(X_{t_a}, Y, \mathbb{E}[V_i(X_{t_{a+1}}, t_{a+1}) / X_{t_a}]) \right\} \quad (4.6)$$

donde  $H_i : \mathbb{R}^{n+p+2} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t_a = a\Delta t$ ,  $p$  es la dimensión de  $Y$ ,  $I(X_{t_a})$  representa el conjunto de todas las posibles decisiones en el estado  $X_{t_a}$ ,  $V_i$  es la función de valuación de la opción eligiendo  $i$  y  $\mathbb{E}[V_i(X_{t_a}, t_a) / X_{t_a}]$  es la esperanza condicional de  $V_i$  sobre  $X_{t_a}$ .

<sup>2</sup>Cada función generaliza la forma de la discretización del proceso estocástico multivariable para cada dimensión.

<sup>3</sup>Ver anexo B (8)

Definimos la siguiente función  $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{N} \times I(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$G(P, a, i) = \mathbb{E} \left[ V_i \left( X_{t_{a+1}}, t_{a+1} \right) / X_{t_a} \right] (\omega) \quad (4.7)$$

para todo  $\omega$  que pertenece al espacio muestral tal que  $X_a(\omega) = P$  (expresión que solo depende del tiempo y del estado actual  $P$ , porque  $X_a$  es un proceso de Markov). Entonces se puede realizar la siguiente estimación<sup>4</sup>:

$$G(P, a, i) \approx \int_{\Omega_P} J(x_1, \dots, x_n) V_i(x_1, \dots, x_n, t_{a+1}) . dx_1 \dots dx_n \quad (4.8)$$

donde  $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es la función de densidad conjunta de  $X_{a+1}$  si  $X_a = P$  (usando (4.5)) y  $\Omega_P = [p_1, q_1] \times \dots \times [p_n, q_n]$  que es una región lo suficientemente amplia para una buena aproximación de la integral.

Al igual que en otros algoritmos de valuación de opciones, aquí se aplica programación dinámica estocástica backward [R.E03], tomando la estimación de la función de valuación en el instante disponible más próximo al instante 0, para luego emplearlo para estimar nuevamente la función de valuación en el tiempo discreto anterior. Sea  $\tilde{V}$  nuestra aproximación de  $V$  y suponga que es una buena aproximación de la función de valuación  $V(x, t_{a+1})$  (con  $t_{a+1}$  fijo) en una región  $\Omega_{a+1} \subset \mathbb{R}^n$ . Entonces calculamos (4.8) (con  $\tilde{V}(x, t_{a+1})$ ) reemplazando en (4.6) y por lo tanto obteniendo una nueva aproximación  $\tilde{V}(x, t_a)$  en un conjunto de puntos previamente selectos  $\{P_k\} \subset \Omega_{a+1}$ . Sin embargo, para repetir el mismo procedimiento y obtener una estimación de la función en otro instante previo  $\tilde{V}(x, t_{a-1})$ , primero debemos tener una estimación de  $V(x, t_a)$  en otra región  $\Omega_a \subset \mathbb{R}^n$  lo suficientemente amplia. Para ello finalmente hacemos una interpolación o regresión en el conjunto de puntos  $\{P_k, \tilde{V}(P_k, t_a)\}$  empleando una familia predeterminada de funciones como base<sup>5</sup>.

Una forma computacionalmente eficiente de hacer esto es por medio de una *interpolación local*, donde debemos crear una partición de  $\Omega_a = \cup \alpha_i$  donde cada  $V_i : \alpha_i \rightarrow \mathbb{R}$  es aproximado por una interpolación de  $\tilde{V}_i(x, t_a)$  en  $\beta_i \cap \{P_k\}$ , donde  $\alpha_i \subset \beta_i$ <sup>6</sup>. El algoritmo acaba cuando el procedimiento alcanza al primer instante

<sup>4</sup>Lo cual es una extensión multivariable a lo expuesto en [MG02].

<sup>5</sup>Determinar la mejor familia de funciones en términos de precisión y eficiencia queda como un aspecto abierto para trabajos futuros.

<sup>6</sup> $\beta_i$  se trata de un conjunto que contenga en su interior una cantidad baja de elementos de  $\{P_k\}$ , de modo a evitar los problemas que se comentan en el siguiente párrafo.

discreto,  $a = 0$ . El siguiente pseudo código representa lo que acaba de ser descrito:

```

 $N = \frac{T}{\Delta t}$  = Número de pasos.
 $M$  =cardinalidad de  $\{P_k\}$ .
 $L$  =cardinalidad de  $I(X)^a$ .
Discretizar la EDE (4.4) que modela las variables subyacentes.
Determinar la función de densidad conjunta de las variables discretas de
(4.5).
desde  $i = 1, \dots, N$  hacer
    desde  $j = 1, \dots, M$  hacer
        desde  $k = 1, \dots, L$  hacer
             $\tilde{G}(P_j, i, k) = \int_{\Omega_j} J_{P_j}(x_1, \dots, x_n) \tilde{V}_k(x_1, \dots, x_n, t_i) .dx_1 \dots dx_n;$ 
        fin_desde
         $\tilde{V}(P_j, t_{i-1}) = \max_{k \in I(X)} \{H_k(P_j, Y, \tilde{G}(P_j, i, k))\};$ 
    fin_desde
    Interpolador o aplicar una regresión a  $\{P_j, \tilde{V}(P_j, t_{i-1})\};$ 
fin_desde

```

**Algoritmo 1:** Aplicación del Path Integration Method

<sup>a</sup>Este pseudo código asume que el número de posibles decisiones en cada estado y tiempo es la misma, además que cada decisión  $i$  corresponde a una función de valuación  $V_i$

En cuanto a la elección del tipo de aproximación a emplear, si se efectúa una interpolación con polinomios de grado muy alto hay que tomar en cuenta al efecto oscilatorio llamado *Fenómeno de Runge*[DG08], el cual puede producir resultados muy imprecisos. Tal inconveniente se puede minimizar con el uso de polinomios de menor grado, como en el caso de las interpolaciones spline [L.07] usuales u otras estrategias de aproximación pensadas para evitar dicho problema [DG08].

## 4.2 Un ejemplo numérico simple

Aquí se presenta un ejemplo numérico sencillo para una opción call americana común, la cual es independiente al caso de estudio principal de la tesis. Consideraremos los valores de los siguientes parámetros: tasa libre de riesgo  $r = 0.05$ , precio de ejercicio  $K = 5$ , valor inicial del activo subyacente  $S_0 = 10$ , la volatilidad  $\sigma = 0.3$ , el tiempo de expiración  $T = \frac{2}{3}$  y la discretización del tiempo  $\Delta t = \frac{1}{3}$ .

Asumiendo que el activo subyacente se comporta según un movimiento geométrico

browniano<sup>7</sup> y considerando supuestos de un mundo neutral al riesgo que nos permite representar la dinámica de la variable subyacente de esta manera [WP95]:

$$dS = rSdt + \sigma SdW = (0.05) Sdt + (0.3) SdW, \quad (4.9)$$

donde  $W$  es un proceso de Wiener y  $\Delta W_n = W_{(n+1)\Delta t} - W_{n\Delta t}$ , si aplicamos el método Euler-Maruyama obtendremos el siguiente proceso estocástico discreto:

$$S_{n+1} = S_n + rS_n \Delta t + \sigma S_n \Delta W_n = S_n + \left(\frac{1}{60}\right) S_n + (0.3) S_n \Delta W_n. \quad (4.10)$$

Sea  $S_n = x$ , entonces la variable aleatoria  $S_{n+1}$  tendrá una distribución normal de media  $m_x = x + \left(\frac{1}{60}\right)x$  y desviación estándar  $d_x = \frac{(0.3)x}{\sqrt{3}}$ <sup>8</sup>, lo que implica la siguiente función de densidad:

$$f_x(y) = \left(\frac{1}{d_x \sqrt{2\pi}}\right) e^{-\left(\frac{(y-m_x)^2}{2d_x^2}\right)}. \quad (4.11)$$

Entonces comenzamos a usar la condición en el tiempo de expiración  $T = \frac{2}{3}$  para opciones call americanas:  $V\left(S_2, \frac{2}{3}\right) = \max(S_2 - 5; 0)$  con el objetivo de aproximar la función de valuación de la opción en el instante previo  $t = \frac{1}{3}$ , cosa que se logra aplicando la ecuación de Bellman:

$$V(S_n, n\Delta t) = \max\left(S_n - K; e^{-r\Delta t} \mathbb{E}\left(V\left(S_{n+1}, \frac{n+1}{3}\right) / S_n\right)\right) \quad (4.12)$$

que permite obtener valores anteriores en el tiempo. Siguiendo la idea propuesta por el algoritmo entonces estimamos esperanzas condicionales necesarias para la ecuación de Bellman al calcular la siguiente integral en un número finito de valores de  $S_n$  dado por el conjunto  $\{0.1; 12; 24; 36; 48\}$ :

$$\mathbb{E}(V(S_{n+1}, (n+1)\Delta t) / S_n)(\omega) \approx \int_0^{\infty} V(y, (n+1)\Delta t) f_x(y) dy. \quad (4.13)$$

donde  $\omega$  esta en el espacio muestral  $\Omega$  y  $S_n(\omega) = x$ .

<sup>7</sup>Que ya fue analizado en (3.1).

<sup>8</sup>Porque el incremento de un proceso de Wiener  $\Delta W_n = W_{(n+1)\Delta t} - W_{n\Delta t}$  tiene una distribución normal con media cero y varianza  $\Delta t$ , ver anexo A (8).

Para  $\omega$  tal que  $S_1(\omega) = 0.1$  donde  $m_{0.1} = 0.1017$  y  $d_{0.1} = 0.0173$ :

$$\mathbb{E} \left( V \left( S_2, \frac{2}{3} \right) / S_1 \right) (\omega) \approx \int_0^{76} \max(y - 5; 0) \cdot \left( \frac{1}{d_{0.1} \sqrt{2\pi}} \right) e^{-\left( \frac{(m_{0.1} - y)^2}{2d_{0.1}^2} \right)} .dy = 0 \quad (4.14)$$

$$\Rightarrow V \left( \frac{1}{10}, \frac{1}{3} \right) \approx \max \left( S_2 - K; e^{-r\Delta t} \mathbb{E} \left( V \left( S_2, \frac{2}{3} \right) / S_1 \right) \right) \approx \max(0.1 - 5; 0) = 0. \quad (4.15)$$

Observamos como las integrales son calculadas en un intervalo finito de integración  $[0, 76]^9$  lo suficientemente grande para nuestros requerimientos de precisión.

A continuación se realiza el mismo procedimiento, con las mismas fórmulas en los puntos que quedan. Para  $\omega$  tal que  $S_1(\omega) = 12$ , entonces  $m_{12} = 12.2$  y  $d_{12} = 2.0785$ :

$$\mathbb{E} \left( V \left( S_2, \frac{2}{3} \right) / S_1 \right) (\omega) \approx \int_0^{76} \max(y - 5; 0) \cdot \left( \frac{1}{d_{12} \sqrt{2\pi}} \right) e^{-\left( \frac{(m_{12} - y)^2}{2d_{12}^2} \right)} .dy = 12.1988 \quad (4.16)$$

$$\Rightarrow V \left( 12, \frac{1}{3} \right) \approx \max(12 - 5; 11.9972) = 11.9972. \quad (4.17)$$

Para  $\omega$  tal que  $S_1(\omega) = 24$  entonces  $m_{24} = 24.4$  y  $d_{24} = 4.1569$ :

$$\mathbb{E} \left( V \left( S_2, \frac{2}{3} \right) / S_1 \right) (\omega) \approx \int_0^{76} \max(y - 5; 0) \cdot \left( \frac{1}{d_{24} \sqrt{2\pi}} \right) e^{-\left( \frac{(m_{24} - y)^2}{2d_{24}^2} \right)} .dy = 24.4 \quad (4.18)$$

$$\Rightarrow V \left( 24, \frac{1}{3} \right) \approx \max(24 - 5; 23.9967) = 23.9967. \quad (4.19)$$

Para  $\omega$  tal que  $S_1(\omega) = 36$  entonces  $m_{36} = 36.6$  y  $d_{36} = 6.2354$ :

$$\mathbb{E} \left( V \left( S_2, \frac{2}{3} \right) / S_1 \right) (\omega) \approx \int_0^{76} \max(y - 5; 0) \cdot \left( \frac{1}{d_{36} \sqrt{2\pi}} \right) e^{-\left( \frac{(m_{36} - y)^2}{2d_{36}^2} \right)} .dy = 36.6 \quad (4.20)$$

---

<sup>9</sup>Las áreas de integración quedan a libre criterio del implementador del algoritmo, teniendo que analizar las correspondientes integrales.

$$\Rightarrow V\left(36, \frac{1}{3}\right) \approx \max(36 - 5; 35.9951) = 35.9951. \quad (4.21)$$

