

# **UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN**

**Facultad de Ingeniería**

**Ingeniería Electrónica**



**Simulación de Flujo Bifásico Cíclico en un Medio Poroso Homogéneo**

**Cristhian David Colbes Sanabria**

**José Carlos Garay Fernández**

**Orientadores:**

**D.Eng. Miki Saito**

**D.Sc. Christian E. Schaerer**

San Lorenzo, Paraguay

2011

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

---

**Miembros del Consejo Directivo**

**Consejeros Titulares**

Prof. Ing. Carlos Dellavedova E. (Decano)

Prof. Ing. Isacio Vallejos Aquino (Vice Decano - Decano En Ejercicio)

Prof. Ing. Amilcar Troche (Docente)

Prof. Ing. Cesar Sitjar (Docente)

Prof. Ing. Francisco R. Delgado Marquez (Docente)

Prof. Ing. Diógenes Sartorio (Docente)

Prof. Ing. Cirilo Hernáez (Docente)

Prof. Ing. Ramón Pistilli S. (Docente - C.S.U.)

Ing. Pablo Rodriguez (No Docente)

Ing. Gabriel Enrique Fleitas Ferrari (No Docente)

Est. Víctor Omar Morínigo López (Estudiante)

Est. Jorge Manuel Muller Giménez (Estudiante)

Est. Vicente Javier Chaparro Ruíz Díaz (Estudiante)

**Consejeros Suplentes**

Prof. Ing. Carlos M. Montero Volpe (Docente - CSU)

Prof. Ing. María Teresa Pino (Docente)

Ing. Ignacio Daniel Velázquez G. (No Docente)

Ing. Alfredo Javier Coronel Correa (No Docente)

Est. Víctor Daniel Portillo Galván (Estudiante)

Est. Justo Javier Fernández Arguello (Estudiante)

Est. Sergio Daniel Vera Urquhart (Estudiante)

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

---

*A nuestros padres, por inculcarnos los valores que nos formaron como personas  
por motivarnos a seguir el camino de las ciencias  
y por enseñarnos con el ejemplo*

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

---

**AGRADECIMIENTOS**

al Prof. D.Sc. Christian Schaerer, por la paciencia, el apoyo y la orientación para la realización  
de este trabajo

a la Prof. D.Eng. Miki Saito, por la orientación y el apoyo continuo durante de nuestra  
formación

a M.Sc. Hyun Ho Shin, por la ayuda para el buen desarrollo del trabajo

a nuestros amigos y compañeros, por los excelentes momentos compartidos al pasar por esta  
Casa de Estudios

## **AGRADECIMIENTOS INSTITUCIONALES**

a la Facultad de Ingeniería de la UNA  
al Laboratorio de Computación Científica y Aplicada (LCCA),  
por el gran apoyo brindado

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

---

**ABSTRACT**

Hysteresis phenomenon is presented in several physical systems involving cyclic processes. In particular, in this work we implement the *Scanning Hysteresis Model* to capture the hysteresis phenomenon presented in the relative permeability of multiphase flows in porous media. From the mathematical modeling resulted a set of hyperbolic equations in variables of Saturation and Memory of the flow behavior change.

In order to solve the resulting hyperbolic equations using the Godunov method, the Riemann solutions were analyzed and implemented. In contrast to previous works, new cases not shown in previous literature were found when hysteresis effects in velocity and gravity terms of the model are comparable and considered simultaneously. This implies a major complexity in the Riemann solutions implementations. One-dimensional and two-dimensional simulations that show the compatibility between implementations and theoretical results are presented.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

---

**RESUMEN**

El fenómeno de histéresis se presenta en varios sistemas físicos que envuelven procesos cíclicos. En particular, en este trabajo implementamos el *Scanning Hysteresis Model* para capturar el fenómeno de la histéresis presente en la permeabilidad relativa de flujos multifásicos en medios porosos. Del modelado matemático resultó un conjunto de ecuaciones hiperbólicas en las variables de Saturación y Memoria del cambio de comportamiento del flujo.

De forma a resolver las ecuaciones hiperbólicas resultantes usando el método de Godunov, las soluciones de Riemann fueron analizadas e implementadas. En contraste con trabajos anteriores, se encontraron nuevos casos no ilustrados en la literatura previa cuando los efectos de la histéresis en los términos de velocidad y de gravedad del modelo son comparables y considerados simultáneamente. Esto implica una mayor complejidad en la implementación de las soluciones de Riemann. Se presentan simulaciones unidimensionales y bidimensionales que demuestran la compatibilidad de las implementaciones con los resultados teóricos.

## INDICE DE CONTENIDO

<b>1. Introducción</b>	<b>22</b>
<b>2. Justificación y Objetivos</b>	<b>26</b>
2.1. Justificación del trabajo . . . . .	26
2.2. Estado del Arte . . . . .	31
2.3. Objetivos . . . . .	31
<b>3. Marco Teórico</b>	<b>33</b>
3.1. Definiciones de parámetros físicos . . . . .	33
3.2. Ley de conservación de masa . . . . .	35
3.3. Ley de Darcy . . . . .	37
<b>4. Modelo Matemático</b>	<b>39</b>
4.1. Ecuación de Transporte . . . . .	39

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

---

4.2. Modelo de histéresis . . . . .	41
4.3. Efectos de la histéresis en la función flujo . . . . .	45
4.4. Modelo matemático completo . . . . .	48
4.5. Ecuación de la velocidad . . . . .	49
<b>5. Esquema Numérico</b>	<b>50</b>
5.1. Análisis de las soluciones de la ecuación hiperbólica . . . . .	50
5.1.1. Caso en que $F$ es una función lineal de $S$ . . . . .	50
5.1.2. Curvas Características . . . . .	51
5.1.3. Caso en que $F$ es una función no lineal de $S$ . . . . .	51
5.2. Método de Godunov Corregido . . . . .	57
5.2.1. Determinación de Flujo en Frontera . . . . .	58
5.2.2. Extensión del esquema numérico para el caso 2D . . . . .	139
<b>6. Implementación del Simulador</b>	<b>142</b>
6.0.3. Función FlujoFronteraf . . . . .	142
6.0.4. Algoritmo del Simulador . . . . .	143
<b>7. Resultados Experimentales</b>	<b>145</b>

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

---

7.1. Resultados para 1D . . . . .	145
7.2. Resultados para 2D . . . . .	198
<b>8. Esquema de un sistema de control de almacenamiento de gas natural</b>	<b>200</b>
<b>9. Conclusiones</b>	<b>203</b>
<b>Trabajos Futuros Sugeridos</b>	<b>204</b>
<b>BIBLIOGRAFIA</b>	<b>205</b>

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

---

**INDICE DE FIGURAS**

2.1.	Proyecciones de la energía comercializada mundialmente por tipo de combustible	28
2.2.	Matriz Energética del Paraguay . . . . .	29
2.3.	Catastro de Hidrocarburos . . . . .	30
3.1.	Cubo diferencial . . . . .	36
3.2.	Flujo volumétrico . . . . .	38
4.1.	Curvas de las permeabilidades relativas . . . . .	43
4.2.	Scanning Hysteresis Model . . . . .	44
4.3.	Lazos de histéresis de la función flujo para $\mathbf{u} \neq 0$ y $g \neq 0$ . . . . .	47
4.4.	Lazos de histéresis de la función flujo para $\mathbf{u} \neq 0$ y $g = 0$ . . . . .	47
4.5.	Lazo de histéresis de la función flujo para $\mathbf{u} = 0$ y $g \neq 0$ . . . . .	48
4.6.	Espacio de estado del sistema medio poroso-fluidos . . . . .	49
5.1.	Solución de Onda cuando $F$ es lineal . . . . .	51

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

---

5.2.	Curvas características . . . . .	52
5.3.	Onda de choque y sus características . . . . .	54
5.4.	Onda de rarefacción y sus características . . . . .	54
5.5.	Discretización en celdas . . . . .	56
5.6.	Flujos en las fronteras de celda . . . . .	56
5.7.	Sentido del flujo sobre las curvas de imbibición y drenaje . . . . .	61
5.8.	Choque Negativo . . . . .	61
5.9.	Flujos de Scanning . . . . .	62
5.10.	<i>R</i> -Regiones y sus soluciones en caso de flujo de scanning cuando: (a) <i>L</i> está a la izquierda de $Q_d Q_i$ , (b) <i>L</i> está a la derecha de $Q_d Q_i$ . . . . .	63
5.11.	Flujo Efectivo para casos en que los estados caigan en curvas distintas . . . . .	64
5.12.	<i>L</i> -Regiones . . . . .	68
5.13.	<i>R</i> -Regiones correspondientes a la <i>L</i> -Región <i>A</i> . . . . .	70
5.14.	Solución para $L \in A$ y $R \in R_A^I$ . . . . .	71
5.15.	Solución para $L \in A$ y $R \in R_A^{II}$ . . . . .	71
5.16.	Solución para $L \in A$ y $R \in R_A^{III}$ . . . . .	72
5.17.	Solución para $L \in A$ y $R \in R_A^{IV}$ . . . . .	72
5.18.	Solución para $L \in A$ y $R \in R_A^V$ . . . . .	73

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

---

5.19. Solución para $L \in A$ y $R \in R_A^{VI}$ . . . . .	73
5.20. Solución para $L \in A$ y $R \in R_A^{VII}$ . . . . .	74
5.21. $R$ -Regiones correspondientes a la $L$ -Región B . . . . .	76
5.22. Solución para $L \in B$ y $R \in R_B^I$ . . . . .	77
5.23. Solución para $L \in B$ y $R \in R_B^{II(a)}$ . . . . .	77
5.24. Solución para $L \in B$ y $R \in R_B^{II(b)}$ . . . . .	78
5.25. Solución para $L \in B$ y $R \in R_B^{III}$ . . . . .	78
5.26. Solución para $L \in B$ y $R \in R_B^{IV}$ . . . . .	79
5.27. Solución para $L \in B$ y $R \in R_B^V$ . . . . .	79
5.28. Solución para $L \in B$ y $R \in R_B^{VI}$ . . . . .	80
5.29. Solución para $L \in B$ y $R \in R_B^{VII}$ . . . . .	80
5.30. Solución para $L \in B$ y $R \in R_B^{VIII}$ . . . . .	81
5.31. Solución para $L \in B$ y $R \in R_B^{IX}$ . . . . .	81
5.32. $R$ -Regiones correspondientes a la $L$ -Región C . . . . .	82
5.33. Solución para $L \in C$ y $R \in R_C^I$ . . . . .	83
5.34. Solución para $L \in C$ y $R \in R_C^{II}$ . . . . .	83
5.35. Solución para $L \in C$ y $R \in R_C^{III}$ . . . . .	84

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

---

5.36. Solución para $L \in C$ y $R \in R_C^{IV}$ . . . . .	84
5.37. Solución para $L \in C$ y $R \in R_C^V$ . . . . .	85
5.38. Solución para $L \in C$ y $R \in R_C^{VI}$ . . . . .	85
5.39. Solución para $L \in C$ y $R \in R_C^{VII}$ . . . . .	86
5.40. Solución para $L \in C$ y $R \in R_C^{VIII}$ . . . . .	86
5.41. Solución para $L \in C$ y $R \in R_C^{IX}$ . . . . .	87
5.42. $R$ -Regiones correspondientes a la $L$ -Región $D1$ . . . . .	89
5.43. Solución para $L \in D1$ y $R \in R_{D1}^I$ . . . . .	89
5.44. Solución para $L \in D1$ y $R \in R_{D1}^{II}$ . . . . .	90
5.45. Solución para $L \in D1$ y $R \in R_{D1}^{III}$ . . . . .	90
5.46. Solución para $L \in D1$ y $R \in R_{D1}^{IV}$ . . . . .	91
5.47. Solución para $L \in D1$ y $R \in R_{D1}^V$ . . . . .	91
5.48. Solución para $L \in D1$ y $R \in R_{D1}^{VI}$ . . . . .	92
5.49. Solución para $L \in D1$ y $R \in R_{D1}^{VII}$ . . . . .	92
5.50. Solución para $L \in D1$ y $R \in R_{D1}^{VIII}$ . . . . .	93
5.51. Solución para $L \in D1$ y $R \in R_{D1}^{IX}$ . . . . .	93
5.52. Solución para $L \in D1$ y $R \in R_{D1}^X$ . . . . .	94

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

---

5.53. $R$ -Regiones correspondientes a la $L$ -Región $D_2$ . . . . .	96
5.54. Solución para $L \in D_2$ y $R \in R_{D_2}^I$ . . . . .	96
5.55. Solución para $L \in D_2$ y $R \in R_{D_2}^{II}$ . . . . .	97
5.56. Solución para $L \in D_2$ y $R \in R_{D_2}^{III}$ . . . . .	97
5.57. Solución para $L \in D_2$ y $R \in R_{D_2}^{IV}$ . . . . .	98
5.58. Solución para $L \in D_2$ y $R \in R_{D_2}^V$ . . . . .	98
5.59. Solución para $L \in D_2$ y $R \in R_{D_2}^{VI}$ . . . . .	99
5.60. Solución para $L \in D_2$ y $R \in R_{D_2}^{VII}$ . . . . .	99
5.61. Solución para $L \in D_2$ y $R \in R_{D_2}^{VIII}$ . . . . .	100
5.62. Solución para $L \in D_2$ y $R \in R_{D_2}^{IX}$ . . . . .	100
5.63. Solución para $L \in D_2$ y $R \in R_{D_2}^X$ . . . . .	101
5.64. Solución para $L \in D_2$ y $R \in R_{D_2}^{XI}$ . . . . .	101
5.65. Solución para $L \in D_2$ y $R \in R_{D_2}^{XII}$ . . . . .	102
5.66. $R$ -Regiones correspondientes a la $L$ -Región $E$ . . . . .	103
5.67. Solución para $L \in E$ y $R \in R_E^I$ . . . . .	104
5.68. Solución para $L \in E$ y $R \in R_E^{II}$ . . . . .	104
5.69. Solución para $L \in E$ y $R \in R_E^{III}$ . . . . .	105

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

---

5.70. Solución para  $L \in E$  y  $R \in R_E^{IV}$  . . . . . 105

5.71. Solución de Riemann representada por sus características . . . . . 106

5.72. Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes  
regiones del espacio para  $L \in A$  y  $R \in R_A^I$  . . . . . 107

5.73. Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes  
regiones del espacio para  $L \in A$  y  $R \in R_A^{II}$  . . . . . 107

5.74. Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes  
regiones del espacio para  $L \in A$  y  $R \in R_A^{III}$  . . . . . 108

5.75. Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes  
regiones del espacio para  $L \in A$  y  $R \in R_A^{IV}$  . . . . . 108

5.76. Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes  
regiones del espacio para  $L \in A$  y  $R \in R_A^V$  . . . . . 109

5.77. Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes  
regiones del espacio para  $L \in A$  y  $R \in R_A^{VI}$  . . . . . 109

5.78. Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes  
regiones del espacio para  $L \in A$  y  $R \in R_A^{VII}$  . . . . . 110

5.79. Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes  
regiones del espacio para  $L \in B$  y  $R \in R_B^I$  . . . . . 110

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

---

5.80. Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in B$  y  $R \in R_B^{II(a)}$  . . . . . 111

5.81. Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in B$  y  $R \in R_B^{II(b)}$  . . . . . 111

5.82. Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in B$  y  $R \in R_B^{III}$  . . . . . 112

5.83. Características de las ondas Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in B$  y  $R \in R_B^{IV}$  . . . . . 112

5.84. Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in B$  y  $R \in R_B^V$  . . . . . 113

5.85. Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in B$  y  $R \in R_B^{VI}$  . . . . . 113

5.86. Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in B$  y  $R \in R_B^{VII}$  . . . . . 114

5.87. Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in B$  y  $R \in R_B^{VIII}$  . . . . . 114

5.88. Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in B$  y  $R \in R_B^{IX}$  . . . . . 115

5.89. Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in C$  y  $R \in R_C^I$  . . . . . 115

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

---

5.90. Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in C$  y  $R \in R_C^{II}$  . . . . . 116

5.91. Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in C$  y  $R \in R_C^{III}$  . . . . . 116

5.92. Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in C$  y  $R \in R_C^{IV}$  . . . . . 117

5.93. Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in C$  y  $R \in R_C^V$  . . . . . 117

5.94. Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in C$  y  $R \in R_C^{VI}$  . . . . . 118

5.95. Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in C$  y  $R \in R_C^{VII}$  . . . . . 118

5.96. Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in C$  y  $R \in R_C^{VIII}$  . . . . . 119

5.97. Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in C$  y  $R \in R_C^{IX}$  . . . . . 119

5.98. Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in D$  y  $R \in R_{D1}^I$  . . . . . 120

5.99. Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in D1$  y  $R \in R_{D1}^{II}$  . . . . . 120

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

---

5.100. Características de las ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in D1$  y  $R \in R_{D1}^{III}$  . . . . . 121

5.101. Características de las ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in D1$  y  $R \in R_{D1}^{IV}$  . . . . . 121

5.102. Características de las ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in D1$  y  $R \in R_{D1}^V$  . . . . . 122

5.103. Características de las ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in D1$  y  $R \in R_{D1}^{VI}$  . . . . . 122

5.104. Características de las ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in D1$  y  $R \in R_{D1}^{VII}$  . . . . . 123

5.105. Características de las ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in D1$  y  $R \in R_{D1}^{VIII}$  . . . . . 123

5.106. Características de las ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in D1$  y  $R \in R_{D1}^{IX}$  . . . . . 124

5.107. Características de las ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in D1$  y  $R \in R_{D1}^X$  . . . . . 124

5.108. Características de las ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in D2$  y  $R \in R_{D2}^I$  . . . . . 125

5.109. Características de las ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in D2$  y  $R \in R_{D2}^{II}$  . . . . . 125

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

---

5.110. Características de las ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in D2$  y  $R \in R_{D2}^{III}$  . . . . . 126

5.111. Características de las ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in D2$  y  $R \in R_{D2}^{IV}$  . . . . . 126

5.112. Características de las ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in D2$  y  $R \in R_{D2}^V$  . . . . . 127

5.113. Características de las ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in D2$  y  $R \in R_{D2}^{VI}$  . . . . . 127

5.114. Características de las ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in D2$  y  $R \in R_{D2}^{VII}$  . . . . . 128

5.115. Características de las ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in D2$  y  $R \in R_{D2}^{VIII}$  . . . . . 128

5.116. Características de las ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in D2$  y  $R \in R_{D2}^{IX}$  . . . . . 129

5.117. Características de las ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in D2$  y  $R \in R_{D2}^X$  . . . . . 129

5.118. Características de las ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in D2$  y  $R \in R_{D2}^{XI}$  . . . . . 130

5.119. Características de las ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in D2$  y  $R \in R_{D2}^{XII}$  . . . . . 130

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

---

5.120. Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in E$  y  $R \in R_E^I$  . . . . . 131

5.121. Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in E$  y  $R \in R_E^{II}$  . . . . . 131

5.122. Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in E$  y  $R \in R_{D2}^{III}$  . . . . . 132

5.123. Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in E$  y  $R \in R_E^{IV}$  . . . . . 132

5.124. Mallas Primaria (líneas discontinuas) y Dual (líneas llenas). Fuente: Elaboración propia . . . . . 140

5.125. Celda para casos bidimensionales . . . . . 141

6.1. Bloque de la función FlujoFronteraf . . . . . 142

6.2. Algoritmo de simulación . . . . . 144

7.1. Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in A$  y  $R \in R_A^I$  . . . . . 146

7.2. Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in A$  y  $R \in R_A^{II}$  . . . . . 147

7.3. Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in A$  y  $R \in R_A^{III}$  . . . . . 148

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

---

7.4.	Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para $L \in A$ y	
	$R \in R_A^{IV}$ . . . . .	149
7.5.	Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para $L \in A$ y	
	$R \in R_A^V$ . . . . .	150
7.6.	Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para $L \in A$ y	
	$R \in R_A^{VI}$ . . . . .	151
7.7.	Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para $L \in A$ y	
	$R \in R_A^{VII}$ . . . . .	152
7.8.	Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para $L \in A$ y	
	$R \in R_A^{VIII}$ . . . . .	153
7.9.	Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para $L \in B$ y	
	$R \in R_B^{II(a)}$ . . . . .	154
7.10.	Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para $L \in B$ y	
	$R \in R_B^{II(b)}$ . . . . .	155
7.11.	Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para $L \in B$ y	
	$R \in R_B^{III}$ . . . . .	156
7.12.	Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para $L \in B$ y	
	$R \in R_B^{IV}$ . . . . .	157
7.13.	Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para $L \in B$ y	
	$R \in R_B^V$ . . . . .	158

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

---

7.14. Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in B$  y  
 $R \in R_B^{VI}$  . . . . . 159

7.15. Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in B$  y  
 $R \in R_B^{VII}$  . . . . . 160

7.16. Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in B$  y  
 $R \in R_B^{VIII}$  . . . . . 161

7.17. Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in B$  y  
 $R \in R_B^{IX}$  . . . . . 162

7.18. Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in C$  y  
 $R \in R_C^I$  . . . . . 163

7.19. Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in C$  y  
 $R \in R_C^{II}$  . . . . . 164

7.20. Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in C$  y  
 $R \in R_C^{III}$  . . . . . 165

7.21. Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in C$  y  
 $R \in R_C^{IV}$  . . . . . 166

7.22. Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in C$  y  
 $R \in R_C^V$  . . . . . 167

7.23. Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in C$  y  
 $R \in R_C^{VI}$  . . . . . 168

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

---

7.24. Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in C$  y  
 $R \in R_C^{VII}$  . . . . . 169

7.25. Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in C$  y  
 $R \in R_C^{VIII}$  . . . . . 170

7.26. Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in C$  y  
 $R \in R_C^{IX}$  . . . . . 171

7.27. Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in D1$   
y  $R \in R_{D1}^I$  . . . . . 172

7.28. Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in D1$   
y  $R \in R_{D1}^{II}$  . . . . . 173

7.29. Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in D1$   
y  $R \in R_{D1}^{III}$  . . . . . 174

7.30. Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in D1$   
y  $R \in R_{D1}^{IV}$  . . . . . 175