Para  $\omega$  tal que  $S_1(\omega) = 48$  entonces  $m_{48} = 48.8$  y  $d_{48} = 8.3138$ :

$$\mathbb{E}\left(V\left(S_2, \frac{2}{3}\right) / S_1\right)(\omega) \approx \int_0^{76} \max(y - 5; 0) \cdot \left(\frac{1}{d_{48}\sqrt{2\pi}}\right) e^{-\left(\frac{(m_{48}-y)^2}{2d_{48}^2}\right)} dy = 48.7582 \quad (4.22)$$

$$\Rightarrow V\left(48, \frac{1}{3}\right) \approx \max(48 - 5; 47.9523) = 47.9523. \quad (4.23)$$

Entonces aproximamos la función  $V\left(S_1, \frac{1}{3}\right)$  en  $\mathbb{R}$  por medio de una regresión de los puntos  $\{(0.1; 0), (12; 11.9972), (24; 23.9967), (36; 35.9951), (48; 47.9523)\}$  con la familia de funciones  $\{1, x, x^2\}$  y obteniéndose  $V(x, \frac{1}{3}) \approx -0.093 + 1.0076x - 0.0001x^2$ . Ya con una estimación en ese instante de tiempo, nuevamente repetimos el procedimiento anterior pero esta vez para el instante anterior  $t = \frac{1}{3}$ :

Para  $\omega$  tal que  $S_0(\omega) = 0.1$  entonces  $m_{0.1} = 0.1017$  y  $d_{0.1} = 0.0173$ :

$$\mathbb{E}\left(V\left(S_1, \frac{1}{3}\right) / S_0\right)(\omega) \quad (4.24)$$

$$\approx \int_0^{76} (-0.093 + 1.0076y - 0.0001y^2) \cdot \left(\frac{1}{d_{0.1}\sqrt{2\pi}}\right) e^{-\left(\frac{(m_{0.1}-y)^2}{2d_{0.1}^2}\right)} dy = 0.0094 \quad (4.25)$$

$$\Rightarrow V\left(0.1, \frac{1}{3}\right) \approx \max(-4.9; 0.0093) = 0.0093. \quad (4.26)$$

Para  $\omega$  tal que  $S_0(\omega) = 12$  entonces  $m_{12} = 12.2$  y  $d_{12} = 2.0785$ :

$$\mathbb{E}\left(V\left(S_1, \frac{1}{3}\right) / S_0\right)(\omega) \quad (4.27)$$

$$\approx \int_0^{76} (-0.093 + 1.0076y - 0.0001y^2) \cdot \left(\frac{1}{d_{12}\sqrt{2\pi}}\right) e^{-\left(\frac{(m_{12}-y)^2}{2d_{12}^2}\right)} dy = 12.1844 \quad (4.28)$$

$$\Rightarrow V(12, 0) \approx \max(7; 11.9830) = 11.9830. \quad (4.29)$$

Para  $\omega$  tal que  $S_0(\omega) = 24$  entonces  $m_{24} = 24.4$  y  $d_{24} = 4.1569$ :

$$\mathbb{E} \left( V \left( S_1, \frac{1}{3} \right) / S_0 \right) (\omega) \quad (4.30)$$

$$\approx \int_0^{76} (-0.093 + 1.0076y - 0.0001y^2) \cdot \left( \frac{1}{d_{24}\sqrt{2\pi}} \right) e^{-\left(\frac{(m_{24}-y)^2}{2d_{24}^2}\right)} .dy = 24.4312 \quad (4.31)$$

$$\Rightarrow V(24, 0) \approx \max(19; 24.0274) = 24.0274. \quad (4.32)$$

Para  $\omega$  tal que  $S_0(\omega) = 36$  entonces  $m_{36} = 36.6$  y  $d_{36} = 6.2354$ :

$$\mathbb{E} \left( V \left( S_1, \frac{1}{3} \right) / S_0 \right) (\omega) \quad (4.33)$$

$$\approx \int_0^{76} (-0.093 + 1.0076y - 0.0001y^2) \cdot \left( \frac{1}{d_{36}\sqrt{2\pi}} \right) e^{-\left(\frac{(m_{36}-y)^2}{2d_{36}^2}\right)} .dy = 36.6473 \quad (4.34)$$

$$\Rightarrow V(36, 0) \approx \max(31; 36.0416) = 36.0416. \quad (4.35)$$

Para  $\omega$  tal que  $S_0(\omega) = 48$  entonces  $m_{48} = 48.8$  y  $d_{48} = 8.3138$ :

$$\mathbb{E} \left( V \left( S_1, \frac{1}{3} \right) / S_0 \right) (\omega) \quad (4.36)$$

$$\approx \int_0^{76} (-0.093 + 1.0076y - 0.0001y^2) \cdot \left( \frac{1}{d_{48}\sqrt{2\pi}} \right) e^{-\left(\frac{(m_{48}-y)^2}{2d_{48}^2}\right)} .dy = 48.7911 \quad (4.37)$$

$$\Rightarrow V(48, 0) \approx \max(43; 47.9523) = 47.9523. \quad (4.38)$$

Otra vez aproximamos la función  $V(S, 0)$  en  $\mathbb{R}$  por medio de una regresión de los puntos:

$$\{(0.1; 0.0093), (12; 11.983), (24; 24.0274), (36; 36.0416), (48; 47.9846)\}$$

en la familia de funciones  $\{1, x, x^2\}$  y obteniéndose  $V(x, 0) \approx -0.0951 + 1.0087x - 0.0001x^2$ . Finalmente al evaluar el valor inicial  $S_0 = 10$  en esta última regresión:

$V(10, 0) \approx 9.9819$ . Con este ejemplo se pueden observar los aspectos básicos del algoritmo, como además los análisis que se deben hacer durante una implementación.

## Capítulo 5

# UN MODELO PARA CONTROLES DE CALIDAD

En este capítulo<sup>1</sup> presentamos y formulamos un modelo de valuación de opciones reales para controles de calidad, este modelo se utilizará como caso de aplicación de los distintos algoritmos para valuación de opciones. Un control de calidad es un control estadístico que tiene como objetivo monitorear la calidad de un proceso [NHB02] y que ayude a encontrar los problemas cíclicos<sup>2</sup> que se presentan en circunstancias impredecibles. Los fabricantes utilizan los controles de calidad para dar cuenta de la producción de baja calidad en el sistema, el no usar los controles de calidad puede implicar pérdidas económicas debido a la eliminación por inspección final, devolución de las piezas defectuosas por parte del consumidor o el riesgo a una mala reputación por un servicio o producto deficiente. Por supuesto el uso de controles de calidad tiene un costo, teniendo en cuenta por ejemplo los equipos, el software y los operadores [D.C00]. Dentro de este trabajo, el problema de opciones reales se basa en la hipótesis de que hay una opción para la aplicación de los controles de calidad con el fin de evaluar y maximizar el beneficio económico que depende del precio del producto o servicio en el mercado y el número de ventas. En este sentido, al tomar al precio de mercado y el número de ventas como variables inciertas, estos se han modelado de acuerdo a procesos estocásticos adecuados. Todo esto con el objetivo final de dar un valor a la posibilidad de implementar un control de calidad, de acuerdo a los supuestos de cada uno de los modelos dados. En primer lugar consideramos el modelo más simple, donde sólo el número de ventas es variable, y luego consi-

---

<sup>1</sup>Este capítulo esta basado en el trabajo de Nembhard, Shi y Atkan: *A REAL OPTIONS DESIGN FOR QUALITY CONTROL CHARTS*[NHB02]

<sup>2</sup>Los diversos problemas que pueden surgir en cada etapa, durante el ciclo en que se concreta la producción de un bien o servicio, desde su inicio hasta el final.

deraremos el modelo de dos variables con ambos valores de ventas y precio como variables.

## 5.1 Modelo financiero de una variable estocástica

Sea  $R(t)$  el ingreso total por las ventas del producto (cantidad total de dinero recibido) por intervalo de tiempo comenzando en el instante  $t$ , que depende de la variable estocástica número de productos vendidos durante el mismo intervalo de tiempo que comienza en el instante  $t$ , denotado por  $S^1(t)$  y el precio constante del producto  $S^2$ . Entonces  $R(t)$  puede ser escrito como:

$$R(t) = S^1(t) S^2. \quad (5.1)$$

Asumiendo que el número de ventas y el número de unidades producidas por intervalo de tiempo es el mismo, entonces la ganancia  $P(t)$  por intervalo de tiempo que comience en el instante  $t$  puede ser definido como la sustracción entre ingreso y gastos:

$$P(t) = R(t) - F - S^1(t) C, \quad (5.2)$$

donde  $F$  es el costo fijo de producción por intervalo de tiempo y  $C$  es la variable de costo de producción por unidad de producto. Sin embargo, de ahora en adelante consideraremos un modelo más complejo donde pueden existir fallas que producen pérdidas y la posibilidad de controles de calidad, por lo tanto hay que redefinir ganancia. El modelo general considera la hipótesis de que existen dos constantes: primero  $g$  como fracción de ingreso que se pierde si los controles de calidad no son implementados y por último  $K^3$  el costo de implementar los controles de calidad por intervalo de tiempo, entonces la ganancia<sup>4</sup> al carecer de un control de calidad por intervalo de tiempo es formulado como:

$$\tilde{P}(t) = (1 - g) S^1(t) S^2 - F - S^1(t) C, \quad (5.3)$$

y la ganancia al implementar un control de calidad por intervalo de tiempo es formulado como:

$$\hat{P}(t) = S^1(t) S^2 - F - S^1(t) C - K, \quad (5.4)$$

---

<sup>3</sup>Que es equivalente al precio strike ya definido en la sección 2.1.

<sup>4</sup>Como beneficio neto una vez que se descontaron todos los gastos.

Entonces la ganancia  $D(t)$  por la mera acción de aplicar los controles de calidad por intervalo de tiempo es la diferencia entre las ecuaciones (5.3) y (5.4) que se reducen a:

$$D(t) = \hat{P}(t) - \tilde{P}(t) = gS^1(t)S^2 - K. \quad (5.5)$$

## 5.2 Modelo financiero de dos variables estocásticas

El modelo de dos variables estocásticas considera que el precio del producto  $S^2(t)$  se mantiene durante un intervalo de tiempo que comienza en el instante  $t$  y es estocástico. Por lo tanto, el ingreso total por ventas  $R(t)$  satisface la siguiente ecuación:

$$R(t) = S^1(t)S^2(t). \quad (5.6)$$

La ganancia por intervalo de tiempo al no usarse los controles de calidad es representado como:

$$\tilde{P}(t) = (1 - g)S^1(t)S^2(t) - F - S^1(t)C, \quad (5.7)$$

y la ganancia por intervalo de tiempo al usarse controles de calidad es:

$$\hat{P}(t) = S^1(t)S^2(t) - F - S^1(t)C - K. \quad (5.8)$$

Finalmente es definida la ganancia  $D(t) := \tilde{P} - \hat{P}$ , que es obtenida por el mero hecho de aplicar controles de calidad en un intervalo de tiempo [NHB02]:

$$D(t) = gS^1(t)S^2(t) - K. \quad (5.9)$$

## 5.3 Modelo de valuación según una opción europea.

La siguiente valuación surge de la hipótesis previa considerando que una decisión tomada en un intervalo individual de tiempo no afecta a los intervalos posteriores. Esto es equivalente a que toda decisión posible es reversible. Consecuentemente, un inversor puede tomar la decisión de aplicar o no controles de calidad en cualquier intervalo. Si asumimos que el administrador puede elegir usar o no<sup>5</sup>

---

<sup>5</sup>Como se puede observar, solo tiene sentido implementar los controles cuando  $gS^1S^2 > K$ .

los controles de calidad en un instante que separe dos meses, durante un año, entonces tenemos 13 puntos de decisión y 13 costos para implementar un control de calidad en cada uno. Siguiendo esta hipótesis, el problema de opciones reales puede ser modelado empleando una opción europea para cada mes, pues según la ganancia final  $D(t)$  los beneficios dependerán de la variable subyacente  $S = gS^1S^2 = gR(t)$  siendo que este beneficio sera igual a  $\max(S(t) - K, 0)$ <sup>6</sup> para el punto de decisión correspondiente situado en el instante  $t$ , esta hipótesis aprovecha una analogía con la opción europea financiera al notarse que el precio de ejercicio de una opción y el costo de implementar el control de calidad ese mes juegan el mismo papel que el posible beneficio de poder emplear un control de calidad  $\max(S(t) - K, 0)$  al instante  $t$  del correspondiente punto de decisión. En otras palabras, el beneficio en un punto de decisión tiene la misma forma que la condición de contorno de una opción europea financiera.

Como tenemos varios puntos de decisión en distintos instantes de expiración que no se afectan entre sí, entonces el valor de la opción real final será la suma de todos los valores de las opciones europeas en cada punto [NHB02]. Como cada punto de decisión afecta a un solo mes, no tiene sentido considerar la opción de desaplicar un control, ya que al llegar el siguiente punto de decisión la elección anterior ya habría expirado.

## 5.4 Modelo de valuación según una opción americana

En este caso consideraremos que la opción será ejercitada en solo una ocasión y desde entonces dicha decisión nos seguiría afectando hasta el final del proceso. En otras palabras si elegimos aplicar el control de calidad en un instante entonces el control se mantendrá corriendo hasta el final de nuestro proyecto de inversión. Por lo tanto, conceptualmente tendríamos una opción americana por el hecho de que existe una única decisión que puede ser tomada en cualquier punto de decisión, pero esta opción americana diferiría de la clásica opción americana financiera en el sentido que en este caso las ganancias  $R(t)$ , consecuencia de haber aplicado el control de calidad, seguirán siendo cosechadas en los futuros puntos de decisión hasta la expiración, que en este caso serían 13 manteniendo los mismos puntos de decisión mensuales que usamos para el caso de la opción europea. Bajo estos

---

<sup>6</sup>Como se puede observar no puede ser negativo pues el administrador no permitiría que el control de calidad sea implementado si eso implica pérdidas económicas, de la misma manera que el propietario de una opción europea no haría uso de esta si el precio de ejercicio es mayor al del mercado en ese momento.

supuestos se determinará un único costo total  $K_A$  de comprar un control de calidad. Según el trabajo de [NHB02], este único costo será estimado según el punto medio entre el comienzo y expiración de la opción de la siguiente manera:

$$K_A = K \frac{(e^{r\Delta t})^{n+1} - 1}{(e^{r\Delta t} - 1)(e^{r\Delta t})^{n/2}}, \quad (5.10)$$

habiendo  $n$  intervalos. Por lo tanto manteniendo la misma definición de  $S$  y nombrando además la tasa libre de riesgo  $r$ , entonces la valuación de este tipo exótico de opción americana<sup>7</sup> será realizada considerando que la aplicación de controles de calidad implica un beneficio igual al valor actual de  $S$  y que el inversor ejecutará la opción de invertir en el control de calidad en el momento que la suma de beneficios actuales y los esperados de aplicar el control superen al beneficio cero obtenido de no hacer nada, es decir cuando

$$e^{-r(t_{n+1}-t_n)} \mathbb{E} (V(S(t_{n+1})) / S(t_n)) + S(t_n) - K_A > 0. \quad (5.11)$$

---

<sup>7</sup>Como se verá en el siguiente capítulo, la formulación en términos de ecuaciones de Bellman para esta opción real difieren de la formulación correspondiente a una opción americana clásica(2.6).

## Capítulo 6

# IMPLEMENTACIONES

### 6.1 Implementaciones para el caso de una variable

Empleando el caso de estudio discutido en [NHB02] para una sola variable estocástica, en este capítulo se presenta una implementación para el caso del modelo de valuación europea y americana para controles de calidad según los siguientes parámetros: el número de ventas por mes  $S_0^1 = 872640$ , el precio constante del producto  $S^2 = \$5.678$ , la volatilidad del número de ventas es  $\sigma = 0.930354$ . Además tenemos un factor de pérdida de ingresos al no implementar un control de calidad que monitoree los procesos,  $g = 0.018$ .  $K = \$11000$  es el costo mensual por implementar controles de calidad para el modelo de valuación europeo. En el caso del modelo de valuación americana un único costo  $K_A = \$143044$ . La tasa libre de riesgo igual a  $r = 0.08$  y el tiempo de expiración  $T = 1$ <sup>1</sup>.

Definimos la variable subyacente de ingresos,  $S := gS^1S^2$ , que seguiría la misma dinámica estocástica de  $S^1$ , la cual asumiremos como un movimiento geométrico browniano. Por lo tanto tendríamos,  $S_0 = 89187.3$ , para:

$$dS = (\mu.S)dt + (\sigma S)dW, \quad (6.1)$$

donde  $W$  es un proceso de Wiener,  $\mu = r = 0.08$  es el retorno libre de riesgo [WP95] y  $\sigma = 0.930354$  es la volatilidad.

Sea  $S_t$  el proceso estocástico original para el activo subyacente al tiempo  $t$ , y sean  $V_E$ ,  $V_A$ ,  $V_e$  y  $V_{am}$  las funciones de valuación europea, americana y dos

---

<sup>1</sup>En el capítulo de resultados numéricos compararemos los resultados para varios tiempos de expiración.

funciones de valuación auxiliares respectivamente<sup>2</sup>. Si consideramos una discretización del tiempo  $\Delta t = \frac{1}{24}$ , tendríamos por lo tanto las siguientes ecuaciones de Bellman:

$$V_e(S_{a\Delta t}, a\Delta t) = \max \left\{ 0, e^{-r\Delta t} \mathbb{E} \left[ V_e(S_{(a+1)\Delta t}, (a+1)\Delta t) / S_{a\Delta t} \right] \right\}, \quad (6.2)$$

$$V_{am}(S_{a\Delta t}, a\Delta t) = \max \left\{ 0, e^{-r\Delta t} \mathbb{E} \left[ V_{am}(S_{(a+1)\Delta t}, (a+1)\Delta t) / S_{a\Delta t} \right] \right\}, \quad (6.3)$$

si  $a$  es un número impar y

$$V_{am}(S_{a\Delta t}, a\Delta t) = \max \left\{ 0, S_{a\Delta t} + e^{-r\Delta t} \mathbb{E} \left[ V_{am}(S_{(a+1)\Delta t}, (a+1)\Delta t) / S_{a\Delta t} \right] \right\}, \quad (6.4)$$

si  $a$  es un número par<sup>3</sup>. Esto implica que

$$V_A(S_{a\Delta t}, a\Delta t) = \max \{ 0, V_{am}(S_{a\Delta t}, a\Delta t) - K_A \}, \quad (6.5)$$

$$V_E(S_{a\Delta t}, a\Delta t) = \sum_{k=0}^{\frac{a}{2}} V_e(S_{2k\Delta t}, 2k\Delta t), \quad (6.6)$$

si  $a$  es un número par<sup>4</sup> y donde<sup>5</sup>

$$V_e(S_{24\Delta t}, 1) = \max \{ 0, S_{24\Delta t} - 11000 \} \quad (6.7)$$

y

$$V_{am}(S_{24\Delta t}, 1) = \max \{ 0, S_{24\Delta t} \} = S_{24\Delta t}. \quad (6.8)$$

---

<sup>2</sup>Que han de ser empleadas para calcular las dos primeras funciones de valuación.

<sup>3</sup>Esta formulación quiere decir que (6.3) y (6.4) se emplean de forma alternada, dependiendo que  $a$  tome valores pares o impares. A diferencia de (6.2) que es una ecuación única e independiente a la paridad de  $a$ .

<sup>4</sup>Esta función de valuación solo es definida para  $a$  par, pues solo tiene sentido en los puntos de decisión considerados en (5.4).

<sup>5</sup>Estas dos últimas fórmulas corresponden a la condiciones de contorno al último instante.

### Observaciones.

La ecuación auxiliar (6.2) es una de las opciones europeas estándar que conforman la sumatoria para obtener el valor de la opción financiera real (5.3). Asumiendo que el flujo de caja es mensual tenemos que la ecuación de Bellman (6.3) corresponde a un punto intermedio en el medio del mes. La ecuación (6.3) solo tiene sentido al considerar que estas ecuaciones de Bellman son calculadas aproximadamente por métodos numéricos, pues otorga un punto extra de cálculo para mejorar la estimación de la esperanza condicional en (6.4) y de ese modo adaptar la valuación de la opción a un orden de discretización más fino y por ende preciso que  $\Delta t = \frac{1}{12}$ . También debe observarse que esta ecuación extra es idéntica a una opción financiera europea (2.3), pues de manera similar representa la política pasiva de esperar los beneficios futuros de una fecha fija, en este caso el siguiente punto de decisión. Si la discretización fuese  $\Delta t = \frac{1}{12}$  entonces solo la ecuación (6.4) sería directamente aplicada para cualquier  $a$  par o impar<sup>6</sup>. La ecuación (6.4) representa el valor de la opción auxiliar como la suma entre los beneficios actuales y los esperados en cada punto de decisión, sin contar con el precio Strike, el cual al ser incluido en (6.5) nos da el valor final de la opción real americana (5.4).

#### 6.1.1 Fórmula Black-Scholes

La fórmula Black-Scholes al proveer valores analíticos y exactos no considera ninguna discretización del tiempo  $\Delta t$ , ni a las ecuaciones de Bellman empleadas para la aplicación de programación dinámica, tan solo requiere que reemplacemos en ella los parámetros:  $S_0, K, r$  para  $T_a = \frac{a}{12}$  donde  $a \in \{0, 1, \dots, 12\}$ , obteniendo el valor de la opción europea convencional para los 13 puntos de decisión en todo el 1 año. La opción europea final se obtiene como sumatoria de los 13 resultados. Para el caso de la valuación europea multivariable o cualquier valuación americana esta fórmula ya no es aplicable en forma directa.

---

<sup>6</sup>Se puede ver que las ecuaciones de Bellman para este problema de opciones reales y según el enfoque de valuación de las opciones americanas no coincide con la ecuación de Bellman de la opción americana financiera, las razones ya se han discutido en (5.3) y 5.4).

### 6.1.2 Método Binomial

Volviendo a las fórmulas vistas en la subsección (3.2.1) y tomando los parámetros ya mencionados con  $\Delta t = \frac{1}{24}^7$  tendríamos:

$$\begin{cases} d = A - \sqrt{A^2 - 1} = 0.8257 \\ u = A + \sqrt{A^2 - 1} = 1.2111 \\ p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = 0.4609 \end{cases} \quad (6.9)$$

donde:  $A = \frac{1}{2} \left( e^{-r\Delta t} + e^{(r+\sigma^2)\Delta t} \right) = \frac{1}{2} \left( e^{-\frac{0.08}{24}} + e^{\frac{(0.08+0.930354^2)}{24}} \right) = 1.0184$ . Por lo tanto, se mantiene la notación para las valuaciones en los nodos del árbol binomial, derivándose las valuaciones binomiales equivalentes a cada ecuación de Bellman y obteniéndose las siguientes recursiones: Para  $V_e$ ,

$$V e_n^m = 0.9967 \left( 0.4609 V e_{n+1}^{m+1} + 0.5391 V e_n^{m+1} \right), \quad (6.10)$$

para  $V_{am}$ <sup>8</sup>:

$$V am_n^m = 0.9967 \left( 0.4609 V am_{n+1}^{m+1} + 0.5391 V am_n^{m+1} \right), \quad (6.11)$$

si  $n$  es un número impar,

$$V am_n^m = 89187.3 \left( 0.8257^{2n-m} \right) + 0.9967 \left( 0.4609 V am_{n+1}^{m+1} + 0.5391 V am_n^{m+1} \right), \quad (6.12)$$

si  $n$  es un número par, para  $V_A$ ,

$$V A_n^m = \max \{ 0; V am_n^m - 143044 \}, \quad (6.13)$$

para  $V_E$ ,

$$V E_0^0 = \sum_{k=0}^{12} V e_k^{2k}, \quad (6.14)$$

<sup>7</sup>Para una mejor precisión que simplemente hacer que la discretización coincida con los intervalos que separan los puntos de decisión.

<sup>8</sup>Del mismo modo que las ecuaciones de Bellman originales, se formulan recursiones binomiales que dependen de la paridad en la valuación de  $V_{am}$ , de modo a adaptar el problema original a una discretización más fina.

donde

$$Ve_n^{24} = \max \{0; 89187.3(0.8257^{2n-24}) - 11000\} \quad (6.15)$$

y

$$Vam_n^{24} = 89187.3(0.8257^{2n-24}). \quad (6.16)$$

### 6.1.3 Método Monte Carlo

Empleando el método Euler-Maruyama con una discretización fija del tiempo  $\Delta t = \frac{1}{1728}^9$  para la ecuación (6.1), iniciando con  $S_0^{em} = 89187.3$  tendríamos:

$$S_{a+1}^{em} = S_a^{em} + S_a^{em} \left( \frac{0.08}{1728} \right) + 0.930354.S_a^{em} \Delta W_a, \quad (6.17)$$

donde  $a$  es el número de paso actual. Por lo tanto, sean  $\widetilde{V}_E$ ,  $\widetilde{V}_A$ ,  $\widetilde{V}_e$  y  $\widetilde{V}_{am}$  las aproximaciones de las funciones de valuación europea, americana y las dos funciones de valuación auxiliares. A partir de las ecuaciones de Bellman tendríamos las siguientes expresiones:

$$\widetilde{V}_e \left( S_{em}^a, \frac{a}{1728} \right) = e^{-\frac{0.08a}{1728}} \mathbb{E} \left[ \max \{0, S_{em}^{1728} - 11000\} \right], \quad (6.18)$$

$$\widetilde{V}_{am} \left( S_a^{em}, \frac{a}{1728} \right) = \max \left\{ 0, S_a^{em} + e^{-\frac{0.08}{12}} \mathbb{E} \left[ \widetilde{V}_{am} \left( S_{a+144}^{em}, \frac{(a+144)}{1728} \right) / S_a^{em} \right] \right\}, \quad (6.19)$$

si  $a = 144k$ , para algun  $k$  entero,

$$\widetilde{V}_A(S_0^{em}, 0) = \max \{0, \widetilde{V}_{am}(S_0^{em}, 0) - K_A\}, \quad (6.20)$$

$$\widetilde{V}_E(S_0^{em}, 0) = \sum_{k=0}^{12} \widetilde{V}_e \left( S_0^{em}, \frac{k}{12} \right), \quad (6.21)$$

donde

$$\widetilde{V}_{am}(S_{1728}^{em}, 1) = \max \{0, S_{1728}^{em}\} = S_{1728}^{em}. \quad (6.22)$$

La expresión para obtener  $\widetilde{V}_e$  no es más que la estimación de una opción

---

<sup>9</sup>Una ventaja de la simulación Monte Carlo es que resulta relativamente sencillo emplear discretizaciones finas.

européa convencional para  $T = 1$ , valor que se obtiene con el método Monte Carlo simple al tomar  $v_\omega = e^{-0,08} \max \{0, S_{1728}^{em}(\omega) - 11000\}$  para cada realización  $\omega$  y aplicar la fórmula (3.32). Posteriormente se repite el procedimiento para  $T \in \left\{0, \frac{1}{12}, \dots, \frac{11}{12}\right\}$  de modo a obtener  $\widetilde{V}_e$  para cada punto de decisión y realizar la sumatoria final que calcula finalmente  $\widetilde{V}_E$ . Para el cálculo de  $\widetilde{V}_{am}$  se implementa el LSM<sup>10</sup>, al hacer la regresión que estima las esperanzas condicionales:

$$\mathbb{E} \left[ \widetilde{V}_{am} \left( S_{a+144}^{em}, \frac{(a+144)}{1728} \right) / S_a^{em} \right]$$

con el conjunto de puntos:

$$\left\{ \left( S_a^{em}(\omega), \widetilde{V}_{am} \left( S_{a+144}^{em}(\omega), \frac{(a+144)}{1728} \right) \right) \right\}$$

para cada  $\omega$  y por medio de la familia de funciones  $\{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5\}$ . Finalmente el valor de  $\widetilde{V}_A$  se obtiene para los parámetros deseados por medio de (6.20).