7.31. Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in D1$   
y  $R \in R_{D1}^V$  . . . . . 176

7.32. Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in D1$   
y  $R \in R_{D1}^{VI}$  . . . . . 177

7.33. Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in D1$   
y  $R \in R_{D1}^{VII}$  . . . . . 178

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

---

7.34. Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in D1$   
y  $R \in R_{D1}^{VIII}$  . . . . . 179

7.35. Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in D1$   
y  $R \in R_{D1}^{IX}$  . . . . . 180

7.36. Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in D1$   
y  $R \in R_{D1}^X$  . . . . . 181

7.37. Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in D2$   
y  $R \in R_{D2}^I$  . . . . . 182

7.38. Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in D2$   
y  $R \in R_{D2}^{II}$  . . . . . 183

7.39. Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in D2$   
y  $R \in R_{D2}^{III}$  . . . . . 184

7.40. Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in D2$   
y  $R \in R_{D2}^{IV}$  . . . . . 185

7.41. Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in D2$   
y  $R \in R_{D2}^V$  . . . . . 186

7.42. Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in D2$   
y  $R \in R_{D2}^{VI}$  . . . . . 187

7.43. Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in D2$   
y  $R \in R_{D2}^{VII}$  . . . . . 188

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

---

7.44. Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in D2$   
y  $R \in R_{D2}^{VIII}$  . . . . . 189

7.45. Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in D2$   
y  $R \in R_{D2}^{IX}$  . . . . . 190

7.46. Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in D2$   
y  $R \in R_{D2}^X$  . . . . . 191

7.47. Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in D2$   
y  $R \in R_{D2}^{XI}$  . . . . . 192

7.48. Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in D2$   
y  $R \in R_{D2}^{XII}$  . . . . . 193

7.49. Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in E$  y  
 $R \in R_E^I$  . . . . . 194

7.50. Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in E$  y  
 $R \in R_E^{II}$  . . . . . 195

7.51. Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in E$  y  
 $R \in R_E^{III}$  . . . . . 196

7.52. Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in E$  y  
 $R \in R_E^{IV}$  . . . . . 197

7.53. Campo de Velocidades utilizado en la simulación 2D . . . . . 198

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

---

7.54. Simulación 2D. Saturaciones en toda la malla en un instante de tiempo . . . . .	199
7.55. Saturaciones en el medio de la malla en un instante de tiempo . . . . .	199
8.1. Esquema de un sistema de control de un depósito de gas natural . . . . .	201
8.2. Esquema de la Unidad de Control de Distribución . . . . .	201

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

---

**INDICE DE TABLAS**

5.1.	Soluciones de Riemann cuando hay máximos en las curvas de scanning y no hay interacción con las curvas de drenaje e imbibición . . . . .	65
5.2.	Solución de Riemann para $L \in A$ . . . . .	133
5.3.	Solución de Riemann para $L \in B$ . . . . .	134
5.4.	Solución de Riemann para $L \in C$ . . . . .	135
5.5.	Solución de Riemann para $L \in D1$ . . . . .	136
5.6.	Solución de Riemann para $L \in D2$ . . . . .	137
5.7.	Solución de Riemann para $L \in E$ . . . . .	138

## **CAPITULO 1**

### **INTRODUCCION**

La histéresis es un fenómeno que se presenta en varios sistemas físicos, por ejemplo, sistemas magnéticos, eléctricos, elásticos, biológicos, hidrodinámicos, etc [18, 19, 20, 21]. El fenómeno de histéresis se manifiesta a través de la dependencia de la salida de un sistema no sólo en cuanto al valor de la entrada sino también de la historia de esta entrada o del estado interno del sistema (efecto de memoria). En ciertos casos los efectos de la histéresis resultan favorables para ciertas aplicaciones (por ejemplo, las memorias de los computadores), y en otros casos resultan desfavorables (por ejemplo, pérdidas de energía en los núcleos de transformadores).

Dos ejemplos de sistemas con histéresis con aplicaciones muy importantes son los Memristores y los medios porosos con fluidos en su interior [17, 3]. El Memristor, considerado como el cuarto elemento básico de los circuitos eléctricos y como el dispositivo que va a revolucionar el mundo de la electrónica y la teoría de circuitos, es un dispositivo que se comporta como un resistor no lineal con histéresis en su resistencia [16, 17]. El sistema medio poroso-fluidos, como puede ser un yacimiento de petróleo o un depósito de gas natural, presenta histéresis en las permeabilidades relativas. Para este último ejemplo, la histéresis juega un papel importante, sobre todo en los procesos cíclicos de producción (extracción) e inyección de hidrocarburos tales como WAG (Water Alternating Gas) y waterflooding. Cabe destacar que existe una analogía entre sistemas eléctricos y sistemas hidrodinámicos, la cual es evidente desde el punto de vista

---

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

---

de que la carga y la masa son propiedades de las partículas físicas. Por ejemplo, la carga es análoga a la masa, la diferencia de potencial a la diferencia de presión, la ley de conservación de las cargas a la ley de conservación de masa, etc. Por tanto, el sistema medio poroso-fluido puede ser representado por medio de un circuito eléctrico no lineal con histéresis en la resistencia. En este trabajo vamos a diseñar e implementar un simulador de reservorio (un sistema medio poroso-fluidos) que presenta histéresis en la permeabilidad relativa de la fase no mojan- te. El simulador de reservorio es un programa de computadora que resuelve las ecuaciones que describen el comportamiento del sistema para cada instante de tiempo, permitiéndonos así co- nocer dicho comportamiento para cualquier intervalo de tiempo. Para desarrollar este simulador vamos a determinar previamente el modelo matemático del sistema, es decir, la malla abierta del sistema.

El propósito del simulador de reservorio consiste en predecir el comportamiento del reser- vorio bajo diferentes condiciones de operación, y determinar los métodos y medios idóneos que optimicen la extracción y almacenamiento de hidrocarburos. Entre las áreas de aplicación de los simuladores de reservorio se destacan la producción de petróleo (etapa de recuperación secun- daria), y el almacenamiento de gas natural. En el área de almacenamiento de gas, el simulador de reservorio posibilita determinar el volumen de gas útil de un depósito subterráneo (en particular el volumen de gas útil en un acuífero a utilizar como reservorio de almacenamiento), permite adecuar las condiciones de operación del sistema de almacenamiento de acuerdo a la demanda de gas de los clientes, y optimizar el sistema de almacenamiento. También permite viabilizar el control del estado de carga y descarga del depósito así como la capacidad de distribución por día.

---

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

---

Al diseñar el simulador es importante tener en cuenta el fenómeno de histéresis presente en el reservorio para que el comportamiento estimado por el simulador concuerde con el comportamiento real del reservorio [6]. De acuerdo a los experimentos hechos con núcleos de medios porosos [1], se pudo observar que las permeabilidades relativas tanto de la fase mojante como no mojante dependían de la saturación, de la tendencia de la saturación (a aumentar o disminuir) y del valor de la saturación antes del cambio de la tendencia de la saturación [1, 2, 11], en otras palabras, se vio que las permeabilidades relativas presentaban histéresis ya que los valores de éstas dependían no solo de la saturación sino también de la historia de la saturación. Existen varios trabajos en los que se presentaron observaciones y explicaciones sobre la histéresis en la permeabilidad relativa basadas en experimentos de laboratorio [1, 2, 11]. Existen otros trabajos donde se presentan fórmulas para las curvas de las permeabilidades relativas de drenaje (extracción de fluido), imbibición (inyección de fluido), y scanning [8, 9], y otro donde se consideran las curvas de drenaje e imbibición solamente [12]. En [3], [5], y [6] se presenta, analiza y desarrolla el modelo de histéresis denominado Scanning Hysteresis Model, el cual vamos a utilizar en este trabajo.

La histéresis en la permeabilidad relativa de la fase no mojante es transferida al modelo vía el flujo fraccional de la fase mojante y la movilidad de la fase no mojante, afectando los términos de velocidad y de gravedad de la función flujo. En contraste con los trabajos anteriores [5, 6], en este trabajo consideramos el fenómeno de histéresis afectando a los términos de velocidad y de gravedad simultáneamente y extendemos la aplicación del simulador para casos de dos dimensiones. Resultados comparativos entre las soluciones analíticas y numéricas se presentan.

En el final presentamos un posible esquema de sistema de control que utiliza el simulador

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

---

para poder controlar un depósito de almacenamiento de gas.

## **CAPITULO 2**

### **JUSTIFICACION Y OBJETIVOS**

#### **2.1. Justificación del trabajo**

La simulación de reservorio se ha convertido en una herramienta de predicción estándar en la industria de hidrocarburos. Puede ser utilizada para obtener predicciones de rendimiento precisas para un reservorio de hidrocarburos bajo diferentes condiciones de operación. Un proyecto de recuperación de hidrocarburos usualmente envuelve una inversión de capital de cientos de millones de dólares (el costo de perforación de pozo actualmente ronda los 5 millones de dólares según el Instituto Americano de Petróleo API), y el riesgo asociado con las estrategias de producción y desarrollo seleccionadas debe ser evaluado y minimizado. Este riesgo incluye factores muy importantes como la complejidad de un reservorio de hidrocarburos y los fluidos contenidos en él, la complejidad de los mecanismos de recuperación del hidrocarburo, y la aplicabilidad de métodos predictivos. Estas complejidades pueden tenerse en cuenta en la simulación de reservorio a través de datos de entrada del modelo de simulación, y esta aplicabilidad puede ser estimada a través de prácticas de ingeniería sólidas (libres de defectos) y una simulación de reservorio precisa [10].

La disponibilidad del petróleo y gas natural, en el mundo, está disminuyendo y lo fácilmente explotable está terminando, pero la necesidad está haciendo que explotaciones de petróleo con

---

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

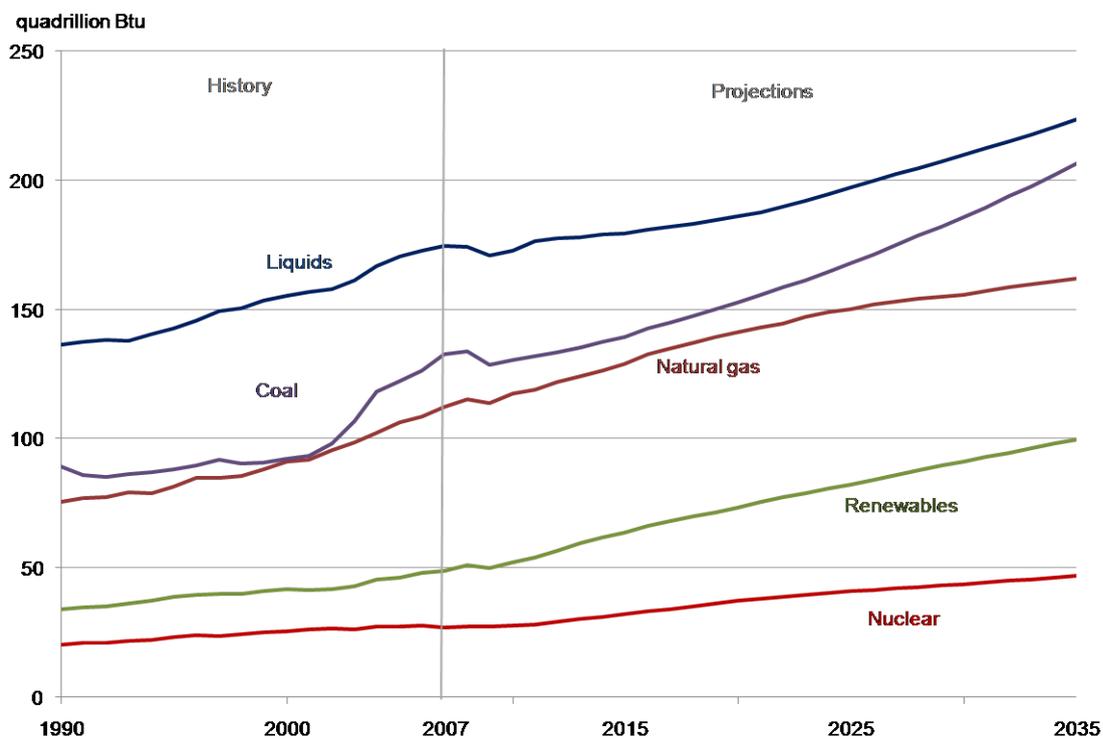
---

mucho mayor costo y extracciones de gas natural no convencional sean llevadas adelante [22]. En la Figura 2.1 se pueden apreciar las proyecciones de la energía comercializada a nivel mundial por tipo de combustible. El simulador de flujo en el reservorio (o simplemente simulador de reservorio) permitirá predecir el comportamiento del reservorio y determinar los métodos y medios que optimicen la extracción de estos hidrocarburos bajo varias condiciones de operación [10]. Esta optimización permitirá realizar un menor número de perforaciones y una mejor disposición de éstas, posibilitando extraer una mayor cantidad de hidrocarburos con una menor inversión.

En el Paraguay existen yacimientos de hidrocarburos (petróleo, gas natural) en el Chaco [23]. En la Figura 2.3 se puede apreciar el Mapa de Catastro de Hidrocarburos del Paraguay. En la zona de Gabino Mendoza, se han realizado perforaciones confirmando la existencia de Gas Natural [24, 23]. Así, el simulador bidimensional implementado en este trabajo, una vez desarrollado para tres dimensiones prodría utilizarse para optimizar la extracción y el almacenamiento de gas en este reservorio, así como disminuir los costos de explotación y operación. Todo esto podría servir para el proyecto URUPABOL que tiene previsto el transporte de gas a través de un gasoducto Bolivia\Gabino Mendoza\Cercanías de Asunción [22].

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEEO**

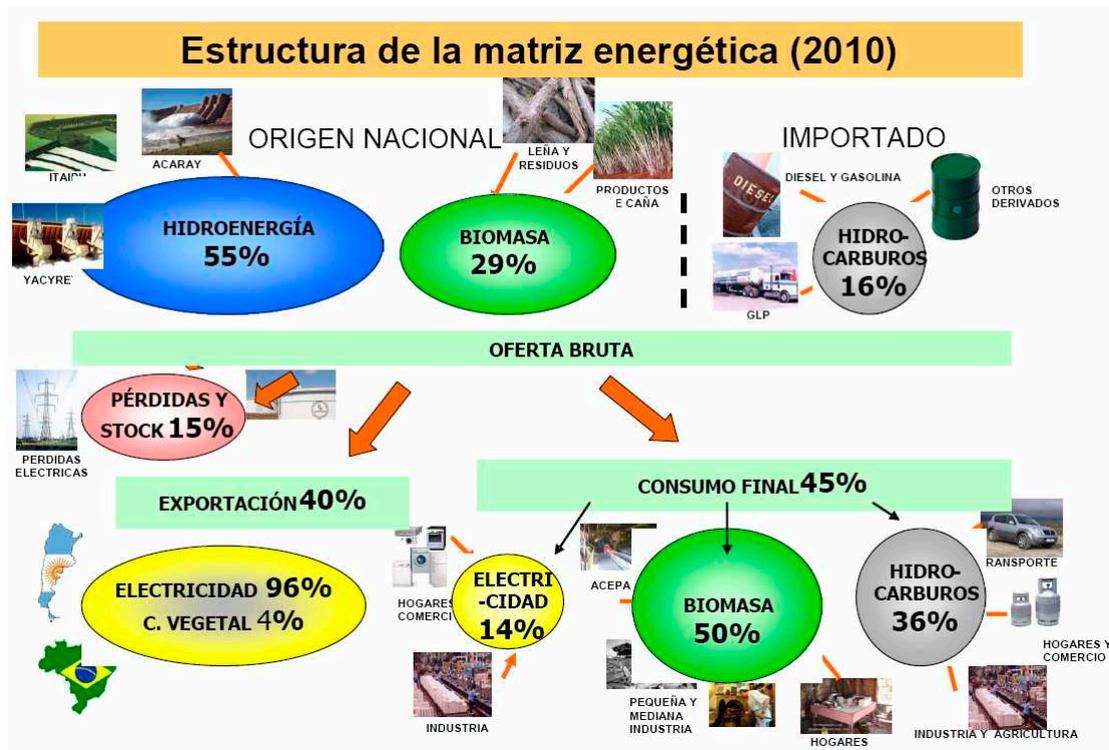
---



**Figura 2.1:** Proyecciones de la energía comercializada mundialmente por tipo de combustible.

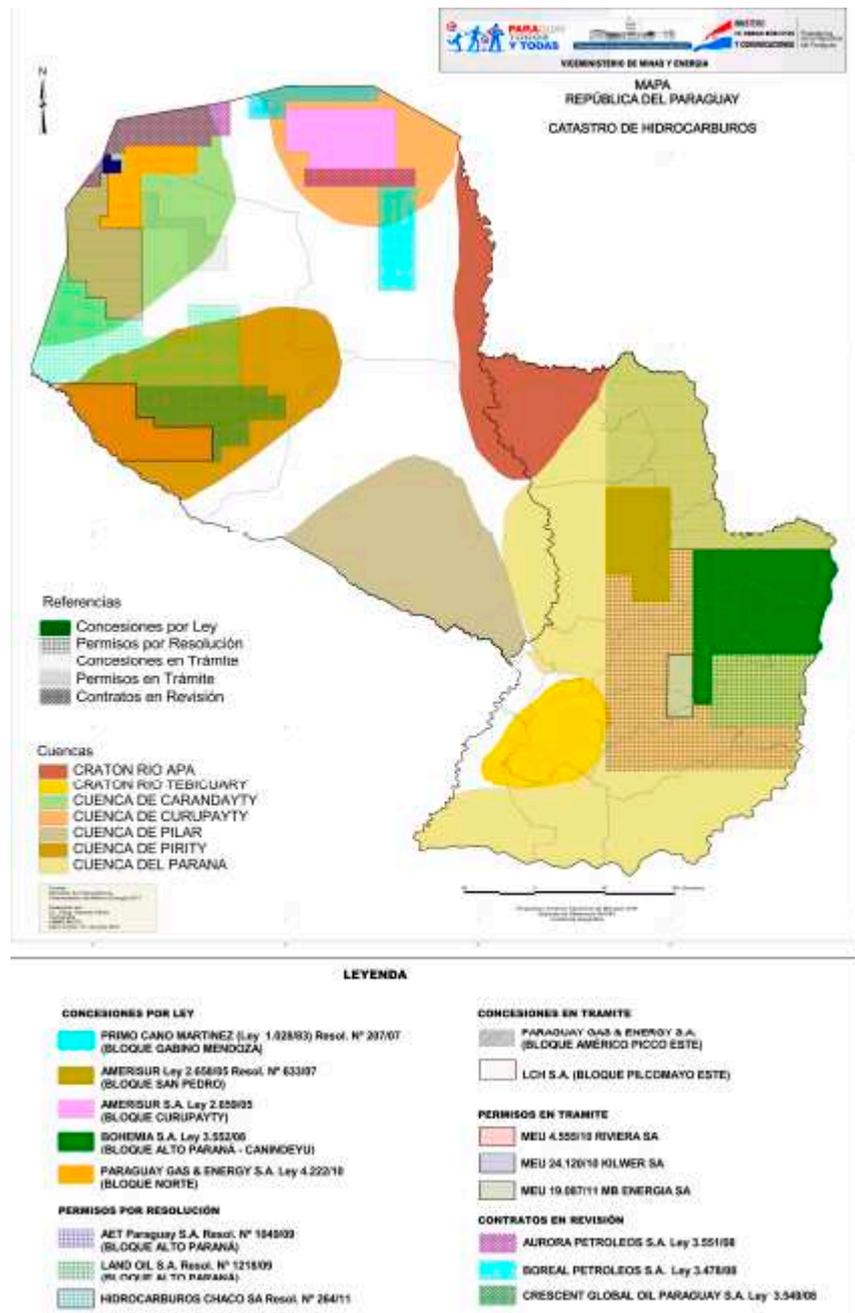
Fuente: International Energy Outlook 2010 de la U.S Energy Information Administration

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



**Figura 2.2:** Matriz Energética del Paraguay. Fuente: Vice Ministerio de Minas y Energía de Paraguay

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



**Figura 2.3:** Catastro de Hidrocarburos. Fuente: Vice Ministerio de Minas y Energía de Paraguay

## **2.2. Estado del Arte**

En la línea de investigación en la que se sitúa este trabajo se encuentran varias investigaciones previas [3, 5, 6, 7]. En [3, 5] se desarrollaron simuladores unidimensionales que tenían en cuenta la histéresis presente en la permeabilidad relativa y se consideraron los casos donde se tenían distintos valores de velocidades de flujo, pero no se consideraron los efectos de la gravedad (aplicables sólo para flujo horizontal). En [6] se desarrolló un simulador unidimensional que tenía en cuenta la histéresis y los efectos de la gravedad en el flujo, pero se consideró que la velocidad total del flujo era igual a cero. En [7] se desarrolló un simulador unidimensional que tenía en cuenta la histéresis y se consideraron los casos en que la velocidad era positiva, negativa o cero incluyendo los efectos de la gravedad simultáneamente, pero se encontraron casos en los que no se pudo determinar la solución.

En contraste con los trabajos anteriores, en este trabajo se consideran nuevos casos no tenidos en cuenta en la literatura previa y aparte de un simulador unidimensional se desarrolla un simulador bidimensional.

## **2.3. Objetivos**

Los objetivos de este trabajo son:

- Extender la aplicación del simulador a todos los casos posibles que pueden darse con los distintos valores de la velocidad total del flujo considerando la acción de la gravedad simultáneamente.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

---

- Extender la simulación para los casos bidimensionales(2D).
- Establecer un esquema de control del sistema.

## **CAPITULO 3**

### **MARCO TEORICO**

En este capítulo presentamos las definiciones y conceptos de parámetros y leyes físicas involucrados en el modelo matemático del sistema.

#### **3.1. Definiciones de parámetros físicos**

*Porosidad*: Es una porción diminuta del medio poroso capaz de ser ocupada por un fluido.

*Porosidad ( $\phi$ )*: Es la fracción del volumen total del medio poroso capaz de ser ocupada por fluido.