### 6.1.4 Path Integration

La propuesta emplea la misma recurrencia discretizada del Método Monte Carlo (6.17), sin embargo, se modifica el esquema numérico original añadiendo una hipótesis reflexiva [BM] para el proceso estocástico discretizado por Euler-Maruyama, es decir la recurrencia siguiente:

$$S_{a+1}^{em} = \left| S_a^{em} + S_a^{em} \left( \frac{0.08}{1728} \right) + 0.930354 \cdot S_a^{em} \Delta W_a \right|, \quad (6.23)$$

Esta consideración nos permite forzar la propiedad deseada que  $S_a$  nunca tenga valores negativos, detalle que nos obliga a modificar la función de densidad original que obtendríamos por medio del esquema original. La Figura (6.1) nos muestra la intuición de la idea, que sería similar a que un camino rebote en caso de tocar la recta  $S = 0$ .

En este contexto, deberemos calcular la integral (4.3) en suficientes puntos  $P_i$ , para aproximar los valores de la opción como funciones de  $S_n$  y en cada instante fijo, por lo que deberemos seleccionar un conjunto de puntos lo suficientemente grande y con un espaciado adecuado con el objetivo de abarcar un rango amplio de posibles valores. Con esto se pretende estimar la función de valuación con un grado aceptable de precisión en cada iteración. Para esta implementación se han seleccionado 54 puntos  $P_j$  tal que  $P_j = 1.5^j$  y  $P_0 = 0$ . Esta cantidad específica

---

<sup>10</sup>Ver sección (3.3.3).

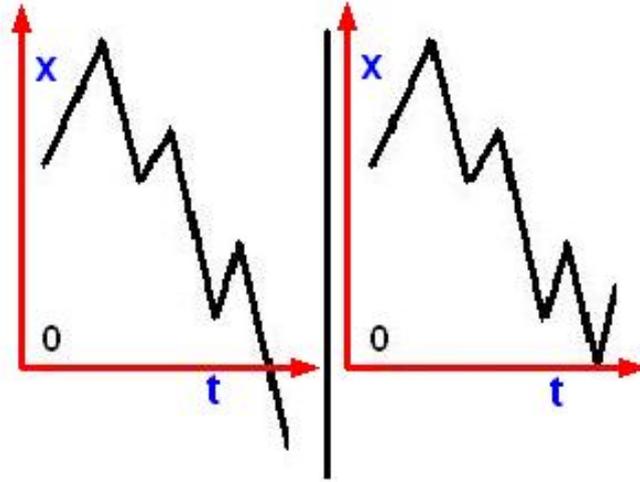


Figura 6.1: Ejemplo gráfico de reflexividad: A la derecha un camino reflexivo y a la izquierda uno no-reflexivo

de puntos fue considerada para obtener un resultado razonable entre precisión y esfuerzo computacional.

La ecuación (6.17) implica que si  $S_a^{em} = P_j$  entonces  $S_{a+1}^{em}$  ha de tener una distribución normal con una media  $P_j + P_j \left(\frac{0.08}{24}\right)$  y una desviación estándar  $0.930354\sqrt{\frac{1}{24}}P_j$ . De este modo el nuevo proceso discreto  $S_{a+1}$  modificado según la hipótesis reflexiva, evolucionaría según la siguiente función de densidad:

$$J_i(x) = \frac{1_{(\mathbb{R}^+ \cap \{0\})}(x) (A_1(x) + A_2(x))}{\left(0.930354P_i\sqrt{\frac{\pi}{12}}\right)}, \quad (6.24)$$

donde:

$$A_1(x) = e^{-\frac{(x - P_i - P_i\left(\frac{0.08}{24}\right))^2}{2\left(0.930354P_i\sqrt{\frac{1}{24}}\right)^2}} \quad (6.25)$$

y

$$A_2(x) = e^{-\frac{(-x - P_i - P_i\left(\frac{0.08}{24}\right))^2}{2\left(0.930354P_i\sqrt{\frac{1}{24}}\right)^2}}. \quad (6.26)$$

$1_A(x)$  es la función característica en relación al conjunto  $A^{11}$ . Entonces, para cada  $P_i$  y la correspondiente región  $\Omega_i$ , se cumplirá lo siguiente:

$$\Omega_i = [L_I, L_S] \quad (6.27)$$

<sup>11</sup>Ver definición en el anexo A 8.

donde:

$$L_I = P_i + P_i \left( \frac{0.08}{24} \right) - 5 \left( 0.930354 P_i \sqrt{\frac{1}{24}} \right) \quad (6.28)$$

y

$$L_S = P_i + P_i \left( \frac{0.08}{24} \right) + 5 \left( 0.930354 P_i \sqrt{\frac{1}{24}} \right). \quad (6.29)$$

Además, se estiman las esperanzas condicionales en cada punto de  $\{P_i\}$  empleando las siguiente integrales que aproximan las esperanzas condicionales para las funciones de valuación europea y americana respectivamente:

$$\tilde{G}_e(P_i, a) = \int_{\Omega_i} J_i(x) \tilde{V}_e(x, t_{a+1}) .dx, \quad (6.30)$$

$$\tilde{G}_{am}(P_i, a) = \int_{\Omega_i} J_i(x) \tilde{V}_{am}(x, t_{a+1}) .dx. \quad (6.31)$$

donde  $\tilde{V}_E$ ,  $\tilde{V}_A$ ,  $\tilde{V}_e$ ,  $\tilde{V}_{am}$  son las funciones con las cuales se aproximan las funciones de valuación anteriormente mencionadas. Estas aproximaciones surgen al hacer uso de las ecuaciones (6.30) y (6.31) en las respectivas ecuaciones de Bellman:

$$\tilde{V}_e(P_i, t_a) = \max \left\{ 0, e^{-r\Delta t} \tilde{G}_e(P_i, a) \right\}, \quad (6.32)$$

$$\tilde{V}_{am}(P_i, t_a) = \max \left\{ 0, P_i + e^{-r\Delta t} \tilde{G}_{am}(P_i, a) \right\}, \quad (6.33)$$

si  $a$  es un número par,

$$\tilde{V}_{am}(P_i, t_a) = \max \left\{ 0, e^{-r\Delta t} \tilde{G}_{am}(P_i, a) \right\}, \quad (6.34)$$

si  $a$  es un número impar,

$$\tilde{V}_E(P_i, t_a) = \sum_{k=0}^{\frac{a}{2}} \tilde{V}_e(P_i, t_{2k}) \quad (6.35)$$

y

$$\tilde{V}_A(P_i, t_a) = \max \left\{ 0, V_{am}(P_i, t_a) - K_A \right\}. \quad (6.36)$$

Al comienzo las ecuaciones (6.30) y (6.31) son calculadas empleando la condición (6.22). Estas integrales son calculadas numéricamente por medio de la regla de Simpson [J.F07], la idea es estimar la función de valuación de atrás para adelante

en el tiempo<sup>12</sup> al usar estimaciones interpoladas de  $V_e(x, t_a)$  y  $V_{am}(x, t_a)$  para  $n < 24$ .

Sea la función característica  $1_A$  en relación a  $A$ <sup>13</sup> y la siguiente familia de intervalos:  $C_j = [P_j, P_{j+1})$  para  $0 < j < 53$  y  $C_{54} = [P_{54}, \infty)$ . Para este caso se implementará la aproximación local de la función de valuación<sup>14</sup>, en cada dominio  $C_j$  por medio de la función obtenida al interpolar los siguientes puntos:

$$\left\{ \left( P_{j-1}, \tilde{V}(P_{j-1}, t_a) \right), \left( P_j, \tilde{V}(P_j, t_a) \right), \left( P_{j+1}, \tilde{V}(P_{j+1}, t_a) \right), \left( P_{j+2}, \tilde{V}(P_{j+2}, t_a) \right) \right\}$$

donde  $B_j = C_{j-1} \cup C_j \cup C_{j+1}$ , usando las siguientes funciones  $\{1_{B_j}, x \cdot 1_{B_j}, x^2 \cdot 1_{B_j}, x^3 \cdot 1_{B_j}\}$ . En el caso de los extremos, similarmente para  $C_0$  la estimación de la función de valuación es obtenida interpolando:

$$\left\{ \left( P_0, \tilde{V}(P_0, t_a) \right), \left( P_1, \tilde{V}(P_1, t_a) \right), \left( P_2, \tilde{V}(P_2, t_a) \right), \left( P_3, \tilde{V}(P_3, t_a) \right) \right\}$$

por medio de las funciones  $\{1_{B_1}, x \cdot 1_{B_1}, x^2 \cdot 1_{B_1}, x^3 \cdot 1_{B_1}\}$ , y finalmente para  $C_{53}$  y  $C_{54}$  la estimación se efectúa interpolando los puntos:

$$\left\{ \left( P_{51}, \tilde{V}(P_{51}, t_a) \right), \left( P_{52}, \tilde{V}(P_{52}, t_a) \right), \left( P_{53}, \tilde{V}(P_{53}, t_a) \right), \left( P_{54}, \tilde{V}(P_{54}, t_a) \right) \right\}$$

con las funciones  $\{1_{B_{52}}, x \cdot 1_{B_{52}}, x^2 \cdot 1_{B_{52}}, x^3 \cdot 1_{B_{52}}\}$ .

## 6.2 Implementación para dos variables

En esta ocasión se analiza el caso de estudios de dos variables reportado en [NHB02]. Para este problema consideraremos que todas las anteriores variables del problema mantienen los mismos parámetros, salvo que  $S_t^2$  es una variable estocástica cuya volatilidad es  $\sigma_2 = 0.059634$  y tal que la correlación entre las variables  $S_t^1$  y  $S_t^2$  es  $\rho = 0.111344$ .

Entonces sean  $W^1$  y  $W^2$  dos procesos independientes de Wiener, bajo la hipótesis que ambas variables estocásticas son movimientos geométricos brow-

---

<sup>12</sup>*Bakward.*

<sup>13</sup>Ver definición en el anexo A 8.

<sup>14</sup>Ver (4.1).

nianos<sup>15</sup> entonces  $\mu = r = 0.08$  para poder hacer uso de la medida Martingala<sup>16</sup>, donde las ecuaciones que modelan  $S_t^1$  y  $S_t^2$  son respectivamente:

$$dS^1 = 0.08S^1 dt + 0.930354S^1 dW^1 \quad (6.37)$$

y

$$dS^2 = 0.08S^2 dt + 0.059634S^2 \left( \rho dW^1 + \sqrt{1 - \rho^2} dW^2 \right). \quad (6.38)$$

Observamos que la expresión  $(\rho W^1 + \sqrt{1 - \rho^2} W^2)$  cuya diferencial aparece en la segunda ecuación, es equivalente a un tercer proceso de Wiener que posee una correlación  $\rho = 0.111344$  con  $W^1$  y que a su vez hace que  $S_t^1$  y  $S_t^2$  tengan la correlación deseada [J.05].

## 6.2.1 Método Pentanomial

Volviendo a las fórmulas vistas en la subsección (3.2.2) y tomando los parámetros ya mencionados con  $\Delta t = \frac{1}{24}$ ,  $\lambda = 1.2$  tendríamos:

$$u_1 = e^{\lambda\sigma_1\sqrt{\Delta t}} = 1.2559$$

$$d_1 = \frac{1}{u_1} = 0.7962$$

$$u_2 = e^{\lambda\sigma_2\sqrt{\Delta t}} = 1.0147$$

$$d_2 = \frac{1}{u_2} = 0.9855$$

$$\mu_1 = r - \frac{\sigma_1^2}{2} = -0.3528$$

$$\mu_2 = r - \frac{\sigma_2^2}{2} = 0.0782$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{\lambda^2} + \frac{\sqrt{\Delta t}}{\lambda} \left( \frac{\mu_1}{\sigma_1} + \frac{\mu_2}{\sigma_2} \right) + \frac{\rho}{\lambda^2} \right] = 0.2326 \\ p_2 = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{\lambda^2} + \frac{\sqrt{\Delta t}}{\lambda} \left( \frac{\mu_1}{\sigma_1} - \frac{\mu_2}{\sigma_2} \right) - \frac{\rho}{\lambda^2} \right] = 0.0824 \\ p_3 = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{\lambda^2} + \frac{\sqrt{\Delta t}}{\lambda} \left( -\frac{\mu_1}{\sigma_1} - \frac{\mu_2}{\sigma_2} \right) + \frac{\rho}{\lambda^2} \right] = 0.1533 \\ p_4 = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{\lambda^2} + \frac{\sqrt{\Delta t}}{\lambda} \left( -\frac{\mu_1}{\sigma_1} + \frac{\mu_2}{\sigma_2} \right) - \frac{\rho}{\lambda^2} \right] = 0.2262 \\ p_5 = 1 - \frac{1}{\lambda^2} = 0.3056 \end{array} \right.$$

Por lo tanto, manteniendo la notación para los nodos del árbol pentanomial, las ecuaciones de Bellman se convierten en las siguientes recursiones:

$$Ve_{n,p}^m = e^{-\frac{0.08}{24}} C_{n,p}^m, \quad (6.39)$$

$$Vam_{n,p}^m = e^{-\frac{0.08}{24}} C_{n,p}^m, \quad (6.40)$$

<sup>15</sup>Ver ecuación (6.1).

<sup>16</sup>2.3

si  $m$  es un número impar,

$$Vam_{n,p}^m = u_1^{n-p} u_2^{n+p} S_{0,0}^0 + e^{-\frac{0,08}{24}} C_{n,p}^m, \quad (6.41)$$

si  $m$  es un número par,

$$VA_{0,0}^0 = \max \{0, Vam_{0,0}^0 - K_A\}, \quad (6.42)$$

$$VE_{0,0}^0 = \sum_{k=0}^{12} Ve_{0,0}^{2k}, \quad (6.43)$$

donde,

$$C_{n,p}^m = \left( p_1 Ve_{n+1,p+1}^m + p_2 Ve_{n+1,p-1}^m + p_3 Ve_{n-1,p-1}^m + p_4 Ve_{n-1,p+1}^m + p_5 Ve_{n,p}^m \right), \quad (6.44)$$

$$Ve_{n,p}^{24} = \max \{0, u_1^{n-p} u_2^{n+p} S_{0,0}^0 - 11000\} \quad (6.45)$$

con  $|n| + |p| \leq 24$  y

$$Vam_{n,p}^{24} = u_1^{n-p} u_2^{n+p} S_{0,0}^0, \quad (6.46)$$

con  $|n| + |p| \leq 24$ .

## 6.2.2 Método Monte Carlo

Empleando el método Euler-Maruyama en [D.J01] con  $\Delta t = \frac{1}{1728}$ , tenemos que:

$$S_{a+1}^1 = S_a^1 + \frac{0.08}{1728} S_a^1 + 0.930354 S_a^1 \Delta W_a^1, \quad (6.47)$$

$$S_{a+1}^2 = S_a^2 + \frac{0.08}{1728} S_a^2 + 0.059634 S_a^2 \left( \rho \Delta W_a^1 + \sqrt{1 - \rho^2} \Delta W_a^2 \right) \quad (6.48)$$

Entonces se aplica el método Monte Carlo con las mismas recursiones y condiciones finales que el de una variable (6.1.3) con la única diferencia que los caminos estocásticos se construyen de esta manera:  $S_a^{em} = (0.018) S_a^1 S_a^2$ .

## 6.2.3 Path Integration

Sea el mismo proceso discreto  $S_a^{em} = (0.018) S_a^1 S_a^2$  visto en las expresiones (6.37) y (6.38), donde se pudo observar que  $S_a^1$  y  $S_a^2$  fueron obtenidos por medio del

método Euler-Maruyama. Sean además  $\widehat{S}_a^1$  y  $\widehat{S}_a^2$  las mismas variables, pero según la hipótesis reflexiva; entonces, definimos la variable subyacente final  $S_a = (0.018) \widehat{S}_a^1 \widehat{S}_a^1$ . A esta nueva variable se le aplican las mismas ecuaciones de Bellman y las mismas condiciones de la función de valuación en el tiempo de expiración  $T = 1$  que en el caso univariable.

Sean los siguientes conjuntos  $\{M_i\}$  y  $\{N_i\}$ , tal que  $M_i = (1.5)^{i-1}$  para  $0 < i < 55$ ,  $M_0 = 0$  y  $N_i = i$  para  $i < 19$ . Entonces para este caso bidimensional debemos considerar un conjunto de puntos fijos  $\{P_{ij}\} = \{M_i\} \times \{N_j\}$  en el plano para los cuales se estiman las esperanzas condicionales y funciones de valuación. Definiendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu' = M_i + \frac{(0.08)}{24} M_i \\ \sigma' = \frac{(0.930354) M_i}{\sqrt{24}} \\ L_{ij} = (0.059634) (0.111344) N_j \left( \frac{y - M_i - \frac{(0.08)}{24} M_i}{(0.930354) M_i} \right) \\ \mu'' = N_j + \frac{(0.08)}{24} N_j + L_{ij} \\ \sigma'' = \frac{(0.059634) \sqrt{1 - (0.111344)^2} N_j}{\sqrt{24}} \\ H(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma'\sigma''} \left( e^{-\frac{(x-\mu')^2}{2(\sigma')^2}} e^{-\frac{(y-L_{ij}-\mu'')^2}{2(\sigma'')^2}} \right) \end{array} \right. \quad (6.49)$$

Para cada  $P_{ij} = (M_i, N_j)$  tenemos la correspondiente función de densidad de  $S_{a+1}$  si  $S_a = (0.018) M_i N_j$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{ij}(x, y) = 1_{(\mathbb{R}^+ \cap \{0\}) \times (\mathbb{R}^+ \cap \{0\})}(x, y) H(x, y) \dots \\ + 1_{(\mathbb{R}^+ \cap \{0\}) \times (\mathbb{R}^+ \cap \{0\})}(x, y) H(-x, y) \dots \\ + 1_{(\mathbb{R}^+ \cap \{0\}) \times (\mathbb{R}^+ \cap \{0\})}(x, y) H(x, -y) \dots \\ + 1_{(\mathbb{R}^+ \cap \{0\}) \times (\mathbb{R}^+ \cap \{0\})}(x, y) H(-x, -y) \end{array} \right. \quad (6.50)$$

### Observaciones.

Notesé que  $H(x, y)$  es la función de densidad de  $S_{a+1}^e$  si  $S_a^e = (0.018) M_i N_j$ , mientras que  $J_{ij}(x, y)$  es finalmente la función de densidad conjunta deseada que cumple la hipótesis reflexiva y que se deduce a partir de la función de densidad conjunta de 6.47 y 6.48.<sup>17</sup>

Por lo tanto tenemos las siguientes integrales que han de ser reemplazadas en

<sup>17</sup>Arreglo que evita que  $S_a$  llegue a tomar valores negativos como en el caso univariable.

las ecuaciones de Bellman<sup>18</sup>:

$$\tilde{G}_e(P_{ij}, a) = \int_{\Omega_{ij}} J_{ij}(x, y) V_e((0.018)xy, t_{a+1}) .dx .dy, \quad (6.51)$$

$$\tilde{G}_{am}(P_{ij}, a) = \int_{\Omega_{ij}} J_{ij}(x, y) V_{am}((0.018)xy, t_{a+1}) .dx .dy, \quad (6.52)$$

donde las regiones de integración para cada punto son determinados de esta manera:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_{ij} = \left[ M_i \left( 1 + \frac{0.08}{24} - \frac{(5)(0.930354)}{\sqrt{24}} \right), M_i \left( 1 + \frac{0.08}{24} + \frac{(5)(0.930354)}{\sqrt{24}} \right) \right] \times \\ \dots \left[ N_j \left( 1 + \frac{0.08}{24} - \frac{(5)(0.059634)}{\sqrt{24}} \right), N_j \left( 1 + \frac{0.08}{24} + \frac{(5)(0.059634)}{\sqrt{24}} \right) \right] \end{array} \right\} \quad (6.53)$$

Para este caso bidimensional los puntos  $P$  en cada partición  $C_{ij} = [M_i, M_{i+1}] \times [N_j, N_{j+1}]$  son interpolados por la correspondiente familia de funciones en dicha partición  $\{1_{C_{ij}}, x.1_{C_{ij}}, y.1_{C_{ij}}, xy.1_{C_{ij}}\}$ . Otra forma interesante de realizar dicha interpolación es implementando una partición del dominio en triángulos de Delaunay [HJ99] al usar los puntos de  $\{P_{ij}\}$  como vértices y emplear las mismas funciones sombrero de soporte compacto que son empleadas en el método de elementos finitos [HJ99].

---

<sup>18</sup>Las cuales son las mismas ecuaciones de Bellman y las mismas condiciones finales usadas para el caso univariable (6.1.4).

## Capítulo 7

# RESULTADOS NUMÉRICOS.

En este capítulo se discuten aspectos computacionales de la propuesta y su desempeño para los casos de una y dos variables. Además, las evaluaciones son realizadas por medio de comparaciones entre los resultados numéricos obtenidos por los algoritmos tradicionales como los *Lattice Methods* y la simulación Monte Carlo. Los problemas de valuación europeo y americano son los mismos casos proveídos por el artículo [NHB02] sobre valuación de controles de calidad.

Haciendo un análisis de posibles fuentes de error en el algoritmo, se pueden observar tres tipos distintos de error: el primero es la discretización del tiempo, el cual puede ser minimizado reduciendo el valor de los intervalos de tiempo  $\Delta t$ . Este tipo de error se encuentra en casi todo algoritmo con excepción de aquellos que plantean la cuestión del tiempo de forma analítica como la fórmula Black-Scholes. El otro tipo de error es inherente a la propuesta misma, que es aproximar el valor de la función de valuación por medio de interpolaciones o regresiones en puntos fijos  $\{P_i\}$ , este error de aproximación puede ser reducido tomando una mayor cantidad de puntos de modo a aproximar mejor la curva deseada.

Finalmente, está el error en la computación numérica de la integral que estima las esperanzas condicionales. Siendo que en esta implementación la variable discretizada sigue una distribución normal, entonces es razonable integrar alrededor del valor de la media de la variable aleatoria. Por lo tanto, la distancia de los límites del dominio de integración a la media es una variable que afecta a la precisión. En el caso de las implementaciones numéricas de esta tesis se emplearon límites de integración que estaban a una distancia de cinco desviaciones estándar de la media. Un análisis de la complejidad computacional de esta implementación arroja las siguientes variables de entrada:

- $m = \frac{T}{\Delta t}$  (Donde  $T$  es el vencimiento de la opción)
- $n$  = Número de puntos  $P_i$  que son empleados para la interpolación o re-

gresión.

- $p$  = El numero de puntos evaluados para la integración numérica.

Si se consideran los ciclos anidados en el pseudo-código (1), entonces el análisis arroja el siguiente orden de complejidad para una opción cuya función de valuación es única<sup>1</sup>:  $O(m.n.p)$

## 7.1 Comparación de resultados numéricos

Las siguientes tablas comparan los algoritmos descritos en el capítulo 3, para el caso de estudio del capítulo anterior y en función de distintos rangos de tiempo que van de seis meses a tres años.

Para los problemas de valuación de una variable se compara el porcentaje de error absoluto para los cálculos obtenidos con el método Binomial, simulación Monte Carlo y la propuesta de esta tesis: Path Integration Method (PIM). Este tipo de error es calculado de la siguiente manera:

$$e = \frac{100 |A - E|}{E} \quad (7.1)$$

en donde  $A$  es el valor aproximado dado por los métodos numéricos y  $E$  es el valor exacto. Las tablas (7.1), (7.2) y (7.3) analizan el problema de valuación europea de una variable, la tabla (7.1) presenta los valores exactos obtenidos por medio de la fórmula Black-Scholes, la tabla (7.2) compara el error y la tabla (7.3) compara la duración de cada algoritmo. En la valuación Monte Carlo se empleo una simulación con 60000 realizaciones y una discretización  $\Delta t = \frac{1}{1728}$ . La propuesta y el método binomial emplean la misma discretización  $\Delta t = \frac{1}{12}$ .

Tabla 7.1: Valores exactos de las opciones europeas de una variable, por medio de la fórmula Black-Scholes.

	0.5 años	1 años	1.5 años	2 años	2.5 años	3 años
Black-Scholes	548833	1022240	1499027	1979683	2464361	2952997

Las tablas (7.4), (7.5) y (7.6) analizan el problema de valuación americana de una variable, la tabla (7.4) presenta valores casi exactos obtenidos por medio del *overkilling*<sup>2</sup> del método binomial con  $\Delta t = \frac{1}{100}$ , la tabla (7.5) compara el error

<sup>1</sup>Donde se asume además que se emplea un algoritmo de integración numérica cuya complejidad es lineal en relación a  $p$ .