*Fase*: Es una región químicamente homogénea (misma composición química) y que está separada de otra región químicamente homogénea por medio de una interface.

*Mojabilidad*: Es el grado de preferencia que presenta un medio a ser mojado por una fase respecto a otra. Se denomina fase mojante a la fase preferida y fase no mojante a la menos preferida entre las dos. (En este trabajo la fase mojante es el agua y se representa por el subíndice  $w$ , y la no mojante es el gas y se representa por el subíndice  $g$ )

*Permeabilidad*: Es la capacidad de un medio poroso de conducir fluidos a través de sus poros interconectados.

---

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

---

*Permeabilidad absoluta* ( $\kappa$ ): Es la permeabilidad que presenta el medio en el caso de que haya una sola fase en su interior. Es una propiedad del medio y por tanto no depende del tipo de fluido.

*Permeabilidad efectiva* ( $\kappa_{\alpha}$ ): Es la permeabilidad que experimenta efectivamente una fase  $\alpha$  al pasar por un medio poroso cuando hay más de una fase en el interior del medio, como consecuencia de la obstrucción que presentan las demás fases al movimiento de la fase en cuestión en el medio poroso. Es una propiedad compartida por el medio y el fluido, por tanto, varía según el tipo de fluido.

*Permeabilidad relativa* ( $\kappa_{r\alpha}$ ): La permeabilidad relativa de la fase  $\alpha$  es el cociente entre la permeabilidad efectiva de dicha fase y la permeabilidad absoluta.

*Viscosidad* ( $\mu_{\alpha}$ ): Propiedad de los fluidos que caracteriza su resistencia a fluir, debida al rozamiento entre sus moléculas.

*Movilidad* ( $\lambda_{\alpha}$ ): La movilidad de una fase  $\alpha$  se define como el cociente entre la permeabilidad relativa de la fase y la viscosidad de la misma. La movilidad total es la suma de las movilidades de todas las fases.

*Flujo fraccional* ( $f_{\alpha}$ ): El flujo fraccional de una fase  $\alpha$  se define como el cociente entre la movilidad de esa fase y la movilidad total. Representa el flujo volumétrico (caudal) fraccional de una fase para un gradiente de presión dado y la presencia de más de una fase.

*Presión capilar* ( $p_c$ ): Se define como la diferencia de presión existente en cada fase ( $p_c = p_g - p_w$ ). Esta diferencia se da debido a la curvatura y la tensión de superficie de la interfaz entre las dos fases. La presión en el fluido mojante es menor que aquella en el fluido no mojante.

---

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

---

*Saturación ( $S_\alpha$ ):* Es la fracción del volumen del poro que ocupa la fase  $\alpha$ . En este trabajo suponemos que el poro está completamente lleno con ambas fases, es decir,  $S_w + S_g = 1$ .

*Saturación Residual:* Es el mínimo valor de la saturación de una fase en un poro. La saturación residual de la fase mojante (agua) se representa por  $S_{wc}$  y la de la fase no mojante (gas) por  $S_{rg}$ .

*Saturación normalizada ( $S$ ):* es una variable cuyo valor es 0 cuando  $S_w = S_{wc}$  y 1 cuando  $S_w = 1 - S_{rg}$ .

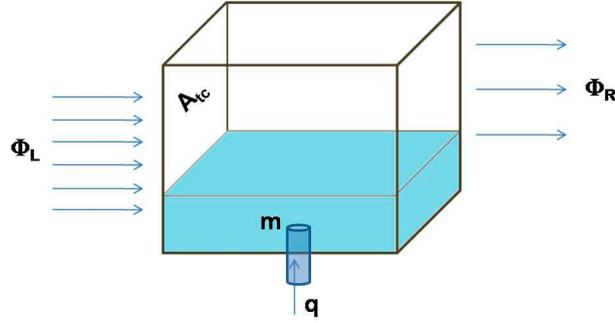
*Flujo másico ( $\Phi$ ):* es la cantidad de masa que atraviesa una superficie de área unitaria en la unidad de tiempo. Se define como el producto de la densidad de masa por la velocidad de la masa ( $\Phi = \rho \cdot \mathbf{u}$ )

### 3.2. Ley de conservación de masa

Consideremos un cubo diferencial cuyas aristas  $\Delta x_1$ ,  $\Delta x_2$ , y  $\Delta x_3$  se hallan situadas sobre los ejes  $x_1$ ,  $x_2$ , y  $x_3$  respectivamente, y adem'as con volumen  $V_c$ , área transversal  $A_{tc}$  y una masa  $m$  en su interior, como el de la figura 3.1. Supongamos que se tiene una fuente (o sumidero) de masa en el interior del cubo de intensidad  $q$  (con unidades de masa por unidad de volumen por unidad de tiempo) y que se tienen flujos másicos en las caras del cubo perpendiculares al eje  $x_1$ . La ley de conservación de masa establece que la variación de masa en el interior del cubo es igual a la diferencia entre las masas entrante y saliente del cubo [10], lo cual se puede expresar de la siguiente manera:

$$\Delta m = (\Phi_L A_{tc} - \Phi_R A_{tc} + q V_{tc}) \Delta t. \quad (3.1)$$

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



**Figura 3.1:** Cubo diferencial. Fuente: Elaboración propia

El volumen de la masa dentro del cubo denotado por  $V_m$  es:

$$V_m = \sum_{i=1}^{Np} \frac{V_{m_i}}{V_{p_i}} V_{p_i} = \sum_{i=1}^{Np} S V_{p_i}$$

donde  $Np$  es la cantidad de poros interconectados del cubo,  $V_{m_i}$  es el volumen de la masa contenida en el  $i$ -ésimo poro y  $V_{p_i}$  es el volumen del  $i$ -ésimo poro. Considerando que la saturación es la misma para cada poro del cubo (cubo de dimensiones muy pequeñas) y de la definición de porosidad, se tiene:

$$V_m = S \sum_{i=1}^{Np} V_{p_i} = S\phi V_c$$

Así, de la definición de flujo másico y la expresión de arriba, la ec. (3.1) puede reescribirse como:

$$\Delta(\rho \cdot V_m) = [(\rho \mathbf{u}_L - \rho \mathbf{u}_R) A_{tc} + q V_{tc}] \Delta t.$$

$$\Delta(\rho S \phi V_c) = [-\Delta(\rho \mathbf{u}) A_{tc} + q V_{tc}] \Delta t$$

Dividiendo la expresión anterior por  $\Delta t V_c$  y teniendo en cuenta que  $V_c = A_{tc} \Delta x_1$ , se tiene

$$\frac{\Delta(\rho S \phi)}{\Delta t} = -\frac{\Delta(\rho \mathbf{u})}{\Delta x_1} + q$$

---

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

---

Tomando los límites cuando  $\Delta t \rightarrow 0$  y  $\Delta x_1 \rightarrow 0$  tenemos

$$\frac{\partial(\rho S\phi)}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial x_1} + q \quad (3.2)$$

que es la expresión de la ley de conservación de masa en su forma diferencial unidimensional.

Asumiendo que no hay transferencia de masa entre fases en el flujo inmisible, la masa se conserva dentro de cada fase, por tanto para la fase  $\alpha$  se tiene

$$\frac{\partial(\rho_\alpha S_\alpha \phi)}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha)}{\partial x_1} + q_\alpha, \quad \alpha = w, g. \quad (3.3)$$

Para los casos en que se tengan flujos de masa en las direcciones de los tres ejes, la ley de conservación de masa tiene la siguiente expresión:

$$\frac{\partial(\rho_\alpha S_\alpha \phi)}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha) + q_\alpha \quad (3.4)$$

### 3.3. Ley de Darcy

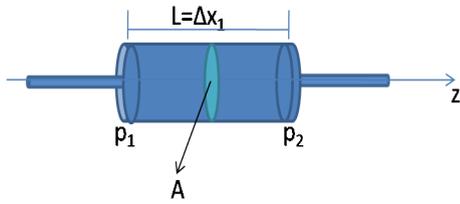
La Ley de Darcy relaciona la tasa de flujo volumétrico de cada fase de fluido a través de un medio poroso con su gradiente de presión, las propiedades del fluido (viscosidad,  $\mu_w$  o  $\mu_g$ ) y del medio (*permeabilidad efectiva*,  $\kappa_w$  o  $\kappa_g$ , y un área transversal, A). Por ejemplo en la dirección horizontal  $x_1$  ( Fig 3.2(a)), es escrita como

$$Q_w = -\frac{\kappa_w A}{\mu_w} \frac{\partial p_w}{\partial x_1}, \quad Q_g = -\frac{\kappa_g A}{\mu_g} \frac{\partial p_g}{\partial x_1} \quad (3.5)$$

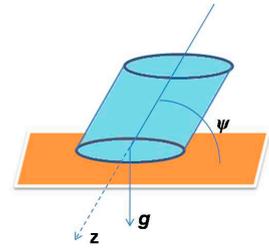
donde  $Q_\alpha$  es el caudal (flujo volumétrico) de la fase  $\alpha$ , luego, las velocidades de Darcy para ambas fases son  $u_w = Q_w/A$  y  $u_g = Q_g/A$ . Como resultado, vemos que

$$u_w = -\frac{\kappa_w}{\mu_w} \frac{\partial p_w}{\partial x_1}, \quad u_g = -\frac{\kappa_g}{\mu_g} \frac{\partial p_g}{\partial x_1} \quad (3.6)$$

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



(a) Flujo horizontal



(b) Flujo no horizontal

**Figura 3.2:** Flujo volumétrico. Fuente: Elaboración propia

Para un sistema de flujo de dos fases en 3D con fuerza gravitacional (Fig. 3.2(b)), la forma diferencial de la ley de Darcy para cada fase es:

$$\mathbf{u}_\alpha = -\frac{1}{\mu_\alpha} \kappa_\alpha (\nabla p_\alpha - \rho_\alpha g \nabla x_3), \quad \alpha = w, g, \quad (3.7)$$

donde  $g$  es la magnitud de la aceleración gravitacional y  $x_3$  es la profundidad.

## CAPITULO 4

### MODELO MATEMATICO

El modelo matemático del sistema se obtiene al combinar la ecuación de transporte y el modelo de histerésis para el sistema en cuestión.

En las deducciones usaremos la presión de la fase no mojante y la saturación de la fase mojante como las *variables primarias*

$$p = p_g, \quad S = S_w. \quad (4.1)$$

#### 4.1. Ecuación de Transporte

Consideramos el medio poroso como un tubo (de eje  $z$ ) con una inclinación ( $\psi$ ) respecto al plano horizontal, con un perfil de saturación inicial dado de dos fluidos inmiscibles e incompresibles (como el de la fig. 3.2(b)). La ecuación de transporte del sistema reservorio-fluidos se obtiene en base a la ley de conservación de masa y la ley de Darcy, y resulta ser una ecuación en derivadas parciales hiperbólica (autovalores reales). Para obtener la ecuación de transporte primero definimos la velocidad total de flujo como la suma de las velocidades de ambas fases, es decir:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_w + \mathbf{u}_g \quad (4.2)$$

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

---

Luego expresamos la velocidad de la fase mojante  $\mathbf{u}_w$  en términos de la velocidad total  $\mathbf{u}$ . Para obtener esta relación, recordando la definición de presión capilar  $p_c = p_g - p_w$ , aplicamos  $p_w = p_g - p_c$  en (3.7) para  $\alpha = w$

$$\mathbf{u}_w = -\kappa\lambda_w(\nabla p_o - \nabla p_c - \rho_w g \nabla x_3) \quad (4.3)$$

despejando  $\nabla p_g$  de (3.7) para  $\alpha = w$  y teniendo en cuenta (4.2) resulta

$$\nabla p_g = \frac{\mathbf{u}_w}{\kappa\lambda_g} - \frac{\mathbf{u}}{\kappa\lambda_g} + \rho_g g \nabla z$$

sustituyendo la expresión de arriba en (4.3) obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_w &= -\kappa\lambda_w \left[ \left( \frac{\mathbf{u}_w - \mathbf{u}}{\kappa\lambda_g} + \rho_g g \nabla z \right) - \nabla p_c - \rho_w g \nabla z \right] \\ \mathbf{u}_w &= -\frac{\lambda_w}{\lambda_g} \mathbf{u}_w + \frac{\lambda_w}{\lambda_g} \mathbf{u} - \kappa\lambda_w \rho_g g \nabla z + \kappa\lambda_w \nabla p_c + \kappa\lambda_w \rho_w g \nabla z \\ \left(1 + \frac{\lambda_w}{\lambda_g}\right) \mathbf{u}_w &= \frac{\lambda_w}{\lambda_g} \mathbf{u} + \kappa\lambda_w \nabla p_c + \kappa\lambda_w (\rho_w - \rho_g) g \nabla z \\ \mathbf{u}_w &= \frac{\lambda_w}{\lambda} \mathbf{u} + \kappa \frac{\lambda_w \lambda_g}{\lambda} \nabla p_c + \frac{\kappa \lambda_w \lambda_g}{\lambda} (\rho_w - \rho_g) g \nabla z \\ \mathbf{u}_w &= f_w \mathbf{u} + \kappa f_w \lambda_g \nabla p_c + \kappa f_w \lambda_g (\rho_w - \rho_g) g \nabla z \end{aligned}$$

Sustituyendo la expresión anterior en (3.4) para  $\alpha = w$  obtenemos la *ecuación de saturación* o *ecuación de transporte*: [10]

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot \{ \kappa f_w(S) \lambda_g(S) \left( \frac{dp_c}{dS} \nabla S - (\rho_w - \rho_g) g \nabla z \right) + f_w(S) \mathbf{u} \} = \tilde{q}_w(p, S) \quad (4.4)$$

Consideramos que el fluido es incompresible y que  $p_c = 0$  [10]. Así también, consideramos que los términos fuente son iguales a cero [6], luego la ecuación de transporte tiene la siguiente expresión:

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot \{ f_w \mathbf{u} - \lambda_g f_w (\rho_g - \rho_w) g \kappa \nabla x_3 \} = 0 \quad (4.5)$$

---

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

---

la cual podemos reescribir como

$$\partial_t S + \nabla \cdot F = 0 \quad (4.6)$$

donde  $F$  se denomina función flujo y su expresión es:

$$F = \frac{f_w \mathbf{u} - \lambda_g f_w (\rho_g - \rho_w) g \kappa \nabla x_3}{\phi} \quad (4.7)$$

Podemos observar que la función flujo ( $F$ ) depende del flujo fraccional de la fase mojante  $f_w$  y de la movilidad de la fase no mojante  $\lambda_g$ , por tanto, depende de las permeabilidades relativas de las fases mojante y no mojante.

## 4.2. Modelo de histéresis

En los experimentos hechos con núcleos (muestras cilíndricas de los suelos) [1] se pudo apreciar que las permeabilidades relativas de las fases dependen de la saturación, de la tendencia de la saturación y del valor de la saturación al momento del cambio de la tendencia de la saturación. En la Figura 4.1(a) se presentan curvas experimentales que describen el comportamiento de las permeabilidades relativas de las fases. En la Figura 4.1(a) se puede observar que cuando se lleva a cabo un proceso de drenaje primario, es decir, cuando el medio poroso está completamente lleno con el fluido de fase mojante y se empieza a extraer por primera vez dicho fluido (a la par que se va inyectando fluido de fase no mojante), las permeabilidades relativas siguen la curvas de drenaje primario etiquetadas con 0. Una vez que se extrae completamente la fase mojante del reservorio debido al drenaje primario, cuando se vuelve a inyectar fluido de fase mojante (a la par que se extrae fluido de fase no mojante), es decir, se lleva a cabo un proceso de imbibición (imbibición secundaria), las permeabilidades relativas presentan

---

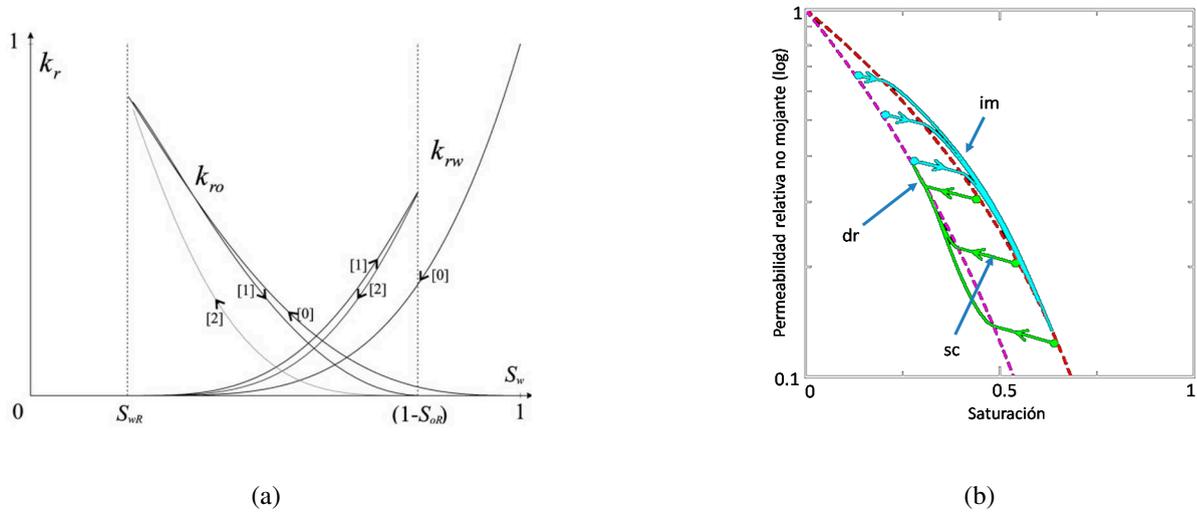
**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

---

un comportamiento distinto al del drenaje primario, como se puede apreciar en las curvas etiquetadas con 1. Luego de llenarse el reservorio con fluido de fase mojante al máximo posible (observemos que aparece una saturación residual de la fase no mojante) debido al proceso de imbibición secundaria, cuando se vuelve a extraer fluido de fase mojante (y a la par se inyecta fluido de fase no mojante), es decir, cuando se produce un drenaje secundario, las permeabilidades relativas presentan nuevamente un comportamiento distinto. Este comportamiento es distinto a los de los dos procesos anteriores, como se observa en las curvas etiquetadas con 2. Para procesos de drenaje o imbibición posteriores, las permeabilidades relativas siguen las mismas curvas 1 y 2 respectivamente, siempre y cuando el cambio de tendencia de saturación se produzca cuando el reservorio se halla completamente lleno o completamente vacío de una fase. Si hay un cambio en la tendencia de la saturación mientras el reservorio no está completamente lleno o vacío de una fase, aparecen nuevos comportamientos de la permeabilidad relativa. Estos comportamientos se representan por curvas intermedias denominadas curvas de scanning, y que se pueden observar en la Figura 4.1(b). En los experimentos se pudo observar que los cambios en la permeabilidad relativa son irreversibles al recorrer las curvas de drenaje o imbibición y que son aproximadamente reversibles sobre las curvas de scanning. En este trabajo nos enfocamos en los casos en que se llevan a procesos secundarios.

Para modelar el fenómeno de histéresis observado en las permeabilidades relativas utilizamos en este trabajo el *Scanning Hysteresis Model*, presentado en [3, 5] e inspirado en los resultados de [1]. Por simplicidad, suponemos que la permeabilidad relativa de la fase no mojante presenta histéresis mientras que la fase mojante no lo hace. Este modelo caracteriza la histéresis por medio de curvas de contorno de drenaje e imbibición y curvas intermedias de scanning.

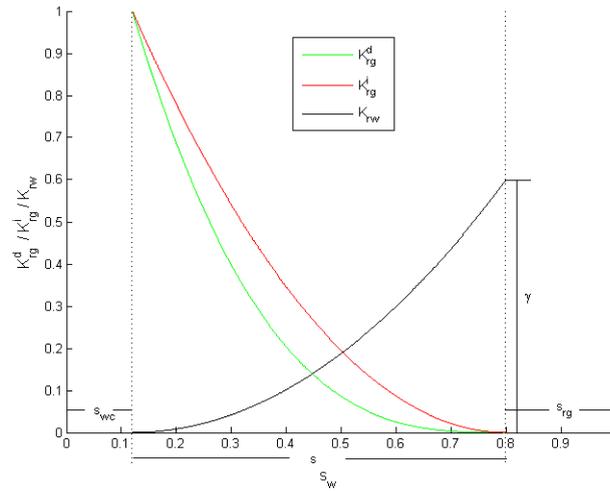
**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



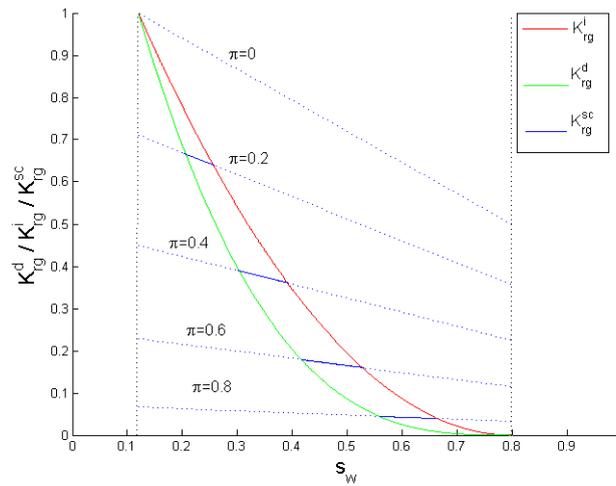
**Figura 4.1:** Curvas de las permeabilidades relativas. (a) Curvas Experimentales de procesos irreversibles: [1] drenaje primario, [2] imbibición secundaria, y [3] drenaje secundario. Fuente: [4]. (b) Curvas de scanning representando procesos intermedios aproximadamente reversibles de drenaje e imbibición. Fuente: [3].