<sup>2</sup>Consiste en llevar a un método numérico a sus límites, de modo a obtener valores casi exactos de referencia. Esto es necesario debido a que no se dispone de una fórmula exacta para esta valuación americana.

Tabla 7.2: Comparación de errores absolutos para la valuación europea de una variable.

	0.5 años	1 años	1.5 años	2 años	2.5 años	3 años
PIM	0.0098	0.0311	0.0560	0.0777	0.0947	0.1064
Binomial	0.0007	0.0085	0.0136	0.0155	0.0159	0.0155
MC	0.1970	0.1804	0.4604	0.7582	0.0057	0.9024

Tabla 7.3: Comparación de tiempos de cómputo para la valuación europea de una variable.

	0.5 años	1 años	1.5 años	2 años	2.5 años	3 años
PIM	0.7600	1.7980	3.3462	5.3742	7.7691	10.8831
Binomial	0.0005	0.0010	0.0017	0.0032	0.0043	0.0063
MC	2.2435	4.2014	6.2458	8.3590	10.6537	12.5599

y la tabla (7.6) compara la duración de cada algoritmo. En la valuación Monte Carlo (LSM) se emplearon simulaciones de 100 realizaciones, que se repetían hasta obtener un resultado final de 1% de error relativo[G.03] con un 95% de confianza y una discretización  $\Delta t = \frac{1}{1728}$ . La propuesta y el método binomial emplean la misma discretización  $\Delta t = \frac{1}{24}$ .

Tabla 7.4: Valores casi exactos de las opciones americanas de una variable, por medio del overkill del método binomial.

	0.5 años	1 años	1.5 años	2 años	2.5 años	3 años
Over-killing	481267	1016391	1551515	2086638	2621762	3156886

Las tablas (7.7) y (7.8) analizan el problema de valuación europea de dos variables, la tabla (7.7) compara las valuaciones y la tabla (7.8) compara la duración de cada algoritmo. En la valuación Monte Carlo se emplearon simulaciones de 100 realizaciones, repetidas para alcanzar un 1% de error relativo con un 95% de confianza y una discretización  $\Delta t = \frac{1}{1728}$ . La propuesta y el método binomial emplean la misma discretización  $\Delta t = \frac{1}{12}$ .

Las tablas (7.9) y (7.10) analizan el problema de valuación americana de dos variables, la tabla (7.9) compara las valuaciones y la tabla (7.10) compara la duración de cada algoritmo. En la valuación Monte Carlo (LSM) se emplearon simulaciones de 50 realizaciones, repetidas para alcanzar un 1% de error relativo con un 95% de confianza y una discretización  $\Delta t = \frac{1}{1728}$ . La propuesta y el método binomial emplean la misma discretización  $\Delta t = \frac{1}{12}$ .

En estas tablas se puede observar una similitud entre los resultados arrojados por la implementación del PIM y los demás algoritmos cuya validez ya ha sido estudiada. Por lo tanto, la efectividad de la propuesta es observada experimen-

Tabla 7.5: Comparación de errores absolutos para la valuación americana de una variable.

	0.5 años	1 años	1.5 años	2 años	2.5 años	3 años
PIM	0.0048	0.0084	0.0121	0.0159	0.0194	0.0236
Binomial	$\frac{0.0012}{10^{10}}$	$\frac{0.0057}{10^{10}}$	$\frac{0.1405}{10^{10}}$	$\frac{0.1892}{10^{10}}$	$\frac{0.1032}{10^{10}}$	$\frac{0.2705}{10^{10}}$
LSM	0.1814	0.3660	0.2151	1.1600	0.2825	0.1114

Tabla 7.6: Comparación de tiempos para la valuación americana de una variable.

	0.5 años	1 años	1.5 años	2 años	2.5 años	3 años
PIM	1.8721	5.0148	9.7565	15.8717	23.6049	32.7805
Binomial	0.0002	0.0003	0.0006	0.0010	0.0015	0.0021
MC	2.4579	6.8740	16.2938	39.4460	74.2814	123.7513

talmente para problemas de opciones reales de una y dos dimensiones<sup>3</sup>. Además, para el caso de las valuaciones de una variable se puede observar un evidente mejor desempeño de la propuesta frente al enfoque Monte Carlo, al dar mejores resultados en menos tiempo.

---

<sup>3</sup>Los problemas que implican mayor cantidad de dimensiones podrían arrojar resultados menos satisfactorios debido a la maldición de la dimensionalidad [R.E03].

Tabla 7.7: Comparación de resultados para la valuación europea de dos variables.

	0.5 años	1 años	1.5 años	2 años	2.5 años	3 años
PIM	562724	1076023	1620430	2197075	2806643	3449744
Pentanomial	562601	1074054	1614144	2184397	2786101	3420416
MC	561078	1075997	1624369	2184159	2786147	3425264

Tabla 7.8: Comparación de tiempos para la valuación europea de dos variables.

	0.5 años	1 años	1.5 años	2 años	2.5 años	3 años
PIM	5.4387	14.2018	31.6447	54.3607	83.9196	140.3083
Pentanomial	0.0014	0.0095	0.0377	0.1072	0.1726	0.2354
MC	0.9383	4.3679	12.6151	26.4696	49.4256	75.0726

Tabla 7.9: Comparación de resultados para la valuación americana de dos variables.

	0.5 años	1 años	1.5 años	2 años	2.5 años	3 años
PIM	494855	1067594	1665413	2289410	2940731	3620574
Pentanomial	495039	1068299	1667004	2292283	2945317	3627337
LSM	495083	1070439	1661407	2270419	2923529	3580084

Tabla 7.10: Comparación de tiempos para la valuación americana de dos variables.

	0.5 años	1 años	1.5 años	2 años	2.5 años	3 años
PIM	4.7036	11.8743	26.5217	46.0178	71.3046	114.7276
Pentanomial	0.0009	0.0035	0.0111	0.0263	0.0505	0.1184
LSM	7.6787	28.8681	65.3780	135.9327	325.8369	555.2581

## Capítulo 8

# CONCLUSIÓN.

Esta tesis propone un método alternativo de valuación de opciones reales, basado en el enfoque de aproximar la dinámica estocástica de las variables subyacentes por medio de un proceso estocástico de estados continuos. Como evidencia experimental para ilustrar la eficacia de la propuesta, se eligió analizar los resultados de una implementación para un problema de opciones reales, cuya formulación surge al valorar controles de calidad. Los resultados experimentales para modelos basados en el movimiento geométrico browniano fueron satisfactorios, por lo que se conjetura un buen desempeño en otras posibles dinámicas estocásticas que rijan las variables subyacentes. Esta propuesta se muestra prometedora para aplicarse en problemas para los cuales los algoritmos tradicionales no sean aplicables o en aquellos donde el desempeño sea muy pobre, debido a la complejidad del modelado de las variables. En ese sentido, se demostró que existen casos donde la propuesta es más eficiente que el enfoque Monte Carlo, que es el enfoque por excelencia para valuación de problemas poco tradicionales. Siendo que la propuesta se presenta como una alternativa práctica donde se precise versatilidad, para tratar muchas dinámicas estocásticas y al mismo tiempo se quiera evitar el error estocástico que surge al aplicar el enfoque más versátil de los métodos Monte Carlo.

Trabajos futuros podrían extender esta propuesta a dinámicas más exóticas que envuelvan procesos de Levy, implementaciones para casos de estudio más complejos, implementaciones con puntos de integración variables en el tiempo, formulaciones generales para obtener las funciones de densidad requeridas, pruebas formales de convergencia o inclusive un perfeccionamiento del algoritmo, ya sea en la elección de los puntos de integración, como para computar más eficientemente las integrales e interpolaciones que lo componen.

# REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [ACA11] González Salazar J. Andalaft-Chacur A., Montaz A.M. Real options pricing by the finite element method. *Computers and Mathematics with Applications*, 2011.
- [BG11] Garcés F Rehtanz C. Blanco G., Olsina F. Real option valuation of facts investments based on the least square monte carlo method. *IEEE TRANSACTIONS ON POWER SYSTEMS*, 2011.
- [Bla77] Scholes Black, Fischer. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 1977.
- [BM] Diop. A. Bossy M. <http://hal.inria.fr/inria-00070607/>. Accedido el 26/11/2011.
- [BO] Michael L. Bjursten O., Kottenauer M. Valuing investments using real option theory. Bachelor Thesis, Stockholm University, School of Business, 1999.
- [BRL10] Faires J. D. Burden R. L. *Numerical Analysis*. Cengage Learning, 2010.
- [C.09] Lemieux C. *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Sampling*. Springer, 2009.
- [CJ79] Rubinstein M. Cox J.C., Ross S.A. Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Economics*, 1979.
- [CT03] Antikarov V. Copeland T.E. *Real options: a practitioner's guide*. Texere, 2003.
- [DA94] Pindyck R.S. Dixit A.K. *Investment under uncertainty*. Princeton University Press, 1994.
- [D.C00] Montgomery D.C. *Introduction to Statistical Quality Control*. John Wiley and Sons, 2000.
- [DG08] Björck Å. Dahlquist G. *Numerical methods in scientific computing*. SIAM, 2008.

- [DJ99] Simonato J.G. Duan J.C. American option pricing under garch by a markov chain approximation. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 1999.
- [D.J01] Higham D.J. An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations. *SIAM Review*, 2001.
- [D.J02] Higham D.J. Nine ways to implement the binomial method for option valuation in matlab. *SIAM review*, 2002.
- [D.J09] Duffy D.J. Numerical analysis of jump diffusion models: a partial differential equation approach. *Wilmot Magazine*, 2009.
- [E.S77] Schwartz E.S. The valuation of warrants: Implementing a new approach. *Journal of Financial Economics*, 1977.
- [Far10] J. A. Farid. *Risk Frameworks and Applications*. Alchemy Technologies, 2010.
- [G.03] Fisherman G. *Monte Carlo: Concepts, Algorithms, and Applications (Stochastic Modeling)*. Kluwer Academic Publishers, Springer, 2003.
- [G.10] Blanco G. *Evaluación de portafolios de inversiones flexibles en el sistema de transmisión incluyendo dispositivos FACTS*. Tesis Doctoral, Universidad Nacional de San Juan, IEE, 2010.
- [GS11] Schaerer C. Grillo S., Blanco G. Real options using a continuous-state markov process approximation. In *15th Real Option Conference*, 2011.
- [HJ79] Kreps D. Harrison J.M. Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. *Journal of Economic theory*, 1979.
- [HJ99] Pepper D.W. Heinrich J.C. *Intermediate finite element method: fluid flow and heat transfer applications*. Taylor and Francis, 1999.
- [J.05] Hull J. *Options, futures and other derivatives with CD-ROM*. 2005.
- [J.F07] Epperson J.F. *An introduction to numerical methods and analysis*. Wiley-Interscience, 2007.
- [KB91] Ritchken P. Kamrad B. Multinomial approximating models for options with k state variables. *Management Science*, 1991.

- [kB03] Øksendal B.K. *Stochastic differential equations: an introduction with applications*. Springer, 2003.
- [KP92] Platen E. Kloeden P.E. *Numerical solution of stochastic differential equations*. Springer, 1992.
- [L.04] Trigeorgis L. *Real options and investment under uncertainty: classical readings and recent contributions*. MIT Press, 2004.
- [L.07] Schumaker L. L. *Spline functions: basic theory*. Cambridge University Press, 2007.
- [LF01] Schwartz E.S. Longstaff F.A. Valuing american options by simulation: a simple least-squares approach. *Review of Financial Studies*, 2001.
- [LR01] Sterken E. Lensink R., Bo H. *Investment, capital market imperfections, and uncertainty: theory and empirical results*. Edward Elgar Publishing., 2001.
- [LS06] Chen C.C. Liao S.L. The valuation of european options when asset returns are autocorrelated. *Journal of Futures Markets*, 2006.
- [M.11] Berger M. *Monte Carlo methods*. [http : //www.cs.nyu.edu/courses/fall06/G22.2112 – 001/MonteCarlo.pdf](http://www.cs.nyu.edu/courses/fall06/G22.2112-001/MonteCarlo.pdf), 2011.
- [Mar06] F. V. Martínez. *Riesgos financieros y económicos*. Cengage Learning Editores., 2006.
- [MG02] Moreni N. Montagna G., Nicrosini O. A path integral way to option pricing. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2002.
- [NHB02] Aktan M. Nembhard H. B., Shi L. A real options design for quality control charts. In *Proceedings of the 32nd conference on Winter simulation*, 2002.
- [P.06] Brandimarte P. *Numerical methods in finance and economics: a MATLAB-based introduction*. John Wiley and Sons, 2006.
- [Par] Parra. El costo del dinero: La tasa de descuento. [www.javeriana.edu.co/decisiones/libro\\_nine/capitulo5.pdf](http://www.javeriana.edu.co/decisiones/libro_nine/capitulo5.pdf). Ac-  
cedido el 26/11/2011.