Estas últimas curvas están determinadas cada una con un valor de un parámetro denominado  $\pi$ , el cual es una variable de memoria que recuerda el valor de la saturación en el momento del cambio de la tendencia de la saturación (Figura 4.2). La región conteniendo a las curvas scanning delimitada por las curvas de drenaje e imbibición se denomina región de scanning y se representa por  $\Omega$ . Las curvas de drenaje e imbibición representan procesos irreversibles, por tanto estas curvas tienen una orientación determinada (flujo en una dirección), y las curvas de scanning representan procesos reversibles (los cambios en la permeabilidad relativa son reversibles), por tanto el flujo sobre estas curvas puede tener cualquiera de las dos direcciones de flujo.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



(a)



(b)

**Figura 4.2:** Scanning Hysteresis Model: (a) Funciones de drenaje (en verde) e imbibición (en rojo) de la permeabilidad relativa de la fase no mojanete, y la permeabilidad relativa de la fase mojanete; (b) curvas de scanning (en azul) etiquetadas con valores de  $\pi$ .

Fuente: Elaboración propia.

---

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

---

Las expresiones matemáticas para la permeabilidad relativa de la fase no mojanante ( $\kappa_{rg}$ ) son:

$$\kappa_{rg}^d(S) = (1 - S)^\eta \quad \text{para } 0 < S < 1 \quad \partial_t S < 0, \quad (4.8)$$

$$\kappa_{rg}^i(S) = (1 - S)^\theta \quad \text{para } 0 < S < 1 \quad \partial_t S > 0, \quad (4.9)$$

$$\kappa_{rg}^{sc}(S, \pi) = \frac{(1 - \pi)^\xi}{(1 - \alpha\pi)^\zeta} (1 - \alpha S)^\zeta \quad \text{para } S \in \Omega. \quad (4.10)$$

Los parámetros  $\eta$ ,  $\theta$ ,  $\zeta$ ,  $\xi$ ,  $\alpha$  son parámetros utilizados para ajustar el modelo matemático de acuerdo a las curvas experimentales.

La expresión matemática que describe la permeabilidad relativa de la fase mojanante ( $\kappa_{rw}$ ) es:

$$\kappa_{rw}(S) = \gamma S^\beta, \quad (4.11)$$

donde  $\gamma$  y  $\beta$  son parámetros de ajuste. Los valores de los parámetros de ajuste utilizados en este trabajo son los propuestos en [6], y son  $\eta = 3$ ,  $\theta = 2$ ,  $\zeta = 1$ ,  $\xi = 1$ ,  $\alpha = 0,5$ ,  $\gamma = 1$ , y  $\beta = 2$ .

Las curvas de scanning están definidas en el intervalo  $S^i(\pi) < S < S^d(\pi)$ . Los valores de los límites de este intervalo se obtienen al igualar  $K_{rg}^i(S^i(\pi)) = K_{rg}^{sc}(S^i(\pi), \pi)$  y  $K_{rg}^d(S^d(\pi)) = K_{rg}^{sc}(S^d(\pi), \pi)$ .

### 4.3. Efectos de la histéresis en la función flujo

Como habíamos mencionado anteriormente, el flujo depende de la permeabilidad relativa de la fase no mojanante, debido a esto, los efectos de la histerésis en la permeabilidad relativa se trasladan a la función flujo y el flujo también presenta histéresis, por tanto tendremos un flujo de imbibición, un flujo de drenaje y un flujo de scanning. Así el flujo también depende tanto de la saturación como de  $\pi$ . Las expresiones para los distintos tipos de flujo son las siguientes:

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

---

$$F^{sc}(S, \pi) = F(S, \pi) \text{ para } \partial_t \pi = 0, \text{ (región de } scanning) \quad (4.12)$$

$$F^d(S) = F(S, \pi^d(S)) \text{ para } \partial_t \pi < 0, \text{ (drenaje)} \quad (4.13)$$

$$F^i(S) = F(S, \pi^i(S)) \text{ para } \partial_t \pi > 0, \text{ (imbibición)}. \quad (4.14)$$

Vimos que la expresión de la función flujo era

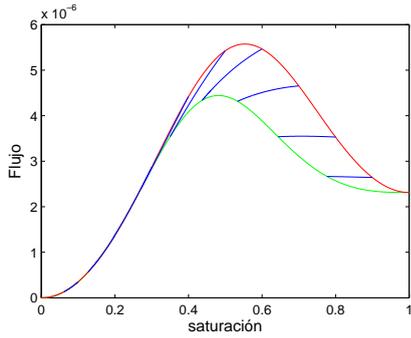
$$F = \frac{f_w \mathbf{u} - \lambda_g f_w (\rho_g - \rho_w) g \kappa \nabla z}{\phi}, \quad (4.15)$$

de los dos términos que conforman la función flujo, al término que contiene a la velocidad total  $\mathbf{u}$  lo llamaremos término de velocidad, y al término que contiene a la aceleración gravitacional lo llamaremos término de gravedad. En la ecuación (4.15) podemos apreciar que ambos términos son afectados por la histéresis presente en la permeabilidad relativa de la fase no mojanje (la permeabilidad relativa está contenida en el flujo fraccional  $f_w$  y en la movilidad  $\lambda_g$ ). Así la forma del lazo de histéresis de la función flujo varía según el valor de la velocidad total y de la aceleración gravitacional.

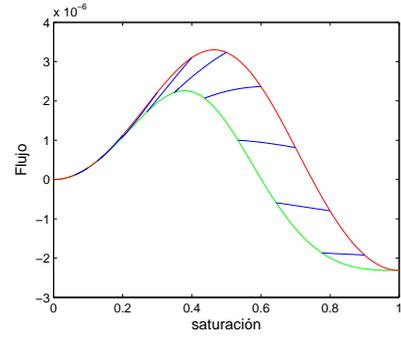
En las Figuras 4.3, 4.4, y 4.5 se presentan gráficos de los lazos de histéresis de la función flujo para distintos valores de la velocidad total de flujo y la aceleración gravitacional. En la Figura 4.3 se muestran lazos de histéresis cuando la aceleración gravitacional y las velocidades totales de flujo son distintas de cero. En la Figura 4.4 se muestran lazos de histéresis cuando la aceleración gravitacional es cero y las velocidades totales de flujo son distintas de cero. En la Figura 4.5 se presenta el lazo de histéresis cuando la velocidad total de flujo es cero y la aceleración gravitacional no lo es.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

---

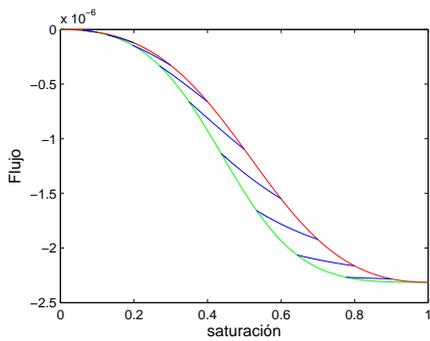


(a)  $u > 0$  y  $g \neq 0$

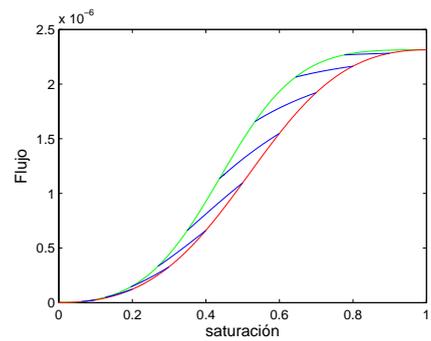


(b)  $u < 0$  y  $g \neq 0$

**Figura 4.3:** Lazos de histéresis de la función flujo para  $u \neq 0$  y  $g \neq 0$ . Fuente: Elaboración propia.



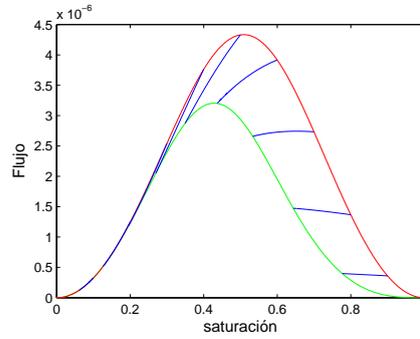
(a)  $u < 0$  y  $g = 0$



(b)  $u > 0$  y  $g = 0$

**Figura 4.4:** Lazos de histéresis de la función flujo para  $u \neq 0$  y  $g = 0$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



(a)  $\mathbf{u} = 0$  y  $g \neq 0$

**Figura 4.5:** Lazo de histéresis de la función flujo para  $\mathbf{u} = 0$  y  $g \neq 0$ . Fuente: Elaboración propia.

#### 4.4. Modelo matemático completo

Al introducir el modelo de histéresis en la ecuación de transporte obtenemos el modelo matemático completo. Este modelo está descrito por las siguientes ecuaciones:

$$\partial_t S + \nabla F^j = 0, \quad j = d, i \quad (4.16)$$

cuando se tiene un flujo de drenaje o imbibición, y

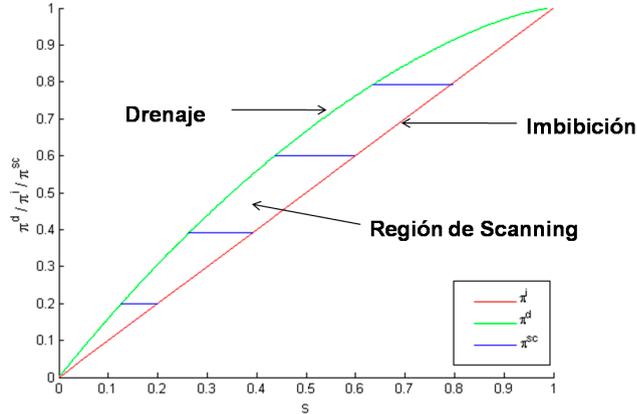
$$\partial_t S + \nabla F^{sc} = 0 \quad (4.17)$$

$$\partial_t \pi = 0 \quad (4.18)$$

cuando se tenga un flujo de scanning.

Este modelo de histéresis introduce una variable independiente adicional al sistema, la variable  $\pi$ . Así nuestro sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas puede ser descrito por dos variables de estado, la saturación y  $\pi$ . En la Figura 4.6 se muestra el espacio de estado.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



**Figura 4.6:** Espacio de estado del sistema medio poroso-fluidos. Fuente: Elaboración propia

#### 4.5. Ecuación de la velocidad

Bajo la asunción de que los fluidos son incompresibles, aplicamos  $S_w + S_g = 1$  y (4.2) a 3.4 con  $\alpha = w$  para ver que

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u}_w + \nabla \cdot \mathbf{u}_g &= -\frac{\partial(\phi \rho_w S_w)}{\partial t} - q_w - \frac{\partial(\phi \rho_g S_g)}{\partial t} - q_g \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_w + \nabla \cdot \mathbf{u}_g &= -\frac{\rho_w \partial(\phi S_w)}{\partial t} + \frac{q_w}{\rho_w} - \frac{\rho_g \partial(\phi(1-S_w))}{\partial t} + \frac{q_g}{\rho_g} \\ \nabla \cdot (\mathbf{u}_w + \mathbf{u}_g) &= -\frac{\partial(\phi S_w)}{\partial t} + \tilde{q}_w - \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial(\phi S_w)}{\partial t} + \tilde{q}_g \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= \tilde{q}(p, S) \equiv \tilde{q}_w(p, S) + \tilde{q}_g(p, S) \end{aligned} \quad (4.19)$$

donde  $\tilde{q}_w = q_w/\rho_w$  y  $\tilde{q}_g = q_g/\rho_g$ . Esta ecuación de la velocidad permite determinar la velocidad de flujo total en todo el dominio espacial. Asumiendo que las fuentes internas son cero la ecuación (4.20) toma la forma

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (4.20)$$

a esta ecuación se le denomina *ecuación de Laplace*.

## CAPITULO 5

### ESQUEMA NUMERICO

Simular el comportamiento de un sistema implica resolver las ecuaciones que modelan al sistema para los distintos instantes de tiempo. En este capítulo se hace un análisis de las soluciones de las ecuaciones hiperbólicas para fundamentar el uso de métodos numéricos en la resolución de las ecuaciones que modelan el sistema en cuestión y luego se describe el método numérico de resolución utilizado.

#### 5.1. Análisis de las soluciones de la ecuación hiperbólica

Supongamos primeramente que la función flujo depende solamente de la saturación, así tenemos

$$\partial_t S + \partial_z F(S) = 0. \quad (5.1)$$

La solución de esta ecuación hiperbólica tiene la forma  $S(z, t) = S_0(z - at)$ , donde  $a$  es la velocidad de onda cada punto que conforma la condición inicial y que esta dada por  $a = \partial_S F$ .

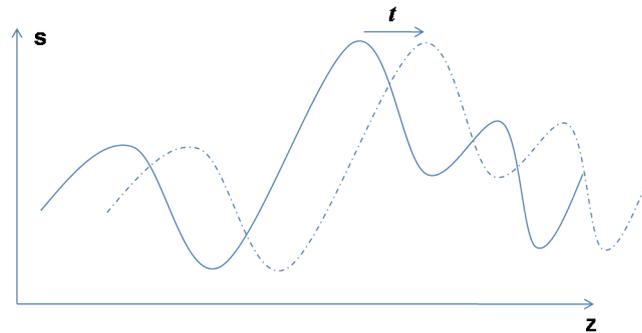
##### 5.1.1. Caso en que $F$ es una función lineal de $S$

Para los casos en que  $F$  es una función lineal de  $S$ , o sea,  $F = CS$ , la velocidad de onda es constante para cada punto ya que  $a = \partial_S F = C$ . Así, la solución de la ecuación hiperbólica

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

---

va a ser una onda con forma del perfil dado en las condiciones iniciales que se translada con velocidad  $a = C$  (Figura 5.1).



**Figura 5.1:** Solución de Onda cuando  $F$  es lineal. Fuente: Elaboración propia.

### 5.1.2. Curvas Características

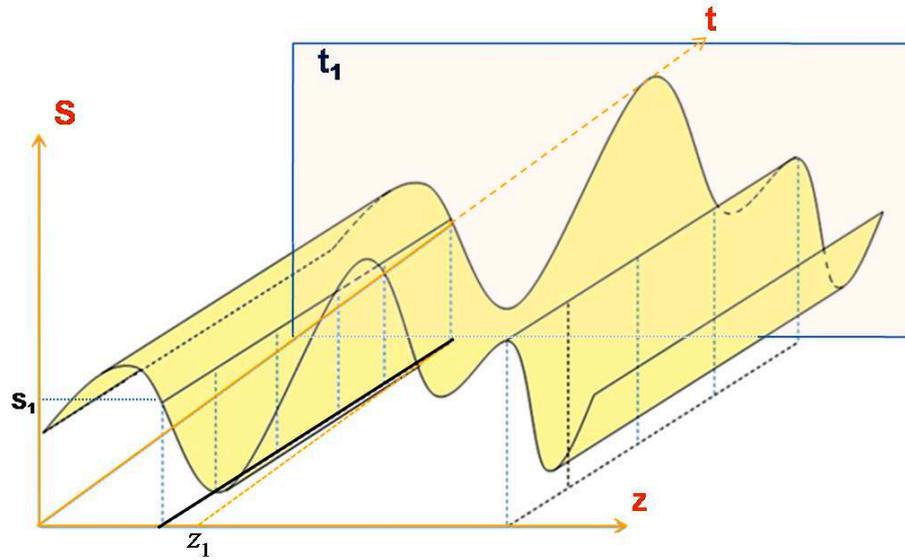
Las curvas características de la solución de onda son curvas cuyas pendientes dan la velocidad de onda de cada punto con saturación constante en un instante determinado, cada punto del perfil inicial tiene asociada una curva característica. Las soluciones de las ecuaciones hiperbólicas pueden ser representadas a través de sus características en el plano ( $z-t$ )

Para el caso en que  $F$  es lineal las curvas características son líneas rectas como se muestra en la Figura 5.2(b). Para  $F$  no lineal, las características no necesariamente son líneas rectas.

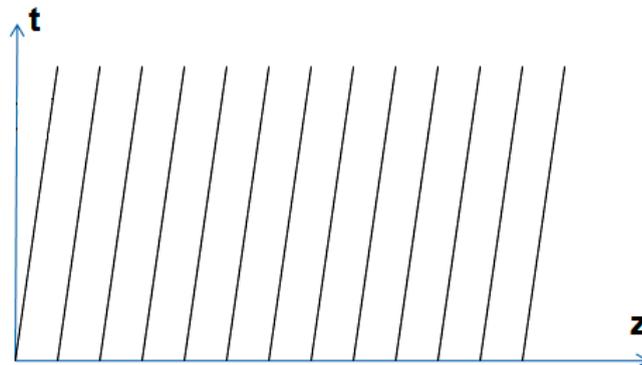
### 5.1.3. Caso en que $F$ es una función no lineal de $S$

En los casos en que  $F$  es no lineal, la velocidad de onda varía en cada punto en función a la saturación. Para estos casos, en general, no es posible determinar la solución en forma analítica.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



(a) Característica del punto con saturación  $S_1$



(b) Características para  $F$  lineal

**Figura 5.2:** Curvas características. Fuente: Elaboración propia.

Por ejemplo, suponiendo que  $F = \frac{1}{2}S^2$ , la velocidad de onda es  $a = S$ , así los puntos con saturaciones distintas viajan con velocidades distintas y en general no es posible determinar la forma de la solución por medios analíticos.

### Soluciones Analíticas conocidas

Existen casos particulares para los que se conocen las soluciones analíticas de la ecuación hiperbólica; estos casos corresponden al *Problema de Riemann*. Problema de Riemann se denomina al caso en que se tienen leyes de conservación junto con condiciones iniciales constantes a trozos con una discontinuidad [15], es decir, condiciones iniciales de la forma:

$$S|_{t=0} = \begin{cases} S_L & \text{para } z < z_{\text{frontera}}, \\ S_R & \text{para } z > z_{\text{frontera}}. \end{cases}$$

Las soluciones del Problema de Riemann se denominan Soluciones de Riemann y pueden presentar distintos tipos de soluciones de ondas: ondas de choque, ondas de rarefacción, o una combinación de éstas, dependiendo de los valores de las condiciones iniciales a la izquierda y a la derecha de la frontera.

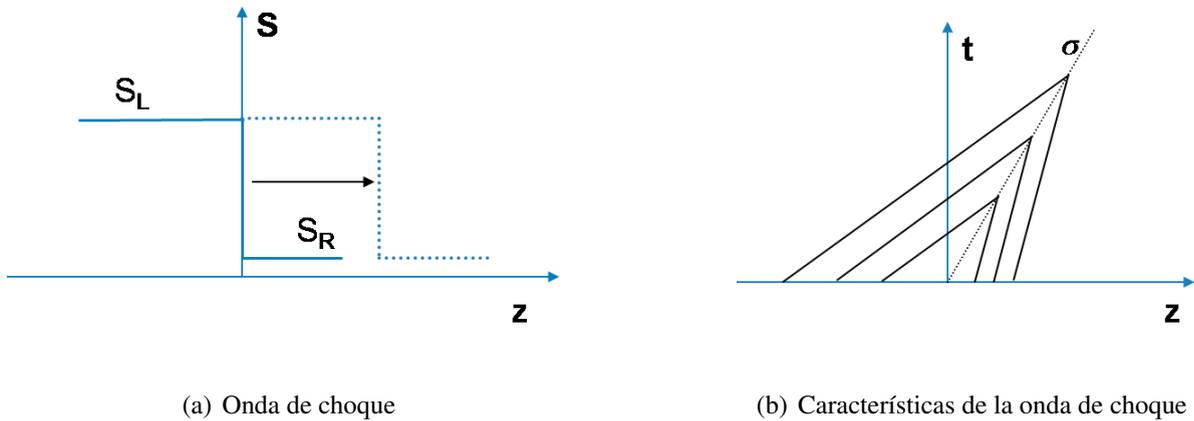
**Ondas de Choque** Las ondas de choque son ondas que resultan de la interacción entre una onda lenta y una onda rápida. Esta interacción se da cuando la onda más rápida alcanza a la más lenta, produciéndose así un “choque” entre ambas ondas.

Por ejemplo, para la función flujo no lineal anterior  $F = \frac{1}{2}S^2$  y cuando se tienen como condiciones iniciales las de la Figura 5.3(a), la solución es una onda de choque que se expresa analíticamente como [15]:

$$S(z, t) = \begin{cases} S_L & \text{para } z < \sigma t, \\ S_R & \text{para } z > \sigma t. \end{cases}$$

donde  $\sigma$  es la velocidad de la onda de choque y  $\sigma = \frac{1}{2}(S_L + S_R)$ .

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

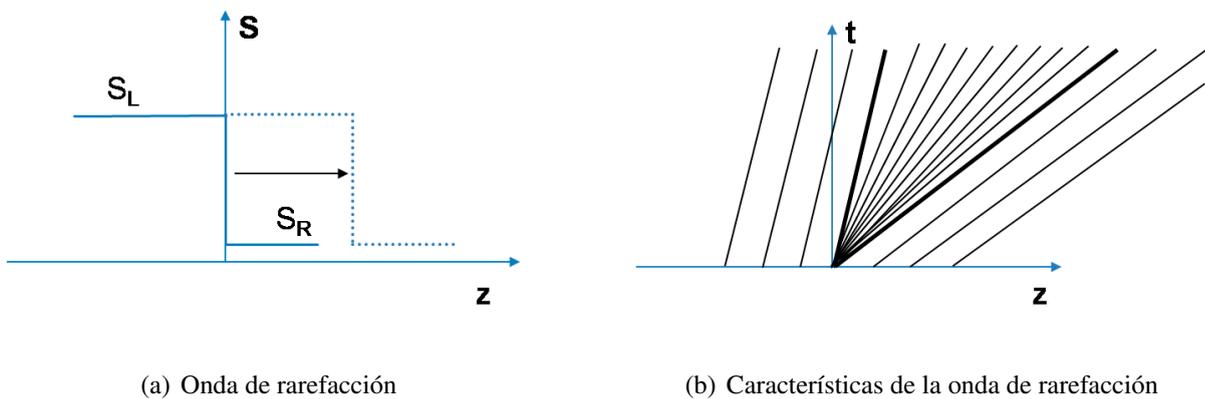


**Figura 5.3:** Onda de choque y sus características. Fuente: Elaboración propia

En general, cualquiera sea la expresión de la función flujo, la velocidad de la onda de choque se obtiene a partir de la condición de Rankine-Hugoniot [15]:

$$\sigma = \frac{F(S_R) - F(S_L)}{S_R - S_L} \quad (5.2)$$

**Ondas de Rarefacción** Se denomina onda de rarefacción a la onda formada por una onda lenta y una onda rápida, cuando la onda más rápida se va alejando de la onda más lenta a medida que se incrementa el tiempo.



**Figura 5.4:** Onda de rarefacción y sus características. Fuente: Elaboración propia.

---

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

---

Por ejemplo, para la función flujo no lineal  $F = \frac{1}{2}S^2$  y con condiciones iniciales como las de la Figura 5.4(a), la solución de la ecuación hiperbólica es una onda de rarefacción cuya expresión analítica es [15]:

$$S(z, t) = \begin{cases} S_L & \text{para } z < S_L t, \\ \frac{z}{t} & \text{para } S_L t < z < S_R t \\ S_R & \text{para } z > S_R t. \end{cases}$$

### **Solución para el caso general de condiciones iniciales continuas**

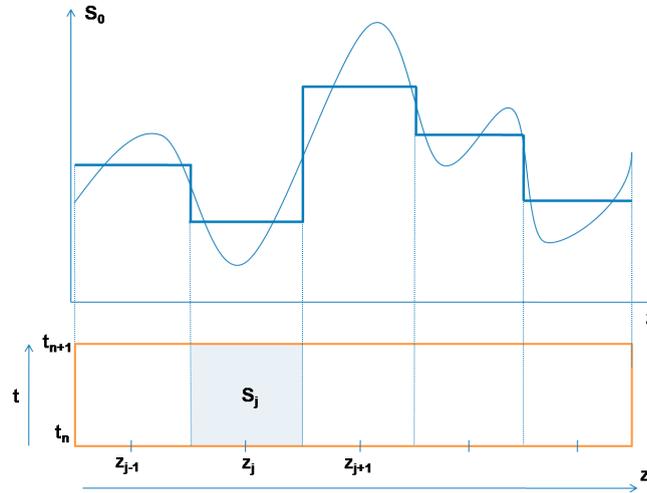
Para determinar la solución de la ecuación hiperbólica en los casos en que se tienen condiciones iniciales continuas se debe recurrir al uso de métodos numéricos. En este trabajo se utiliza el método numérico de volumen finito denominado Método de Godunov, el cual es un método conservativo que asegura la conservación de masa.

Para aplicar este método discretizamos el plano  $z$ - $t$  en bloques denominados celdas y discretizamos las condiciones iniciales en intervalos correspondientes a los de las celdas (Figura 5.5).

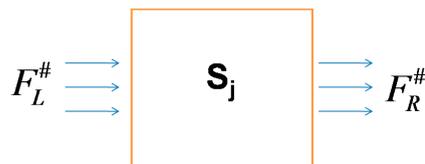
El método de Godunov establece que la saturación de una celda para el siguiente instante de tiempo se obtiene a partir del valor de la saturación actual y los flujos numéricos en las fronteras de dicha celda según la fórmula:

$$S_j^{n+1} = S_j^n - \frac{\tau}{h} [F_R^\# - F_L^\#]$$

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



**Figura 5.5:** Discretización en celdas. Fuente: Elaboración propia.



**Figura 5.6:** Flujos en las fronteras de celda. Fuente: Elaboración propia

**Solución para las ecuaciones que modelan el sistema medio poroso-fluidos**

La función flujo para el sistema medio poroso-fluidos es una función no lineal de  $S$ , por tanto, para resolver las ecuaciones del modelo matemático tenemos que discretizar las condiciones iniciales y aplicar el método de Godunov. Además la función flujo depende no sólo de la saturación sino también de  $\pi$ , por tanto es necesario extender el método de Godunov para incluir a la variable  $\pi$ .

## 5.2. Método de Godunov Corregido

El método numérico utilizado en este trabajo para determinar la solución de la ecuación que modela el sistema reservorio-fluido es el método de Godunov extendido [6], el cual es una extensión del método de Godunov clásico para incluir el parámetro  $\pi$ . Este esquema consta de dos etapas, predicción y corrección.

En la etapa de *predicción* se aplica el método de Godunov clásico para determinar el valor de la saturación para el siguiente instante de tiempo. Así, la saturación de una celda para el siguiente instante de tiempo se calcula en base a: la saturación actual, los pasos de tiempo y de espacio (tamaños de los sub-intervalos en que se dividen los intervalos de tiempo y espacio, respectivamente), y los flujos numéricos (flujos promedio) en las fronteras izquierda y derecha de la celda. Los flujos en las fronteras se determinan a partir de las soluciones de Riemann; las soluciones de Riemann se explican en la siguiente sección. La fórmula para el cálculo de la saturación de la  $j$ -ésima celda para el siguiente instante de tiempo ( $n + 1$ ) es:

$$S_j^{n+1} = S_j^n - \frac{\tau}{h} [F^\#((S_j^n, \pi_j^n), (S_{j+1}^n, \pi_{j+1}^n)) - F^\#((S_{j-1}^n, \pi_{j-1}^n), (S_j^n, \pi_j^n))] \quad (5.3)$$

En la etapa de *corrección* se determina el valor de  $\pi$  de una celda para el siguiente instante de tiempo según la siguiente regla:

- Si el estado  $(S_j^{n+1}, \pi_j^n)$  cae dentro de la región de scanning entonces  $\pi_j^{n+1} = \pi_j^n$ .
- Si el estado  $(S_j^{n+1}, \pi_j^n)$  cae fuera de la región de scanning y debajo de la curva de imbibición entonces  $\pi_j^{n+1} = \pi^i(S_j^{n+1})$ .

---

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

---

- Si el estado  $(S_j^{n+1}, \pi_j^n)$  cae fuera de la región de scanning y encima de la curva de drenaje entonces  $\pi_j^{n+1} = \pi^d(S_j^{n+1})$ .

Este método de corrección se fundamenta en el hecho de que el paso de un estado situado en una curva de scanning a otro sobre la misma curva no cambia el valor del valor de  $\pi$  (el valor de  $\pi$  se conserva en la misma curva de scanning), sin embargo, el paso de un estado sobre una curva de scanning con una saturación dada a otro estado cuya saturación esté fuera del rango de valores de saturación para dicha curva de scanning implica un movimiento sobre la curva de drenaje o de imbibición, y como el valor de  $\pi$  no se conserva sobre las curvas de drenaje o imbibición, se tiene que hacer la corrección de  $\pi$  al valor de  $\pi$  correspondiente al estado con saturación igual al último valor de saturación y que se halla en la curva de drenaje o imbibición según corresponda.

### 5.2.1. Determinación de Flujo en Frontera

El flujo en una frontera de una celda se determina a partir de la solución del Problema de Riemann local (la discontinuidad se presenta en la frontera común entre dos celdas) con condiciones iniciales:

$$(S, \pi)|_{t=0} = \begin{cases} (S_L, \pi_L) & \text{para } z < z_{\text{frontera}}, \\ (S_R, \pi_R) & \text{para } z > z_{\text{frontera}}. \end{cases}$$

Las soluciones de Riemann pueden ser distintos tipos de ondas (ondas de choque, ondas estacionarias, ondas de rarefacción, o un conjunto de éstas) dependiendo de los estados de las celdas a la izquierda  $L$  y a la derecha  $R$  de una frontera, específicamente de la localización de

---

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

---

estos estados en el plano  $F - S$ . Por tanto, se necesita de un método que permita determinar la solución cualesquiera sean los valores de los estados  $L$  y  $R$ . El método utilizado para determinar la solución de Riemann correcta dados dos estados  $L$  y  $R$  cualesquiera está basado en el método empleado en [7, 6]. Se divide la región de scanning  $\Omega$  en un tipo de subregiones denominadas  $L$ -Regiones y en otro tipo de subregiones denominadas  $R$ -Regiones. Este último conjunto de subregiones depende de cada  $L$ -Región, es decir, cada  $L$ -Región determina un conjunto de  $R$ -Regiones. A cada par  $L$ -Región -  $R$ -Región le corresponde una solución con una determinada forma, así, para determinar la solución correspondiente a los estados  $L$  y  $R$  basta con determinar en qué  $L$ -Región y en qué  $R$ -Región caen los estados  $L$  y  $R$  respectivamente.

A continuación se hace un análisis de las soluciones de Riemann según la ubicación de los estados  $L$  y  $R$  en el plano  $F - S$  y se describe el método de división de la región scanning en  $L$ -Regiones y  $R$ -Regiones para la determinación de las soluciones de Riemann.

### **Soluciones de Riemann cuando $L$ y $R$ se encuentran sobre las curvas de imbibición o drenaje**

Cuando  $L$  y  $R$  están situados en la curva de imbibición (drenaje) se tiene un flujo de imbibición (drenaje). Puesto que en el flujo de imbibición (drenaje) la saturación se incrementa (decrementa) con el tiempo, o sea,  $\partial_t S > 0$  ( $\partial_t S < 0$ ), una onda de rarefacción se caracteriza por una velocidad  $\lambda = \partial_S F^j(S)$  que se incrementa de forma continua y monótona desde  $S_L$  a  $S_R$ . Adicionalmente, una onda de choque con velocidad  $\sigma$  satisface la condición Rankine-Hugoniot (RH):

$$\sigma = \frac{F^j(S_R) - F^j(S_L)}{S_R - S_L}, \quad j = i, d; \quad (5.4)$$

---

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

---

es más, el choque tiene que satisfacer la condición de entropía de Oleinik para ecuaciones escalares. Por tanto, secuencias admisibles de ondas de choque y rarefacción pueden ser construidas gráficamente usando el casco cóncavo o convexo de las curvas de flujo, de acuerdo con [14].

Habíamos dicho que las curvas de imbibición y drenaje eran curvas orientadas. Ahora determinaremos el sentido del flujo sobre las curvas de imbibición y drenaje. Sea,  $S_U$  la saturación que maximiza  $F^i(S)$  ( $U := \{(S_U, F_U) : F_U = \max(F^i(S)) \text{ para } 0 \leq S \leq 1\}$ ). Como en una imbibición (drenaje)  $\partial_t S > 0$  ( $\partial_t S < 0$ ), la orientación del flujo de imbibición (drenaje) será aquella para la que se cumplan las siguientes condiciones,  $S_U \leq S_L \leq S_R$  o  $S_R \leq S_L \leq S_U$  ( $S_U \leq S_R \leq S_L$  o  $S_L \leq S_R \leq S_U$ ). En la Figura 5.7 se muestra un choque que satisface estas condiciones, podemos ver en la Figura 5.8 que se cumple  $\partial_t S > 0$ , ya que  $S(x_1, t_1) < S(x_1, t_2)$ . Para otros casos como  $S_U \leq S_R \leq S_L$ ,  $S_L \leq S_R \leq S_U$  ( $S_U \leq S_L \leq S_R$ ,  $S_R \leq S_L \leq S_U$  para drenaje),  $S_L \leq S_U \leq S_R$ , y  $S_R \leq S_U \leq S_L$  la solución de Riemann debe contener ondas scanning; de lo contrario  $\partial_t S$  sería negativa y consecuentemente la solución no podría estar en la curva de imbibición.

**Soluciones de Riemann cuando  $L$  y  $R$  se encuentran dentro de la Región de scanning y sólo se tienen flujos de scanning**

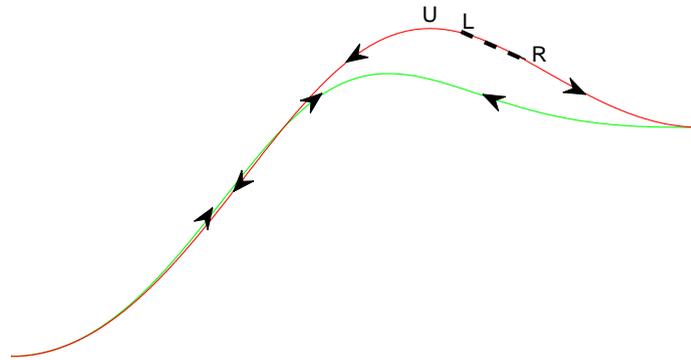
La condición de Rankine-Hugoniot para este caso es:

$$F(S_R, \pi_R) - F(S_L, \pi_R) = \sigma(S_R - S_L) \quad (5.5)$$

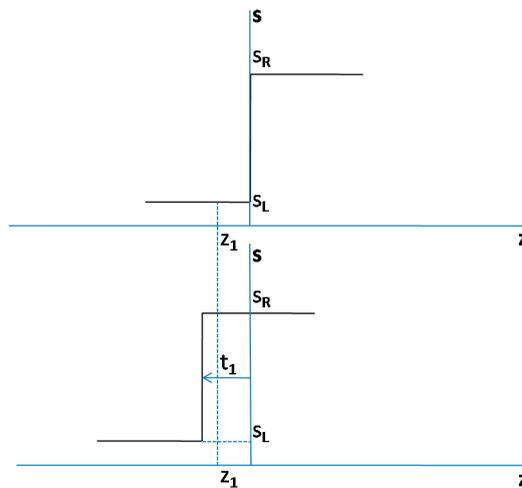
$$0 - 0 = \sigma(\pi_R - \pi_L) \quad (5.6)$$

Estas ecuaciones son satisfechas por dos clases de discontinuidades. La primera es un cho-

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



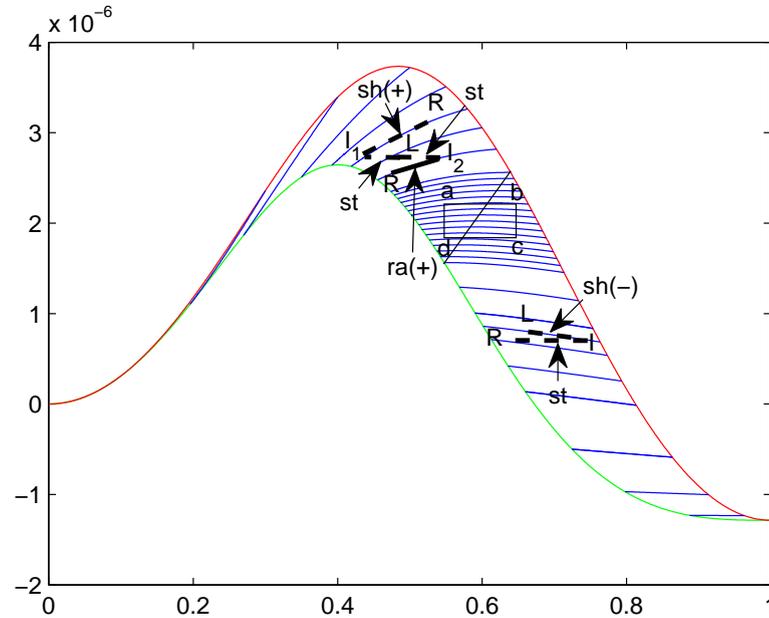
**Figura 5.7:** Sentido del flujo sobre las curvas de imbibición y drenaje. Fuente: Elaboración propia



**Figura 5.8:** Choque Negativo. Fuente: Elaboración propia.

que con velocidad  $\sigma = (F(S_R, \pi_R) - F(S_L, \pi_R)) / (S_R - S_L)$  y donde  $\pi$  es constante, esto es,  $\pi = \pi_L = \pi_R$ . La segunda clase de discontinuidad es una discontinuidad estacionaria con velocidad  $\sigma = 0$  y la función flujo constante; genéricamente en estas se cumplen  $\pi_R \neq \pi_L$  y  $S_L \neq S_R$ .

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



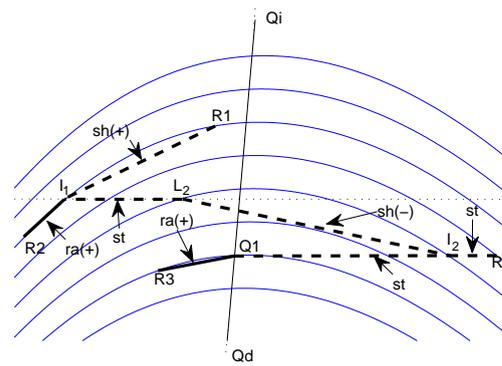
**Figura 5.9:** Flujos de Scanning. Fuente: Elaboración propia.

Las soluciones para el flujo de scanning pueden consistir en una onda de choque, una onda de rarefacción, o una onda estacionaria junto con una de choque o con una de rarefacción. Algunos casos simples se muestran en la Figura 5.9. Existen casos en los que se tiene una mayor complejidad para determinar la solución de Riemann, como los que se dan cuando las curvas de scanning presentan un máximo en la región  $\Omega$  y no hay interacción con las curvas de drenaje o de imbibición. En estos casos el Problema de Riemann presenta multiplicidad de soluciones, por consiguiente, tenemos que tomar decisiones para obtener las soluciones físicamente apropiadas, para clasificar las soluciones de Riemann elegidas, analizamos la región abcd de la Figura (5.9). Esta región es ampliada en las Figuras 5.10(a) y 5.10(b). La curva  $Q_d Q_i$  es el conjunto de estados  $Q = (S, F(S, \pi))$  en  $\Omega$  donde la saturación  $S$  maximiza  $F(S, \pi)$  para cada  $\pi$ , o sea,

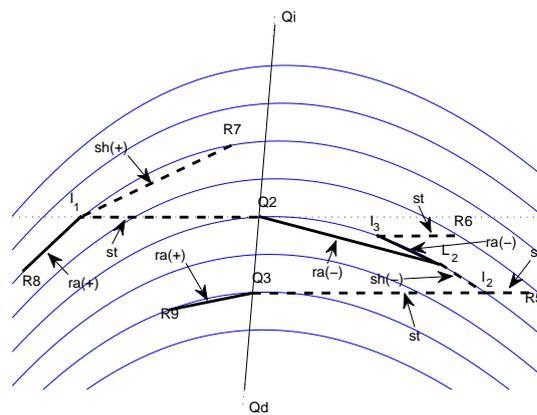
$$Q_d Q_i := \{Q = (S, F(S, \pi)) \in \Omega_g | \partial_S F(S, \pi) = 0, \forall \pi\} \quad (5.7)$$

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

La región abcd se divide en  $R$ -regiones. A cada  $R$ -región le corresponde una determinada solución, es decir, la forma de la solución varía de acuerdo a la  $R$ -región en la que se encuentre el estado  $R$ , y para dos estados  $R$  distintos que caigan en la misma  $R$ -región las soluciones correspondientes aunque no sean cuantitativamente iguales, lo serán en su forma (por ejemplo ambas soluciones estarían compuestas por una onda estacionaria y un choque).



(a)

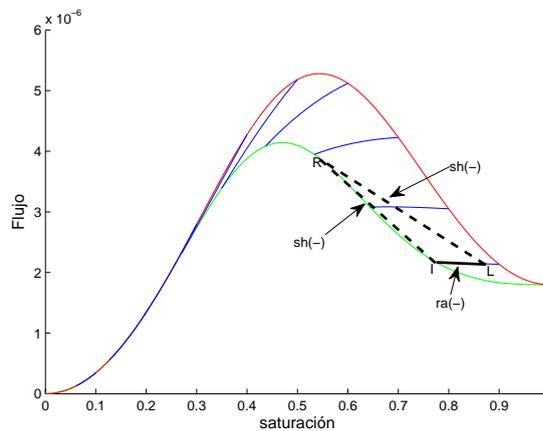


(b)

**Figura 5.10:**  $R$ -Regiones y sus soluciones en caso de flujo de scanning cuando: (a)  $L$  está a la izquierda de  $Q_d Q_i$ , (b)  $L$  está a la derecha de  $Q_d Q_i$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

En las figuras 5.10(a) y 5.10(b) se muestran las  $R$ -regiones y las soluciones de Riemann asociadas para los estados izquierdos  $L_1$  y  $L_2$  que yacen en lados opuestos de la curva  $Q_d Q_i$ . Todas las soluciones se hallan resumidas en la Tabla 5.2; las ondas están ordenadas de menor a mayor velocidad. La nomenclatura a utilizar para describir las soluciones es la siguiente: de acuerdo al tipo de onda que se da entre un estado izquierdo ( $E_L$ ) y uno derecho ( $E_R$ ) se escribirá  $E_L \xrightarrow{\text{Tipo de onda}} E_R$ . Así, la solución compuesta por un choque estacionario  $L_1 I_1$  conectando los estados  $L_1$  e  $I_1$  y un choque con velocidad positiva  $I_1 R_1$  conectando los estados  $I_1$  y  $R_1$  se representa por  $L_1 \xrightarrow{st} I_1 \xrightarrow{sh(+)} R_1$ .



**Figura 5.11:** Flujo Efectivo para casos en que los estados caigan en curvas distintas. Fuente:

Elaboración propia.

**Soluciones de Riemann cuando  $L$  y  $R$  no están sobre la misma curva y se tiene más de un tipo de flujo**

La solución para el caso en el que se tiene un estado en una curva scanning y otro en la curva drenaje (imbibición) se obtiene del flujo efectivo  $LIR$  (Figura 5.11), siendo  $I$  el estado

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

**TABLA 5.1:** Soluciones de Riemann cuando hay máximos en las curvas de scanning y no hay interacción con las curvas de drenaje e imbibición

Soluciones de Riemann para $L_1$ , Fig. (5.10(a))
$L_1 \xrightarrow{st} I_1 \xrightarrow{sh(+)} R_1$ $L_1 \xrightarrow{sh(-)} I_2 \xrightarrow{st} R_2$ $L_1 \xrightarrow{sh(-)} I_2 \xrightarrow{st} Q_1 \xrightarrow{ra(+)} R_3$ $L_1 \xrightarrow{st} I_1 \xrightarrow{ra(+)} R_4$
Soluciones de Riemann para $L_2$ , Fig.(5.10(b))
$L_2 \xrightarrow{sh(-)} I_2 \xrightarrow{st} R_5$ $L_2 \xrightarrow{ra(-)} I_3 \xrightarrow{st} R_6$ $L_2 \xrightarrow{ra(-)} Q_2 \xrightarrow{st} I_4 \xrightarrow{sh(+)} R_7$ $L_2 \xrightarrow{ra(-)} Q_2 \xrightarrow{st} I_4 \xrightarrow{ra(+)} R_8$ $L_2 \xrightarrow{sh(-)} I_2 \xrightarrow{st} Q_3 \xrightarrow{ra(+)} R_9$

Fuente: Elaboración propia

intermedio resultante de la intersección de la curva scanning con la curva drenaje usando el método de curva cóncava o convexa. La interacción de las ondas  $LI$  e  $IR$  produce un choque  $LR$  con velocidad:

$$\sigma = \frac{F^d(S_R) - F(S_L, \pi_L)}{S_R - S_L}, \quad (5.8)$$

puesto que la rarefacción  $LI$  tiene una velocidad mayor que el choque  $IR$ .