- [P.P77] Boyle P.P. Options: A monte carlo approach. *Journal of Financial Economics*, 1977.
- [P.P88] Boyle P.P. A lattice framework for option pricing with two state variables. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 1988.
- [R.E03] Bellman R.E. *Dynamic Programming*. Courier Dover Publications, 2003.
- [S.C77] Myers S.C. Determinants of corporate borrowing. *Journal of Financial Economics*, 1977.
- [WP95] Deynne J. Wilmott P., Howison S. *The mathematics of financial derivatives: a student introduction*. Cambridge University Press, 1995.

# ANEXO A: Matemáticas preliminares.

## Sigma álgebra.

Sea un conjunto no vacío  $\Omega$ . Una sigma álgebra  $\mathcal{F}$  en el espacio muestral  $\Omega$  es una familia de subconjuntos de  $\Omega$  tal que las siguientes propiedades son satisfechas:

- $\emptyset \in \mathcal{F}$ .
- Si  $X \in \mathcal{F}$  entonces  $X^c \in \mathcal{F}$ .
- Sea una secuencia  $\{X_i\}$  de conjuntos en  $\mathcal{F}$ , entonces  $\cup X_i \in \mathcal{F}$ .

Los elementos del sigma álgebra son denominados eventos.

## Álgebra de Borel

Es la intersección de todos los sigma álgebras donde cada uno contiene a todos los conjuntos abiertos en  $\mathbb{X}$  como elementos y se denota por  $\mathbb{B}(\mathbb{X})$ .

## Medida de probabilidad

Sea una sigma álgebra  $\mathcal{F}$  en  $\Omega$ . Una medida de probabilidad es una función  $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  tal que:

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ .
- Si  $\{X_i\}$  es un conjunto de conjuntos disjuntos de  $\mathcal{F}$  entonces:  $\mathbb{P}(\cup X_i) = \sum \mathbb{P}(X_i)$ .

Además  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  se llama espacio de probabilidad.

## Probabilidad condicional

Sean dos eventos  $X, Y \in \mathcal{F}$  tal que  $\mathbb{P}(Y) \neq 0$  entonces la probabilidad condicional de  $X$  dado  $Y$  es definido como:

$$\mathbb{P}(X/Y) = \frac{\mathbb{P}(X \cap Y)}{\mathbb{P}(Y)}$$

## Casi siempre

Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  decimos que un evento  $E \in \mathcal{F}$  ocurre casi siempre si  $\mathbb{P}(E) = 1$ .

### Función $\mathcal{F}$ -medible

Sea  $\mathcal{F}$  en  $\Omega$ , entonces una función  $\mathcal{F}$ -medible  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es aquella tal que si  $X \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$  entonces  $f^{-1}(X) \in \mathcal{F}$ .

### Variable aleatoria

Sea el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , entonces si  $f$  es una función  $\mathcal{F}$ -medible entonces  $f$  es llamada una variable aleatoria. Si  $f$  puede tomar solo una cantidad contable de posibles valores entonces es una variable aleatoria discreta.

### Sigma álgebra generada

Sea una variable aleatoria  $f$  en  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , la sigma álgebra  $f$ -generada se define como este conjunto:

$$\sigma(f) = \{X \in \mathcal{F} / X = f^{-1}(B), B \in \mathbb{B}(\mathbb{R})\}$$

### Eventos independientes

Sea  $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{F}$ , se dicen eventos independientes si  $\mathbb{P}(\cap X_i) = \prod \mathbb{P}(X_i)$ .

### Variables aleatorias independientes

Las variables aleatorias  $\{f_i\}$  en  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , son independientes si para cualquier conjunto  $\{X_i\}$  tal que  $X_i \in \sigma(f_i)$  eso implica que  $\{X_i\}$  son eventos independientes.

### Proceso estocástico

Sea un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias  $\{f_t : t \in T\}$ , donde el conjunto  $T$  es llamado *tiempo*, el proceso estocástico se llama continuo o discreto si  $T$  es continuo o discreto respectivamente. Para un  $\omega \in \Omega$  específico  $f_t(\omega) : T \rightarrow \mathbb{R}$  se llama un camino de  $\Omega$ .

### Función de densidad

Sea una variable aleatoria  $f$  en  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , una función  $d_f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathbb{B}(\mathbb{R})$ -medible y sea  $X_B \in \mathcal{F}$  un conjunto tal que  $x \in X_B \Leftrightarrow f(x) \in B$ . Si  $\mathbb{P}(X_B) = \int_B d_f(x) dx$  para todo  $B \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$ , entonces  $d_f$  es la función de densidad de  $f$ .

### **Función de densidad conjunta**

Sea un conjunto de  $n$  variables aleatorias  $\{f_i\}$  en  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , una función  $d_{f_1, \dots, f_n} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que para todo  $B \subset \mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$ :  $\mathbb{P}(X_B) = \int_B d_{f_1, \dots, f_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1, \dots, dx_n$ , es llamada función de densidad conjunta de  $\{f_i\}$ .

### **Esperanza**

Sea una variable aleatoria  $f$  en  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , entonces  $\mathbb{E}(f) = \int_{\Omega} f d\mathbb{P}$  se llama esperanza de  $f$ , este concepto generaliza a la media aritmética.

### **Esperanza condicional**

Sean dos variables aleatorias  $f$  y  $g$  en  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , entonces la esperanza condicional  $\mathbb{E}(f/g)$  se define como aquella variable aleatoria tal que:

1.  $\mathbb{E}(f/g)$  es  $\sigma(g)$ -medible.
2. Para todo  $X \in \sigma(g)$  se cumple  $\int_X \mathbb{E}(f/g) d\mathbb{P} = \int_X f d\mathbb{P}$ .

Informalmente el valor de  $\mathbb{E}(f/g)(\omega)$  puede ser interpretado como la esperanza o valor esperado de  $f$  si  $g = g(\omega)$ .

### **Esperanza condicional discreta**

Sean dos variables aleatorias discretas  $f$  y  $g$  en  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , entonces la esperanza condicional dado el evento  $g = y$  se define por  $\mathbb{E}(f/g = y) = \sum x \mathbb{P}(f = x/g = y)$

Informalmente se interpreta como el valor esperado de  $f$  si  $g = y$ .

### **Varianza**

Sea una variable aleatoria  $f$ , entonces  $Var(f) = \mathbb{E}((f - \mathbb{E}(f))^2)$  se llama varianza de  $f$ .

### **Desviación estándar**

La desviación estándar de  $f$  se define como la raíz cuadrada de la varianza de  $f$ .

### **Correlación**

Sean dos variables aleatorias  $f$  y  $g$ , entonces se define la correlación entre  $f$  y  $g$  como:  $corr(f, g) = \frac{\mathbb{E}((f - \mathbb{E}(f))(g - \mathbb{E}(g)))}{\sqrt{Var(f)Var(g)}}$

### Distribución normal

Una variable aleatoria  $f$  se dice que tiene distribución normal si su función de densidad es  $d(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$  donde  $\mu$  y  $\sigma$  son los parámetros de media y desviación estándar respectivamente.

### Proceso de Markov

Sea un proceso estocástico  $\{f_i\}$  en  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , si para todo conjunto  $\{t_i\} \subset T$  tal que  $\dots < t_2 < t_1 < t_0$ , se cumple que:

$$\mathbb{P}(f_{t_0} = x_{t_0} / f_{t_1} = x_{t_1}, f_{t_2} = x_{t_2}, f_{t_3} = x_{t_3}, \dots) = \mathbb{P}(f_{t_0} = x_{t_0} / f_{t_1} = x_{t_1}),$$

entonces  $\{f_i\}$  es un proceso de Markov.

### Proceso de Wiener

Un proceso de Wiener  $W_t$  con  $t \in [0, \infty)$  es un proceso estocástico que se caracteriza por las siguientes propiedades:

1.  $W_0 = 0$ .
2. Un camino  $W_t(\omega)$  es casi siempre continuo en  $[0, \infty)$ .
3. Para  $a_0 < a_1 < a_2 < a_3$ ,  $(W_{a_3} - W_{a_2})$  y  $(W_{a_1} - W_{a_0})$  son variables aleatorias independientes.
4. Para  $a_0 < a_1$  la variable aleatoria  $(W_{a_1} - W_{a_0})$  tiene distribución normal con media 0 y varianza  $(a_1 - a_0)$ .

### $\mathcal{F}_t$ - adaptado

Sea una secuencia de sigma álgebras  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  en  $\Omega$  tal que  $a < b$  implica que  $\mathcal{F}_a \subset \mathcal{F}_b$  y sea un proceso estocástico  $f_t(\omega) : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tal que para todo  $s \in [0, \infty)$  la variable aleatoria  $f_s$  es  $\mathcal{F}_s$ -medible, entonces se dice que  $f_t$  es un proceso estocástico  $\mathcal{F}_t$ - adaptado.

### Función característica

La función característica  $\chi_A : C \rightarrow \{0, 1\}$  de un conjunto  $A \subset C$  se define como aquella donde  $\chi_A(x) = 1$  si  $x \in A$  y  $\chi_A(x) = 0$  si  $x \notin A$ .

## Clase de funciones V

Definimos la misma clase de funciones que aparece en [kB03]. Sea un proceso de Wiener  $W_t$ , una secuencia de sigma álgebras  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  tal que  $\mathcal{F}_s$  esta generado por  $\{W_t\}_{t \in [0, s]}$ ,  $\mathcal{F}$  un sigma álgebra tal que  $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$  para todo  $t$ .  $V(S, T)$  es la clase de procesos estocásticos  $f_t(\omega) : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

1.  $f_t(\omega)$  es  $\mathbb{B}([0, \infty)) \times \mathcal{F}$ -medible.
2.  $f_s(\omega)$  esta  $\mathcal{F}_s$ -adaptado.
3.  $\mathbb{E} \left( \int_S^T f_t(\omega)^2 dt \right) < \infty$ .

## Proceso elemental

Sea una secuencia de variables aleatorias  $\{e_i\}$ , entonces un proceso estocástico  $\phi(t, \omega)$  es elemental si puede ser escrito de la siguiente manera:

$$\phi(t, \omega) = \sum_i e_i(\omega) \chi_{[t_i, t_{i+1})}(t)$$

## Integral de Ito para procesos elementales

Sea el mismo proceso elemental  $\phi(t, \omega)$  y un proceso de Wiener  $W_t(\omega)$  en  $\Omega$  entonces la integral de Ito de  $\phi(t, \omega)$  en desde  $S$  a  $T$  se define como:

$$\int_S^T \phi(t, \omega) dW_t(\omega) = \sum_{i \geq 0} e_i(\omega) (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})(\omega)$$

## Integral de Ito

Sean  $f \in V(S, T)$ , una secuencia  $\{\phi_n\}$  de procesos elementales tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left( \int_S^T (f(t, \omega) - \phi_n(t, \omega))^2 dt \right) = 0$$

entonces la integral de  $f$  desde  $S$  a  $T$  es definida como:

$$\int_S^T f(t, \omega) dW_t(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_S^T \phi_n(t, \omega) dW_t(\omega)$$

## Ecuación diferencial estocástica (EDE)

Sean un conjunto de  $n$  procesos de Wiener  $\{W^i\}$ ,  $m$  procesos estocásticos incógnita  $f_t = (f_t^1, f_t^2, \dots, f_t^m)$  y las funciones  $a : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $b_i : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces la siguiente notación para ecuaciones diferenciales estocásticas

$$df_t^j = a(t, f_t) dt + \sum b_i(t, f_t) dW_t^i$$

en realidad no es nada mas que otra forma de escribir la siguiente ecuación que involucra a la integral de Ito:

$$f_t^j = f_0^j + \int_0^t a(s, f_s) ds + \sum \int_0^t b_i(s, f_s) dW_s^i$$

# ANEXO B: Programación dinámica y ecuaciones de Bellman.

Antes de introducir este método definamos los siguientes conceptos:

**Función objetivo:** Es la función que describe el objetivo a ser optimizado: ya sea maximizándolo o minimizándolo.

**Variable de estados:** Es la información necesaria para conocer las decisiones que afectan a la función objetivo a lo largo del tiempo. Dichas decisiones en función del tiempo y la variable de estado se llaman variables de control.

**Función de política:** Es una regla que determina que valores tomar para las variables de control en función de cada variable de estado en un instante. La política óptima es aquella que consigue los mejores valores para la función objetivo.

**Función de valuación:** Es el valor óptimo de la función objetivo en función del estado y del tiempo, asumiendo que se ejecuta la política óptima todo el tiempo.

**Ecuación de Bellman:** Suponiendo que las decisiones son tomadas en instantes discretos, entonces la ecuación recursiva que relaciona la función de valuación en un instante con la misma en el instante anterior se llama ecuación de Bellman.

**Principio de Optimalidad de Bellman:** *Una política óptima tiene la propiedad que cualquiera sea el estado y decisiones iniciales, entonces las decisiones siguientes deben constituir una política óptima con respecto a las consecuencias resultantes de las decisiones anteriores.* [? ]. Esta propiedad nos permite tratar un problema de valuación en tiempo discreto, descomponiendo la valuación en un instante  $t(n)$  en subproblemas de valuación en el instante  $t(n+1)$ , por lo que la valuación de una opción en tiempo discreto se puede realizar identificando su ecuación de Bellman, el cual por ser de índole estocástico puede tener la siguiente forma:

$$V(x_n, t(n)) = \max_{u_{t(n)} \in \Gamma(x)} \left\{ \pi(x_n, u_{t(n)}) + \beta \mathbb{E}(V(x_{n+1}, t(n+1)) / x_n) \right\}$$

donde  $\Gamma(x)$  representa el conjunto de valores de la variable de control,  $x_n$  es un proceso estocástico discreto que toma distintos valores de la variable de estados,  $\pi$  es una función que representa un flujo de ingresos y  $\beta$  es una penalidad.