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

---

**Método de determinación de soluciones de Riemann para cualesquiera sean los valores de los estados  $L$  y  $R$**

La determinación de la solución de Riemann correspondiente a los estados  $L$  y  $R$  dados se reduce a determinar en que  $L$ -Región y  $R$ -Región caen  $L$  y  $R$ , ya que para cada punto  $L$  dado, todos los estados  $R$  que caigan en una misma  $R$ -Región determinan soluciones iguales (en cuanto a la forma de la solución).

A continuación definimos a los puntos y curvas importantes que determinan a las  $L$ -Regiones y  $R$ -Regiones para los casos en que  $L$  y  $R$  no están sobre la misma curva y se tiene más de un tipo de flujo:

Primeramente definiremos las curvas de drenaje e imbibición por:

$$dr = \{(S, F) \in \mathfrak{R}^2 | F = F^d(S)\} \text{ e } im = \{(S, F) \in \mathfrak{R}^2 | F = F^i(S)\}. \quad (5.9)$$

y la región de scanning  $\Omega$  por  $\Omega = \Omega_v \cup \Omega_g$ , donde:

$$\Omega_v = \{(S, F) \in \mathfrak{R}^2 | F^i(S) \leq F \leq F^d(S)\} \text{ y} \quad (5.10)$$

$$\Omega_g = \{(S, F) \in \mathfrak{R}^2 | F^d(S) \leq F \leq F^i(S)\}. \quad (5.11)$$

Trazando la curva de scanning que pasa por el punto  $Q_i$  (máximo de la curva scanning que yace en la curva de imbibición) hallamos el punto  $J$  en la intersección de ésta curva con la curva de drenaje. El punto  $P$  se obtiene de la intersección de la curva de scanning que pasa por  $Q_d$  con la de imbibición. El punto  $M = (S_M, F_M)$  es el punto máximo de la curva de drenaje, o sea,  $\partial_S F^d(S_M) = 0$ ,  $0 < S_M < 1$  y  $F_M = F^d(S_M)$ . El punto  $N = (S_N, F_N)$  es el punto de la curva de imbibición con el mismo valor de  $\pi$  que  $M$ . El punto  $M_i$  se obtiene de la intersección

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

---

de la recta horizontal que pasa por  $M$  y la curva de imbibición cuando  $S_{M_i} > S_M$ . El punto  $H = (S_H, F_H)$ , es el punto de intersección de la recta horizontal que pasa por  $M$  con la curva de imbibición cuando  $S_H < S_M$ , o sea en  $H$  se tiene  $F_H = F^i(S_H) = F^d(S_M)$ . Los puntos  $X_0$  y  $X_f$  se definen como los puntos de intersección de las curvas de drenaje e imbibición en  $S = 0$  y  $S = 1$ , respectivamente. El punto  $X = (S_X, F_X)$  es la intersección de las curvas de drenaje e imbibición que divide a la región de scanning en las regiones  $\Omega_g$  y  $\Omega_v$ , así el valor de  $S_X$  se obtiene de  $F^d(S_X) - F^i(S_X) = 0$  en el intervalo  $0 < S_X < 1$ . En caso de que esta intersección ocurra solamente en  $S = 0$  o en  $S = 1$  y no en  $0 < S_X < 1$ , se toma  $S_X = 0$  si  $F^d(S) < F^i(S)$  en  $0 < S < 1$  ( $X = X_0$ ) y  $S_X = 1$  si  $F^d(S) > F^i(S)$  en el mismo intervalo ( $X = X_f$ ). Luego,  $F_X$  es dado por  $F_X = F^d(S_X)$ . El valor de  $\pi$  del punto  $Y = (S_Y, F_{S_Y})$  es igual a la saturación del punto  $X$ , así  $S_Y = S^d(S_X)$ . La curva de scanning  $U_d U_i$  tiene el punto  $U_i = (S_{U_i}, F^i(S_{U_i}))$  determinado por la solución de

$$\partial_S^2 F^i(S_{U_i}) = 0, \text{ donde } S_{U_i} < S_X \quad (5.12)$$

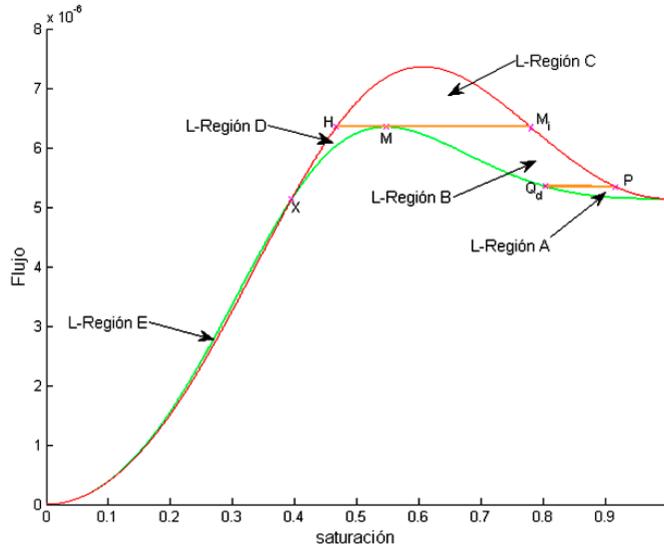
y el punto  $U_d$  determinado por la intersección de la curva de drenaje con la curva de scanning que pasa por el punto  $U_i$ .

Definimos algunos puntos relativos al punto  $L = (S_L, F_L)$ . Los puntos  $E = (S_E, F_E)$  y  $K = (S_K, F_K)$  tienen el mismo valor del flujo del punto  $L$  ( $F_E = F_K = F_L$ ) y están o en la curva de imbibición o en la de drenaje, cuando sea necesario se indicará con un subíndice ( $i, d$ ) la posición de esos puntos ( $E_i, E_d, K_i$  y  $K_d$ ). Los puntos  $C$  y  $S$  están en el drenaje y en la misma curva de scanning de  $E_i$  y  $K_i$ , o sea,  $\pi_C = \pi_{E_i}$  y  $\pi_S = \pi_{K_i}$ . El punto  $D$  está en la curva de imbibición y en la misma curva scanning del punto  $K_d$  ( $\pi_D = \pi_{K_d}$ ). Las intersecciones de la curva scanning de  $L$  con las curvas de imbibición y drenaje son  $L_i$  y  $L_d$  respectivamente. El

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

punto  $Q = (S_Q, F_Q)$  es la intersección de la recta horizontal que pasa por  $L_d$  y la curva  $Q_dQ_i$ .

La curva  $Q_dV$  se define por  $Q_dV = \{W \in \Omega_g | W = (S_{L_d} + 2(S_Q - S_{Q_{L_d}}), F_{L_d}), \forall L_d \in dr\}$ .



**Figura 5.12:** *L*-Regiones. Fuente: Elaboración propia

Las *L*-Regiones (Fig. 5.12) están definidas como:

$$A := \{(S, F) \in \Omega_g | S_{Q_d} \leq S \leq 1 \text{ y } F \leq F(S, \pi_{Q_d})\}$$

$$B := \{(S, F) \in \Omega_g | S_M \leq S \leq S_P \text{ y } F(S, \pi_{Q_d}) \leq F \leq F^d(S_M)\}$$

$$C := \{(S, F) \in \Omega_g | 0 \leq S \leq 1 \text{ y } F^d(S_M) \leq F\}$$

$$D := \{(S, F) \in \Omega_g | S_X \leq S \leq S_M \text{ y } F(S_X) \leq F \leq F^d(S_M)\}$$

$$E := \Omega_v$$

En este trabajo, para representar el segmento de recta y las curvas de scanning, drenaje e imbibición que pasan por dos puntos, por ejemplo A y B, utilizamos la notación  $\overline{AB}$ ,  $(AB)^{sc}$ ,  $(AB)^{dr}$ ,  $(AB)^{im}$ , respectivamente. Usaremos *sh*, *ra* y *st*, para representar a las ondas de cho-

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

---

que, de rarefacción, y estacionaria, respectivamente; además de ésto, se acompañará a  $sh$  y  $ra$  con un signo (+) o (-) para indicar si es un choque (rarefacción) positivo(a) o negativa(a). En los gráficos  $F \times S_w$ , las ondas de choque y las ondas estacionarias son representadas por líneas discontinuas y las de rarefacción por líneas sólidas.

A continuación definimos las  $R$ -Regiones de cada  $L$ -Región junto con las soluciones asociadas a cada par  $L$ -Región -  $R$ -Región.

Caso  $L$ -Región A: Dividimos  $\Omega$  en 7 sub-regiones de  $R$  para  $L = (S_L, F(S_L, \pi_L)) \in A$  :

$$R_A^I := \{(S, F) \text{ en la región envuelta por } (X_f Q_d)^{dr}, \overline{Q_d V}, (V X_f)^{im}\}$$

$$R_A^{II} := \{(S, F) \text{ en la región envuelta por } (Q_d B)^{dr}, (TG)^{sc}, (GV)^{im}, \overline{Q_d V}\}$$

$$R_A^{III} := \{(S, F) \text{ en la región envuelta por } (BM)^{dr}, (MN)^{sc}, (NG)^{im}, (GT)^{sc}\}$$

$$R_A^{IV} := \{(S, F) \text{ en la región envuelta por } (\overline{MH}), (HN)^{im}, (NM)^{sc}\}$$

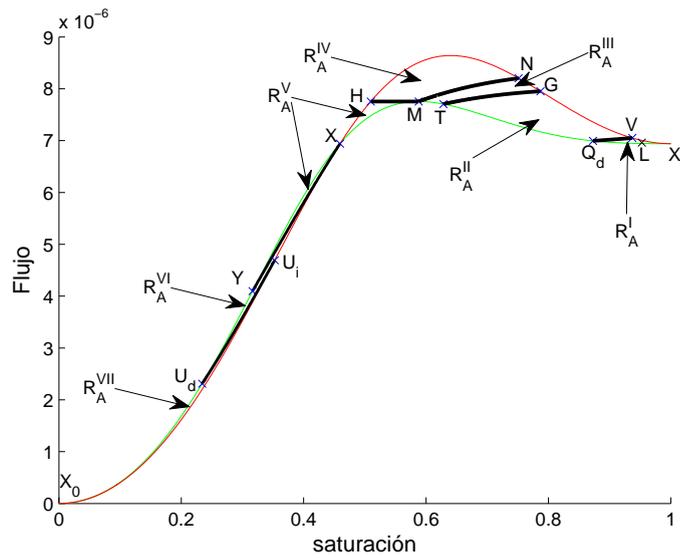
$$R_A^V := \{(S, F) \text{ en la región envuelta por } (XH)^{im}, \overline{HM}, (MX)^{dr} \text{ y por } (YX)^{dr}, (XY)^{sc}\}$$

$$R_A^{VI} := \{(S, F) \text{ en la región envuelta por } (U_d Y)^{dr}, (YX)^{sc}, (XU_i)^{im}, (U_i U_d)^{sc}\}$$

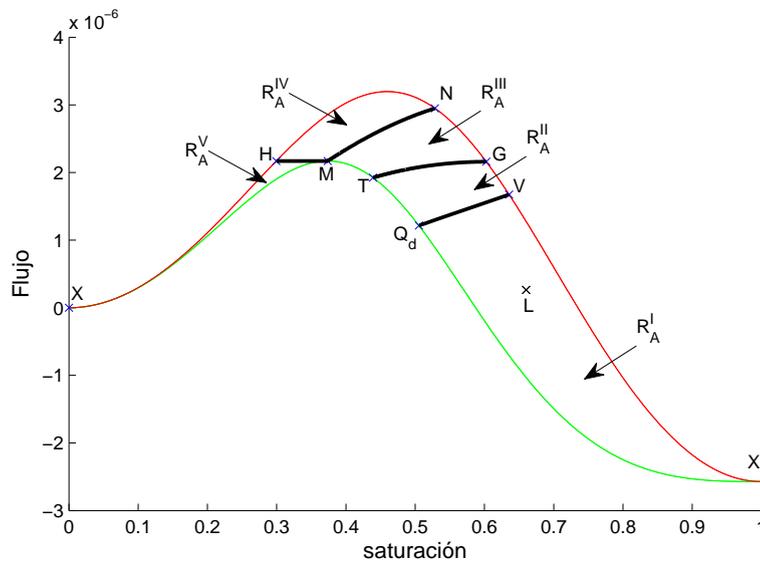
$$R_A^{VII} := \{(S_w, F) \text{ en la región envuelta por } (X_0 U_d)^{dr}, (U_d U_i)^{sc}, (U_i X_0)^{im}\}$$

En las Figuras 5.13(a) y 5.13(b) se puede ver como ciertas  $R$ -Regiones van apareciendo y desapareciendo de acuerdo al valor de la velocidad total  $\mathbf{u}$  (la distancia de  $X_f$  al eje horizontal es función de  $\mathbf{u}$ ). En la Figura 5.13(a) se tienen las  $R$ -Regiones  $R_A^{VI}$  y  $R_A^{VII}$  mientras que en la Figura 5.13(b) no. Cabe destacar que lo mismo ocurre con las demás  $L$ -Regiones, es decir, ciertas  $R$ -Regiones aparecen y desaparecen según el valor de la velocidad total  $\mathbf{u}$ .

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



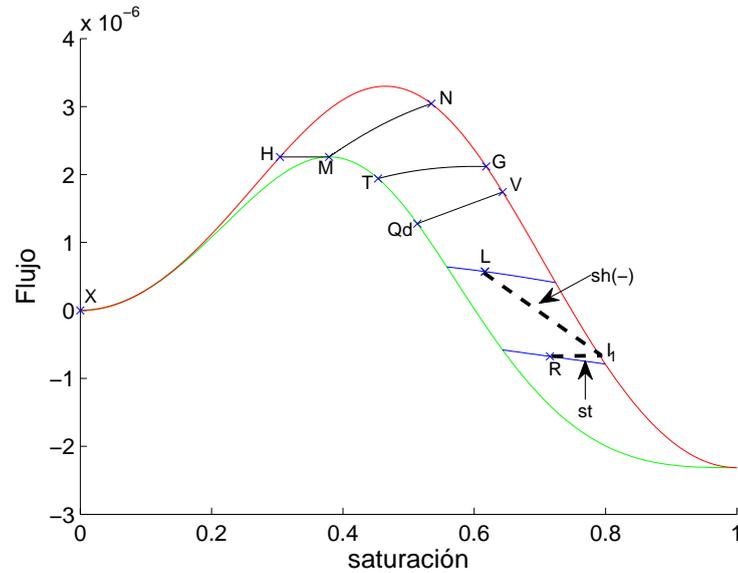
(a)



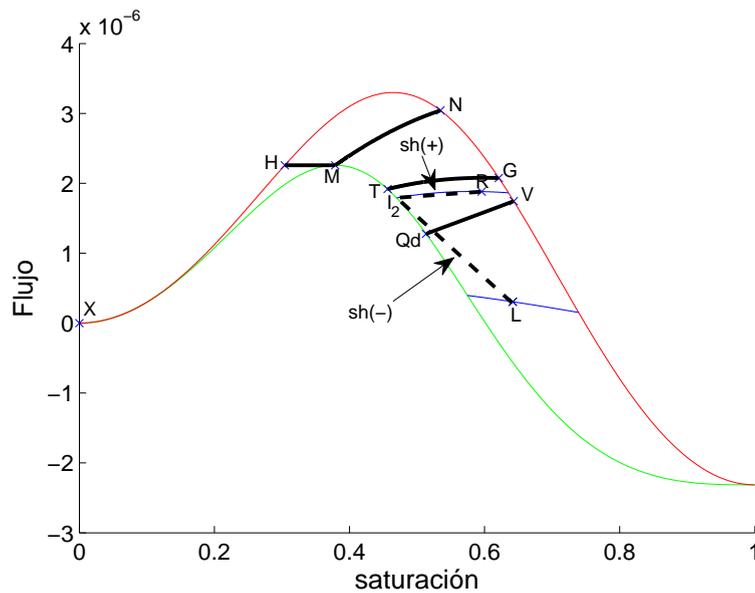
(b)

**Figura 5.13:**  $R$ -Regiones correspondientes a la  $L$ -Región A. Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

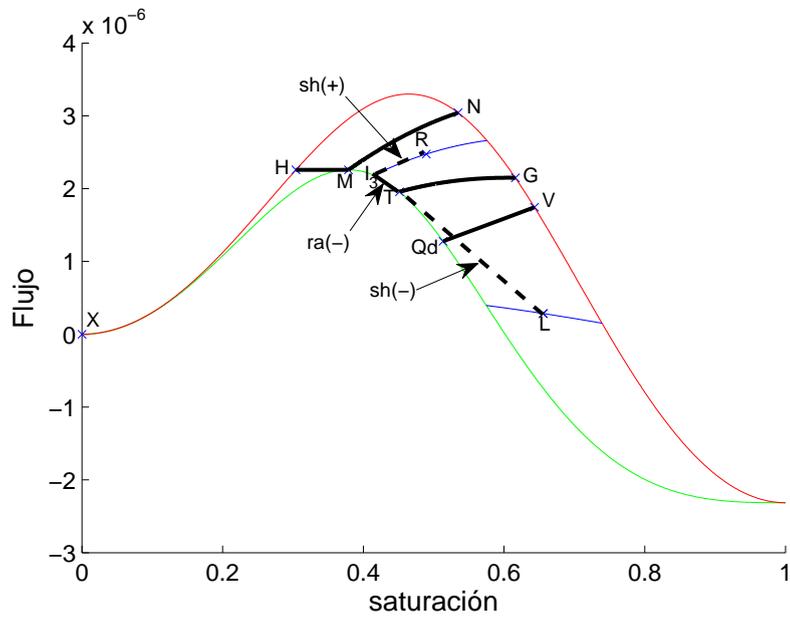


**Figura 5.14:** Solución para  $L \in A$  y  $R \in R_A^I$ . Fuente: Elaboración propia.

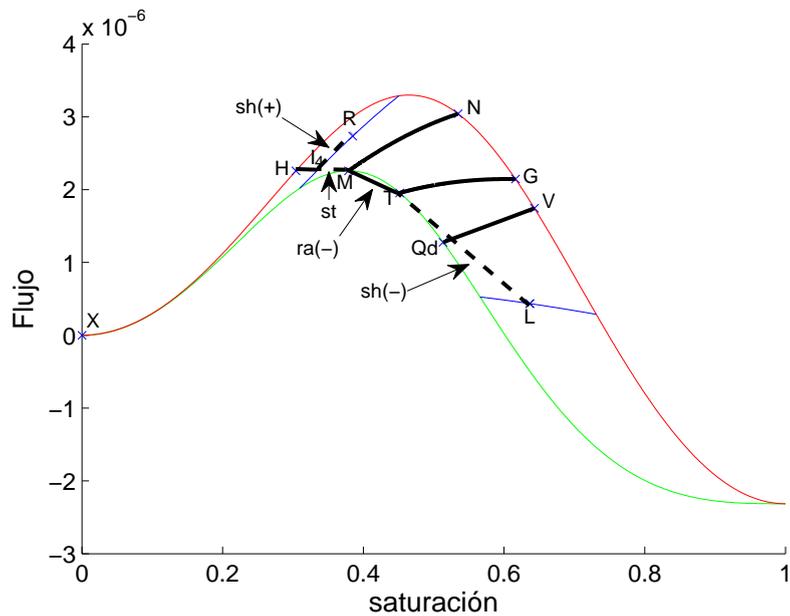


**Figura 5.15:** Solución para  $L \in A$  y  $R \in R_A^{II}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

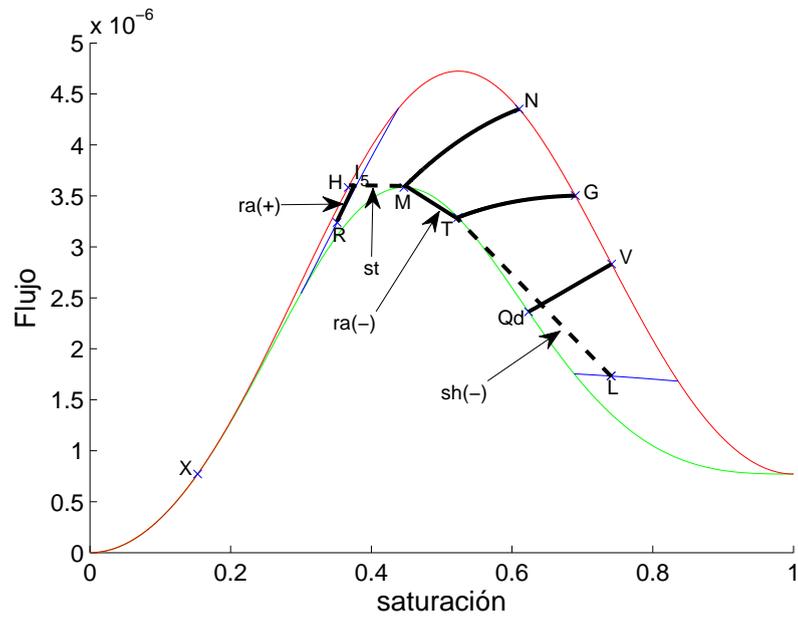


**Figura 5.16:** Solución para  $L \in A$  y  $R \in R_A^{III}$ . Fuente: Elaboración propia.

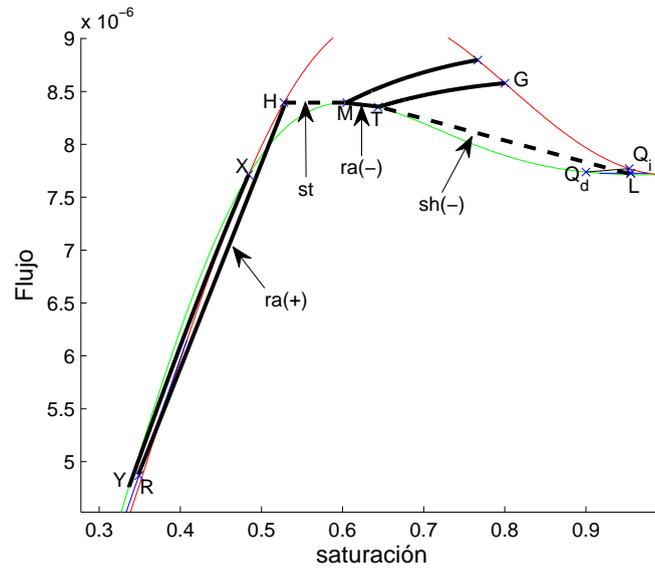


**Figura 5.17:** Solución para  $L \in A$  y  $R \in R_A^{IV}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

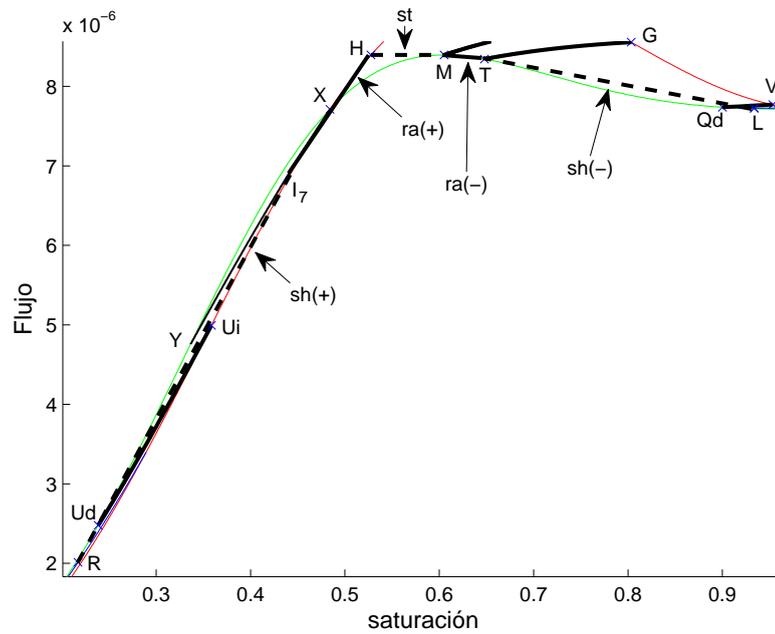


**Figura 5.18:** Solución para  $L \in A$  y  $R \in R_A^V$ . Fuente: Elaboración propia.



**Figura 5.19:** Solución para  $L \in A$  y  $R \in R_A^{VI}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



**Figura 5.20:** Solución para  $L \in A$  y  $R \in R_A^{VII}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

---

Caso B: Dividimos  $\Omega$  en 9 sub-regiones de  $R$  para  $L = (S_L, F(S_L, \pi_L)) \in B$  :

$$R_B^I := \{(S, F) \text{ en la región envuelta por } (X_f Q_d)^{dr}, \overline{Q_d Q_L}, (Q_L L_i)^{sc}, (L_i X_f)^{im}\}$$

$$R_B^{II(a)} := \{(S, F) \text{ en la región envuelta por } (Q_d L_d)^{dr}, (L_d Q_L)^{sc}, \overline{Q_L Q_d}\}$$

$$R_B^{II(b)} := \{(S, F) \text{ en la región envuelta por } (J L_d)^{dr}, (L_d L_i)^{sc}, (L_i Q_i)^{im}, (Q_i J)^{sc}\}$$

$$R_B^{III} := \{(S, F) \text{ en la región envuelta por } (L_i V_L)^{sc}, \overline{V_L V}, (V L_i)^{im}\}$$

$$R_B^{III} := \{(S, F) \text{ en la región envuelta por } (L_i V_L)^{sc}, \overline{V_L V}, (V L_i)^{im}\}$$

$$R_B^IV := \{(S, F) \text{ en la región envuelta por } (V_L L_d)^{sc}, (L_d B)^{dr}, (BG)^{sc}, (GV)^{im}, \overline{V V_L}\}$$

$$R_B^V := \{(S, F) \text{ en la región envuelta por } (BM)^{dr}, (MN)^{sc}, (NG)^{im}, (GB)^{sc}\}$$

$$R_B^{VI} := \{(S, F) \text{ en la región envuelta por } \overline{M H}, (HN)^{im}, (NM)^{sc}\}$$

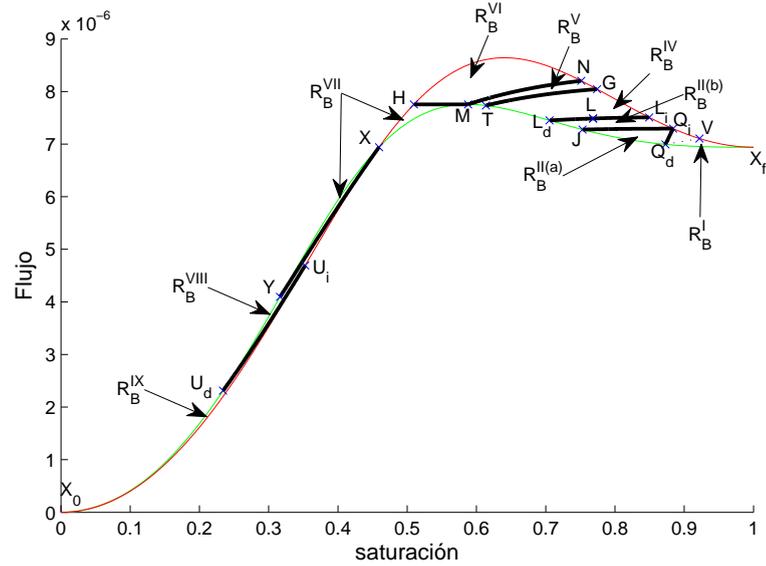
$$R_B^{VII} := \{(S, F) \text{ en la región envuelta por } (XH)^{im}, \overline{M H}, (MX)^{dr} \text{ y por } (YX)^{dr}, (XY)^{sc}\}$$

$$R_B^{VIII} := \{(S, F) \text{ en la región envuelta por } (U_d Y)^{dr}, (YX)^{sc}, (XU_i)^{im}, (U_i U_d)^{sc}\}$$

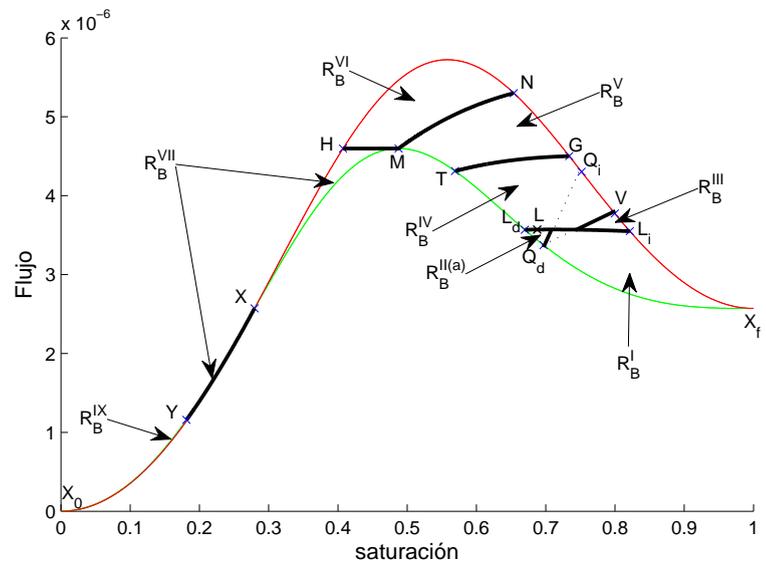
$$R_B^IX := \{(S, F) \text{ en la región envuelta por } (X_0 U_d)^{dr}, (U_d U_i)^{sc}, (U_i X_0)^{im}\}$$

En las Figuras 5.21(a) y 5.21(b) se puede apreciar que, para la  $L$ -Región B, desaparecen y aparecen ciertas R-Regiones de acuerdo a la posición del punto  $L$  además del valor de la velocidad. En la Figura 5.21(a) se tienen las R-Regiones  $R_B^{II(b)}$  y  $R_B^{VIII}$  pero no se tiene la R-Región  $R_B^{III}$ , sin embargo en la Figura 5.21(b) se tiene la R-Región  $R_B^{III}$  pero no se tienen las R-Regiones  $R_B^{II(b)}$  y  $R_B^{VIII}$ .

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



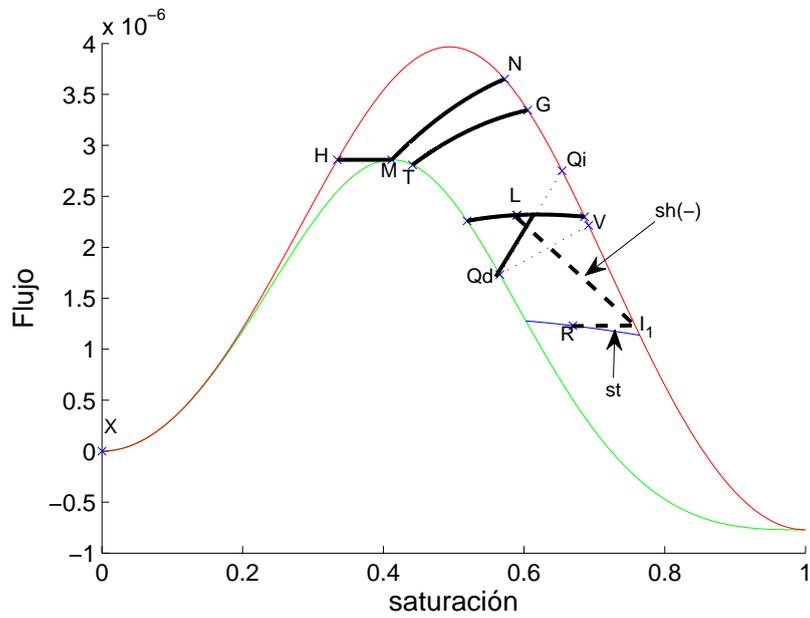
(a)



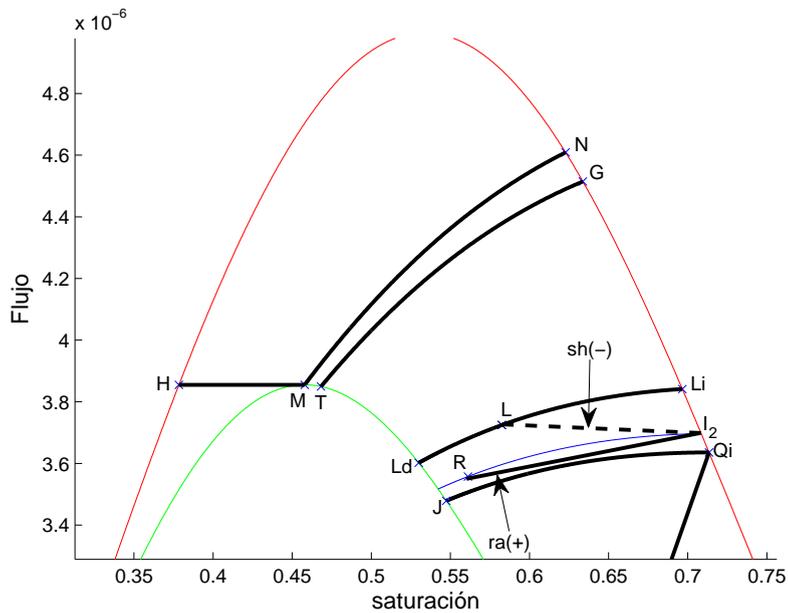
(b)

**Figura 5.21:**  $R$ -Regiones correspondientes a la  $L$ -Región B. Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

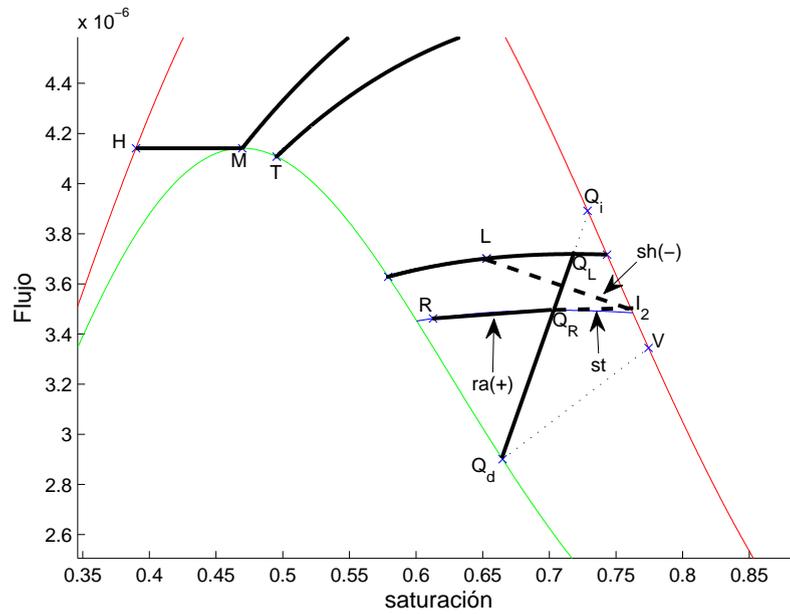


**Figura 5.22:** Solución para  $L \in B$  y  $R \in R_B^I$ . Fuente: Elaboración propia.

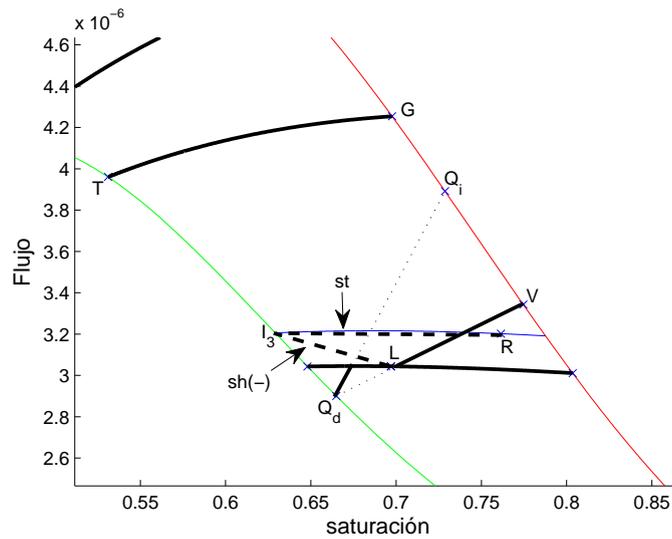


**Figura 5.23:** Solución para  $L \in B$  y  $R \in R_B^{II(a)}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

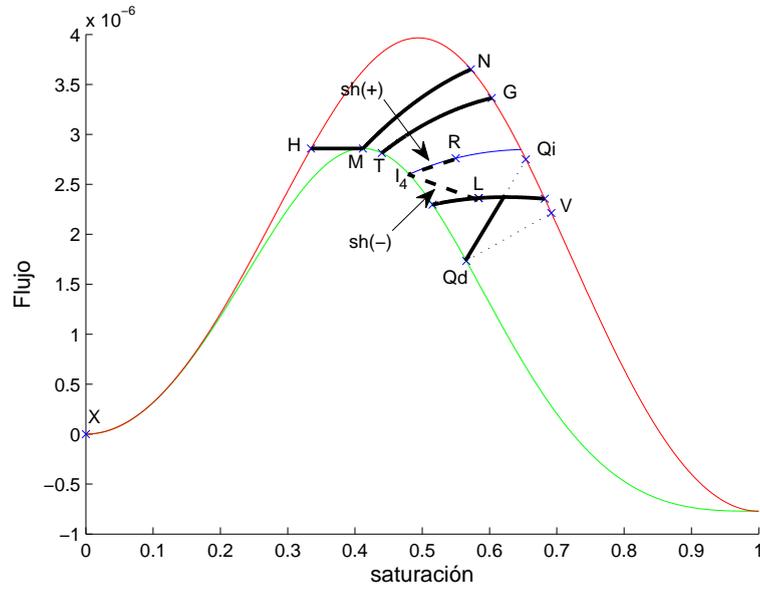


**Figura 5.24:** Solución para  $L \in B$  y  $R \in R_B^{II(b)}$ . Fuente: Elaboración propia.

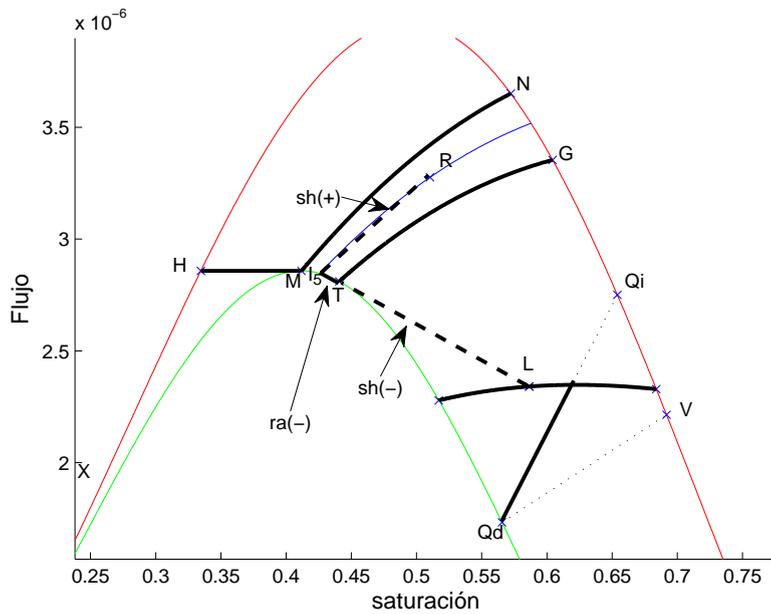


**Figura 5.25:** Solución para  $L \in B$  y  $R \in R_B^{III}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

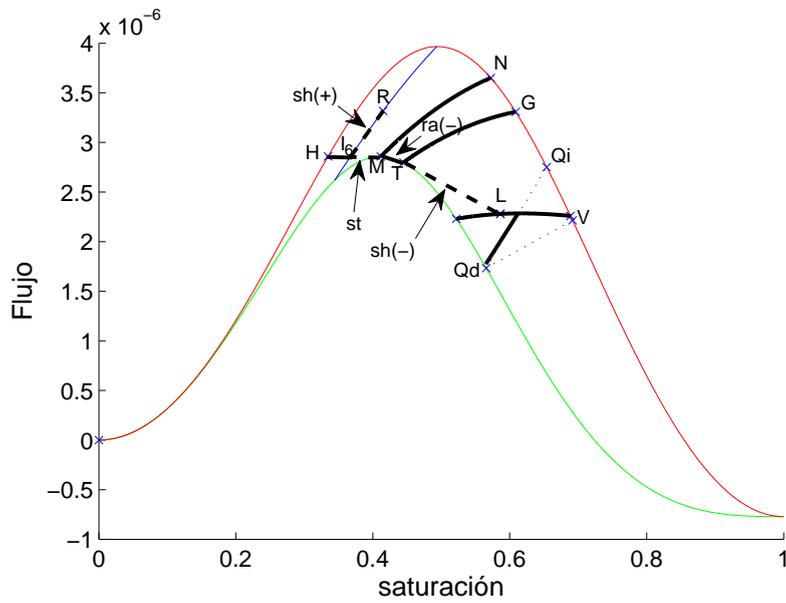


**Figura 5.26:** Solución para  $L \in B$  y  $R \in R_B^{IV}$ . Fuente: Elaboración propia.

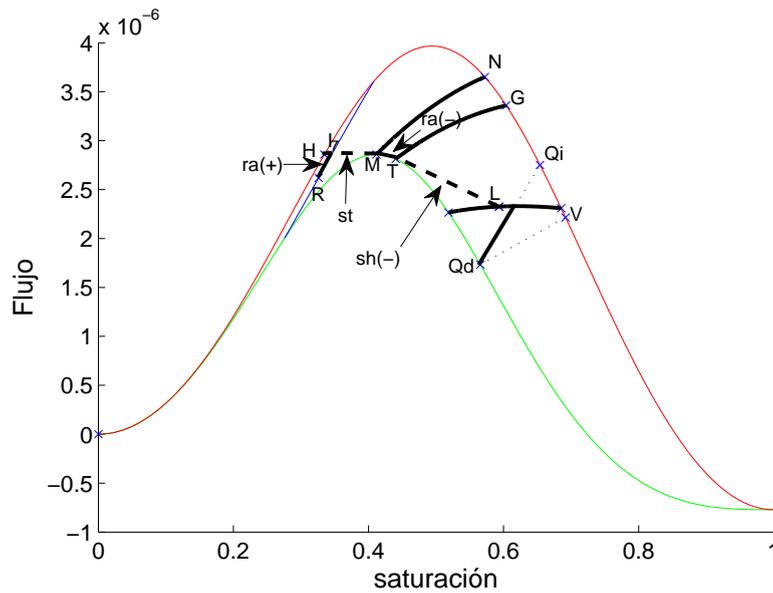


**Figura 5.27:** Solución para  $L \in B$  y  $R \in R_B^V$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

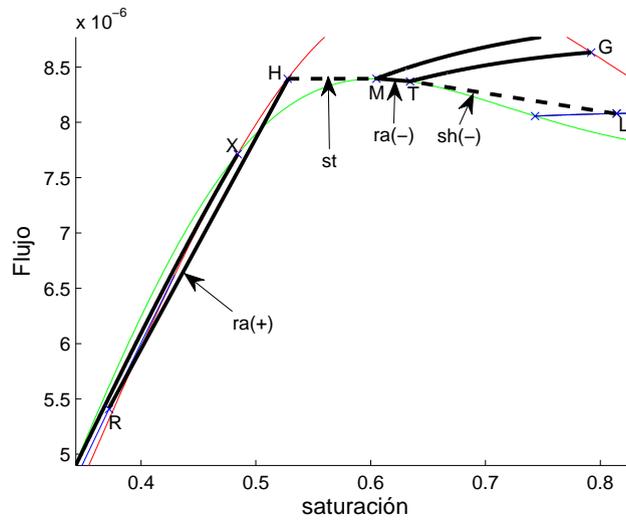


**Figura 5.28:** Solución para  $L \in B$  y  $R \in R_B^{VI}$ . Fuente: Elaboración propia.

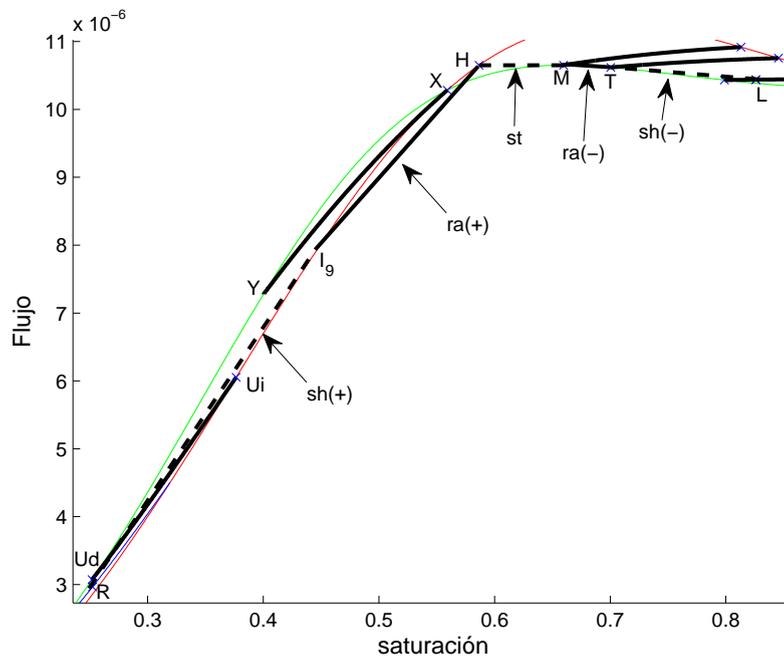


**Figura 5.29:** Solución para  $L \in B$  y  $R \in R_B^{VII}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



**Figura 5.30:** Solución para  $L \in B$  y  $R \in R_B^{VIII}$ . Fuente: Elaboración propia.



**Figura 5.31:** Solución para  $L \in B$  y  $R \in R_B^{IX}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

Caso C: Dividimos  $\Omega$  en 9 sub-regiones de  $R$  para  $L = (S_L, F(S_L, \pi_L)) \in C$  :