# ANEXO C: Ejemplos de métodos de valuación de opciones.

## Fórmula Black-Scholes

Sea una opción put europea donde  $S_0 = 10$ ,  $K = 5$ ,  $r = 0.1$ ,  $\sigma = 0.5$ ,  $t = 0$  y  $T = 1$ . Se tiene  $d_1 = \frac{\ln(2)+0.225}{0.5} = 1.8363$  y  $d_2 = 1.3363$ , que implica que:

$$N(-1.8363) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-1.8363} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 0.0332,$$

$$N(-1.3363) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-1.3363} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 0.0907$$

finalmente:

$$P(10, 0) = 5e^{-0.1} (0.0907) - 10 (0.0332) = 0.0783.$$

## Método Binomial

Sea una opción call americana donde  $S_0 = 10$ ,  $K = 5$ ,  $r = 0.1$ ,  $\sigma = 0.5$ ,  $t_0 = 0$  y  $T = 1$ . Se obtienen por lo tanto los siguientes valores del método binomial:

$$A = \frac{1}{2} \left( e^{-\frac{(0.1)}{2}} + e^{-\frac{(0.35)}{2}} \right) = 0.8953$$

$$d = 0.8953 - \sqrt{0.8953^2 - 1} = 0.6871$$

$$u = 0.8953 + \sqrt{0.8953^2 - 1} = 1.4552$$

$$p = \frac{e^{\frac{(0.1)}{2}} - 0.6871}{0.7681} = 0.4741$$

Después se calculan los valores de la variable binomial discreta:

$$S_0^0 = 10$$

$$S_0^1 = (1.4552)^{-1} S_0^0 = 6.871$$

$$S_1^1 = 1.4552 S_0^0 = 14.552$$

$$S_0^2 = (1.4552)^{-2} S_0^0 = 4.721$$

$$S_1^2 = (1.4552)^0 S_0^0 = 10$$

$$S_2^2 = (1.4552)^2 S_0^0 = 21.176$$

Se calculan con programación dinámica los valores de los nodos para cada valor-estado de la variable binomial:

$$V_0^2 = \max(4.721 - 5, 0) = 0$$

$$V_1^2 = \max(10 - 5, 0) = 5$$

$$V_2^2 = \max(21.176 - 5, 0) = 16.176$$

$$V_0^1 = \max\left(6.871 - 5, e^{-\frac{1}{20}} \left((0.4741) 5 + (1 - 0.4741) 0\right)\right) = 2.2549$$

$$V_1^1 = \max\left(14.552 - 5, e^{-\frac{1}{20}} \left((0.4741) (16.176) + (1 - 0.4741) 5\right)\right) = 9.7963$$

Finalmente el valor final:

$$V_0^0 = \max\left(10 - 5, e^{-\frac{1}{20}} \left((0.4741) (9.7963) + (1 - 0.4741) (2.2549)\right)\right) = 5.5459$$

## Método Pentanomial

Sea una opción call europea donde se emplean los siguientes parámetros:  $T = \frac{1}{6}$ ,  $\Delta t = \frac{1}{6}$ ,  $r = 0.1$ ,  $S_1^0 = 5$ ,  $S_2^0 = 3$ ,  $\rho = 0.15$ ,  $\lambda = 1.2$ ,  $r = 0.1$ ,  $K = 12$ ,  $\sigma_1 = 0.9$  y  $\sigma_2 = 0.1$ .

Entonces si la variable subyacente se define de esta manera  $S = S_1 S_2$ , se tendrían los siguientes parámetros del método pentanomial:

$$\mu_1 = 0.1 - (0.9)^2 / 2 = -0.305$$

$$\mu_2 = 0.1 - (0.1)^2 / 2 = 0.095$$

$$u_1 = e^{(1.2)(0.9)\sqrt{\frac{1}{6}}} = 1.5541$$

$$u_2 = e^{(1.2)(0.1)\sqrt{\frac{1}{6}}} = 1.0502$$

$$p_1 = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{(1.2)^2} + \frac{\sqrt{\frac{1}{6}}}{1.2} \left( \frac{-0.305_1}{0.9} + \frac{0.095}{0.1} \right) + \frac{0.15}{(1.2)^2} \right] = 0.2516$$

$$p_2 = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{(1.2)^2} + \frac{\sqrt{\frac{1}{6}}}{1.2} \left( \frac{-0.305_1}{0.9} - \frac{0.095}{0.1} \right) - \frac{0.15}{(1.2)^2} \right] = 0.0379$$

$$p_3 = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{(1.2)^2} + \frac{\sqrt{\frac{1}{6}}}{1.2} \left( -\frac{-0.305_1}{0.9} - \frac{0.095}{0.1} \right) + \frac{0.15}{(1.2)^2} \right] = 0.1477$$

$$p_4 = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{(1.2)^2} + \frac{\sqrt{\frac{1}{6}}}{1.2} \left( -\frac{-0.305_1}{0.9} + \frac{0.095}{0.1} \right) - \frac{0.15}{(1.2)^2} \right] = 0.2572$$

$$p_5 = 1 - \frac{1}{(1.2)^2} = 0.3056$$

Entonces se calculan los valores de la variable discreta pentanomial:

$$S_{00}^0 = S_{00}^1 = (1.5541)^0 (1.0502)^0 15 = 15$$

$$S_{10}^0 = S_{10}^1 = (1.5541) (1.0502) 15 = 24.4822$$

$$S_{0(-1)}^0 = S_{0(-1)}^1 = (1.5541) (1.0502)^{-1} 15 = 22.1973$$

$$S_{01}^0 = S_{01}^1 = (1.5541)^{-1} (1.0502) 15 = 10.1364$$

$$S_{(-1)0}^0 = S_{(-1)0}^1 = (1.5541)^{-1} (1.0502)^{-1} 15 = 9.1903$$

Después para cada valor-estado se calculan los valores discretos empleando programación dinámica:

$$V_{00}^1 = \max(15 - 12, 0) = 3$$

$$V_{10}^1 = \max(24.4822 - 12, 0) = 12.4822$$

$$V_{0(-1)}^1 = \max(22.1973 - 12, 0) = 10.1973$$

$$V_{01}^1 = \max(10.1364 - 12, 0) = 0$$

$$V_{(-1)0}^1 = \max(9.1903 - 12, 0) = 0$$

Finalmente se obtiene el valor deseado:

$$\begin{aligned} V_{00}^0 &= e^{-\frac{1}{60}} ((0.2516) (12.4822) + (0.0379) (10.1973) + (0.1477) 0 + (0.2572) 0 + (0.3056) (3)) \\ &= 4.3711 \end{aligned}$$

## Método Monte Carlo para opciones europeas.

Sean los siguientes parámetros para una opción call europea:  $T = 3$ ,  $\Delta t = 1$ ,  $r = 0.06$ ,  $K = 1.1$ ,  $S_0 = 1$  y  $\sigma = 1$ .

Lo cual implica la siguiente ecuación diferencial estocástica a ser discretizada, según la medida de Martingala:

$$dS = (0.06) S dt + S dW$$

La discretización resultante es:

$$S_{n+1} = S_n + (0.06) S_n \Delta t + S_n \Delta W$$

Empleando tal discretización se obtienen los siguientes caminos discretos:

Nº	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	1	1.09	1.08	1.34
2	1	1.16	1.26	1.54
3	1	1.22	1.07	1.03
4	1	0.93	0.97	0.92
5	1	1.11	1.56	1.52
6	1	0.76	0.77	0.9
7	1	0.92	0.84	1.01
8	1	0.88	1.22	1.34

Entonces la valuación de cada camino depende solamente del último valor de cada camino:

$$v_{\omega(1)} = e^{-0.18} \max(1.34 - 1.1, 0) = 0.2005$$

$$v_{\omega(2)} = e^{-0.18} \max(1.54 - 1.1, 0) = 0.3675$$

$$v_{\omega(3)} = e^{-0.18} \max(1.03 - 1.1, 0) = 0$$

$$v_{\omega(4)} = e^{-0.18} \max(0.92 - 1.1, 0) = 0$$

$$v_{\omega(5)} = e^{-0.18} \max(1.52 - 1.1, 0) = 0.3508$$

$$v_{\omega(6)} = e^{-0.18} \max(0.9 - 1.1, 0) = 0$$

$$v_{\omega(7)} = e^{-0.18} \max(1.01 - 1.1, 0) = 0$$

$$v_{\omega(8)} = e^{-0.18} \max(1.34 - 1.1, 0) = 0.2005$$

Finalmente se promedian dichos valores:

$$V(1, 0) \approx \frac{\sum_i v_{\omega(i)}}{8} = 0.1399$$

## LSM.

Se desea calcular el valor de una opción americana clásica, salvo que puede ser ejecutada en cualquier instante menos el instante inicial, los parámetros son los siguientes  $T = 3$ ,  $\Delta t = 1$ ,  $r = 0.06$ ,  $S_0 = 1$ ,  $\sigma = 1$  y  $K = 1.1$ <sup>1</sup>. Por lo tanto se obtiene la misma EDE del ejercicio anterior, siendo que se puede emplear la misma tabla de caminos discretos. Por lo tanto en base a esa tabla, el flujo de caja del poseedor de la opción al tiempo final sera ( $\max(K - S_n, 0)$ ):

Nº	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	-	-	0
2	-	-	0
3	-	-	0.07
4	-	-	0.18
5	-	-	0
6	-	-	0.2
7	-	-	0.09
8	-	-	0

Entonces se consideran solamente los caminos para los cuales es conveniente ejecutar la opción al instante 2. Se realiza una regresión entre la ganancia descontada por el interes libre de riesgo y el valor de los caminos.

Nº	Y	X
1	$0 \times 0.94176$	1.08
2	-	-
3	$0.7 \times 0.94176$	1.07
4	$0.18 \times 0.94176$	0.97
5	-	-
6	$0.2 \times 0.94176$	0.77
7	$0.09 \times 0.94176$	0.84
8	-	-

El resultado de la regresión es:  $E[Y/X] = -1.07 + 2.983X - 1.813X^2$ . Se

---

<sup>1</sup>Ejemplo presentado en el artículo [E.S77].

avalúan los valores de los caminos anteriores en la función obtenida y se obtienen los valores de continuación que son comparados con los valores de ejercicio.

Nº	Ejercicio	Continuación
1	0.02	0.0369
2	-	-
3	0.03	0.0461
4	0.13	0.1176
5	-	-
6	0.33	0.1520
7	0.26	0.1565
8	-	-

Para los caminos donde es conveniente ejecutar la opción se actualiza la tabla de flujos de caja de esta manera:

-Si el valor de continuación supera a la de ejercicio, el flujo de caja al instante 2 será igual al valor de continuación y se mantienen los mismos valores del flujo de caja al tiempo 3.

-Si la función de continuación es menor o igual a la de ejercicio se escriben los valores del flujo de caja al instante 2 ( $K - S_n$ ) y los flujos de caja futuros son 0.

Para los caminos donde no es conveniente ejecutar la opción al instante 2: sus flujos de caja en dicho tiempo son iguales a 0 y los flujos de caja futuros no varían.

Nº	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	-	0	0
2	-	0	0
3	-	0	0.07
4	-	0.13	0
5	-	0	0
6	-	0.33	0
7	-	0.26	0
8	-	0	0

Nuevamente, se consideran solamente los caminos para los cuales es conveniente ejecutar la opción al instante 1. Se realiza una regresión entre la ganancia descontada por los intereses y el valor de los caminos.

Nº	Y	X
1	$0 \times 0.94176$	1.09
2	-	-
	-	-
4	$0.13 \times 0.94176$	0.93
5	-	-
6	$0.33 \times 0.94176$	0.76
7	$0.26 \times 0.94176$	0.92
8	$0 \times 0.94176$	0.88

El resultado de la regresión es:  $E[Y/X] = 2.038 - 3.335X - 1.356X^2$ . Se avalúan los valores de los caminos anteriores en la función obtenida y se obtienen los valores de continuación que son comparados con los valores de ejercicio.

Nº	Ejercicio	Continuación
1	0.01	0.0139
2	-	-
3	-	-
4	0.17	0.1092
5	-	-
6	0.34	0.2866
7	0.18	0.1175
8	0.22	0.1533

También se repite el paso de actualizar la tabla de flujos de caja al instante 1, tal como se hizo para el instante 2:

Nº	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	0.07
4	0.17	0	0
5	0	0	0
6	0.34	0	0
7	0.18	0	0
8	0.22	0	0

Los flujos de caja de cada camino discreto descontado al tiempo actual son:

N°	$t = 0$
1	0
2	0
3	0.0585
4	0.1601
5	0
6	0.3202
7	0.1695
8	0.2072

Sumando y promediando estos valores se obtiene el valor final: 0.1144.