$$R_C^I := \{(S, F) \text{ en la región envuelta por } (X_f Q_d)^{dr}, \overline{Q_d Q_i}, (Q_i X_f)^{im}\}$$

$$R_C^{II} := \{(S, F) \text{ en la región envuelta por } (Q_d J)^{dr}, (J Q_i)^{sc}, \overline{Q_i Q_d}\}$$

$$R_C^{III} := \{(S, F) \text{ en la región envuelta por } (J S)^{dr}, (S K_i)^{sc}, (K_i Q_i)^{im}, (Q_i J)^{sc}\}$$

$$R_C^{IV} := \{(S, F) \text{ en la región envuelta por } \overline{K_i E_i}, (E_i K_i)^{im}\}$$

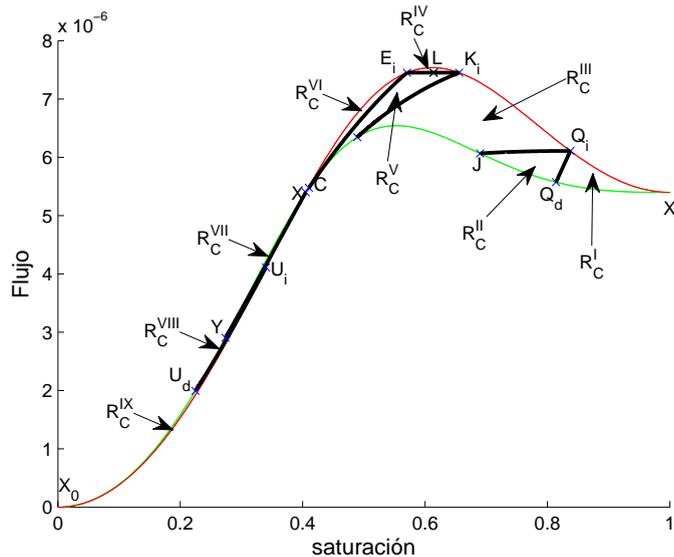
$$R_C^V := \{(S, F) \text{ en la región envuelta por } (C E_i)^{sc}, \overline{E_i K_i}, (K_i S)^{sc}, (S C)^{dr}\}$$

$$R_C^{VI} := \{(S, F) \text{ en la región envuelta por } (X E_i)^{im}, (E_i C)^{sc}, (C X)^{dr}\}$$

$$R_C^{VII} := \{(S, F) \text{ en la región envuelta por } (Y X)^{dr}, (X Y)^{sc}\}$$

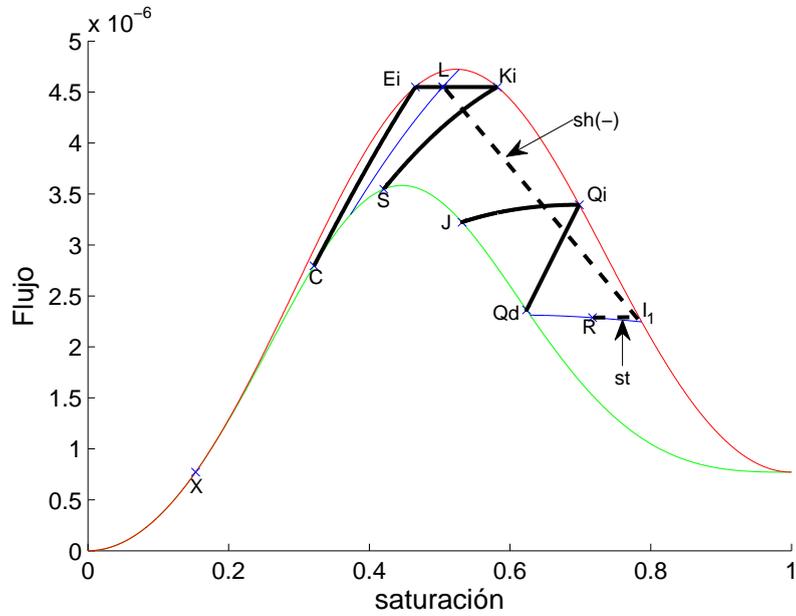
$$R_C^{VIII} := \{(S, F) \text{ en la región envuelta por } (U_d Y)^{dr}, (Y X)^{sc}, (X U_i)^{im}, (U_i U_d)^{sc}\}$$

$$R_C^{IX} := \{(S, F) \text{ en la región envuelta por } (X_0 U_d)^{dr}, (U_d U_i)^{sc}, (U_i X_0)^{im}\}$$

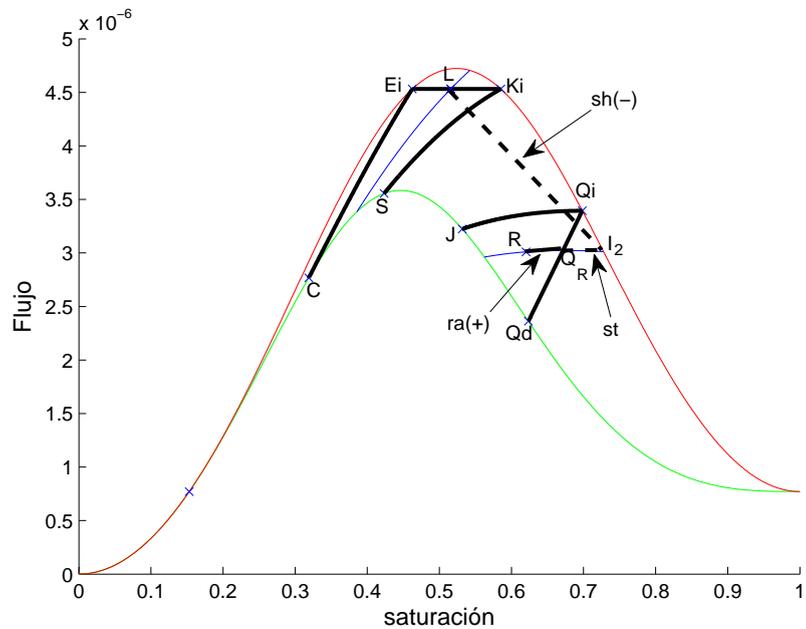


**Figura 5.32:**  $R$ -Regiones correspondientes a la  $L$ -Región C. Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

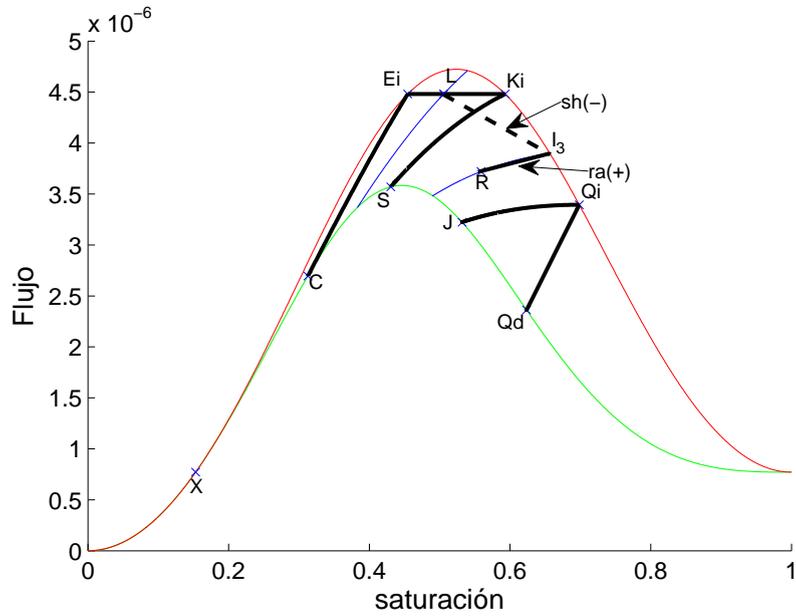


**Figura 5.33:** Solución para  $L \in C$  y  $R \in R_C^I$ . Fuente: Elaboración propia.

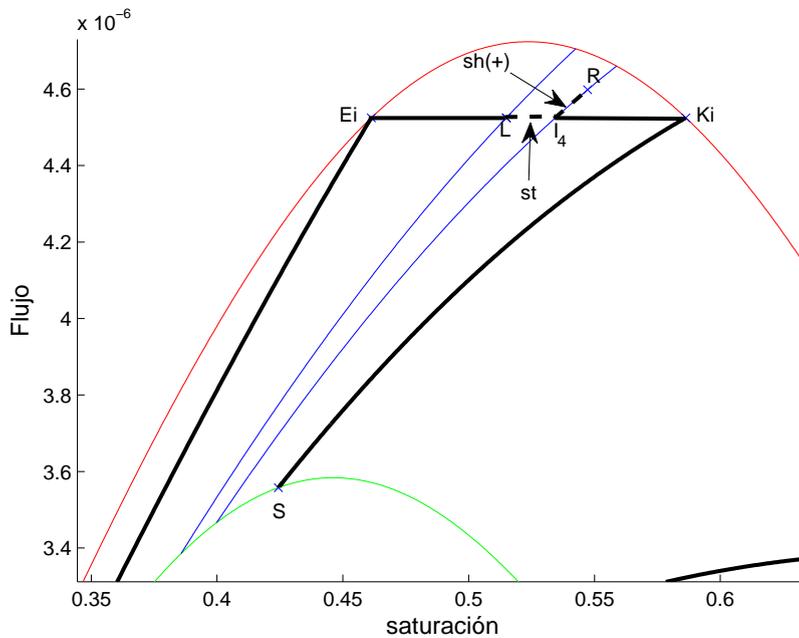


**Figura 5.34:** Solución para  $L \in C$  y  $R \in R_C^H$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

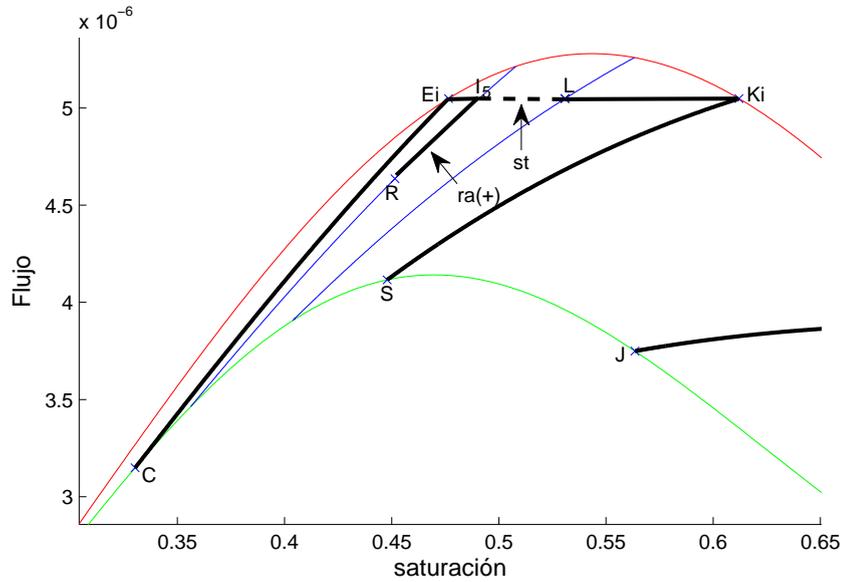


**Figura 5.35:** Solución para  $L \in C$  y  $R \in R_C^{III}$ . Fuente: Elaboración propia.

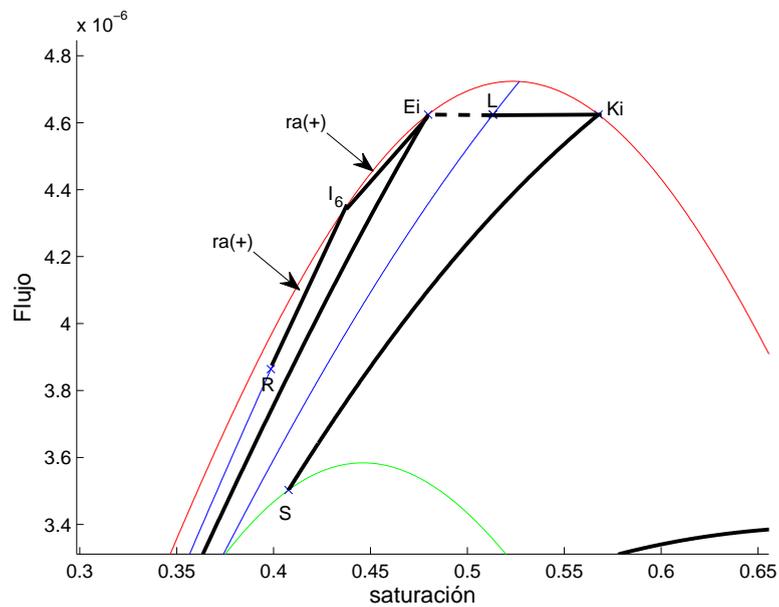


**Figura 5.36:** Solución para  $L \in C$  y  $R \in R_C^{IV}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

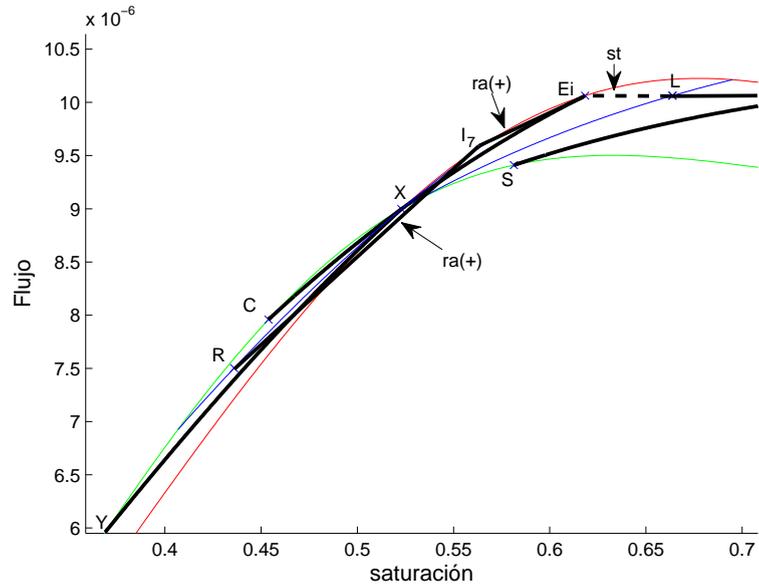


**Figura 5.37:** Solución para  $L \in C$  y  $R \in R_C^V$ . Fuente: Elaboración propia.

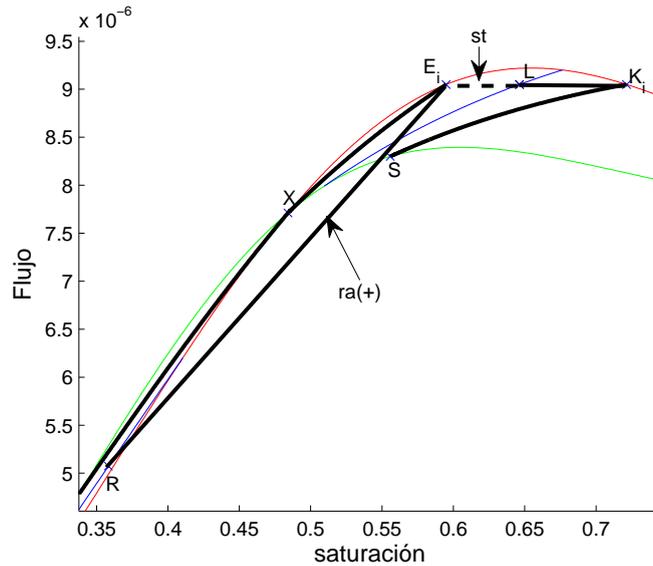


**Figura 5.38:** Solución para  $L \in C$  y  $R \in R_C^{VI}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

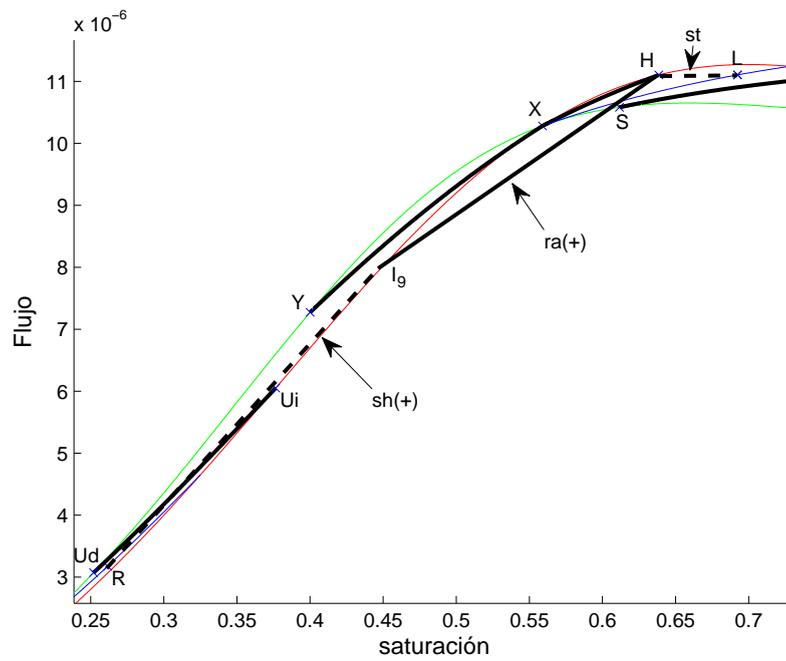


**Figura 5.39:** Solución para  $L \in C$  y  $R \in R_C^{VII}$ . Fuente: Elaboración propia.



**Figura 5.40:** Solución para  $L \in C$  y  $R \in R_C^{VIII}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



**Figura 5.41:** Solución para  $L \in C$  y  $R \in R_C^{IX}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

---

Para algunos estados  $L$  que caen dentro de la  $L$ -Región D el punto  $Q_T$  (intersección de la curva  $Q_dQ_i$  con la curva  $E_dK_i$ ) cae dentro de la región de scanning, y para otros  $Q_T$  cae fuera de la región de scanning. Las  $R$ -Regiones para ambos casos son similares en su mayoría, pero en el segundo caso se tienen dos  $R$ -Regiones más que en el primer caso. Así, podemos considerar que la  $L$ -Región D se halla dividida en dos  $L$ -Regiones más pequeñas denominadas  $L$ -Región D1 y  $L$ -Región D2. La  $L$ -Región D1 representa a los estados  $L$  para los que  $Q_T$  cae dentro de la región de scanning y la  $L$ -Región D2 representa a los estados  $L$  para los que  $Q_T$  cae fuera de la región de scanning.

Caso D1: Dividimos  $\Omega$  en 9 sub-regiones de  $R$  para  $L = (S_L, F(S_L, \pi_L)) \in D1$  :

$$R_{D1}^I := \{(S, F) \text{ en la región envuelta por } (X_fQ_d)^{dr}, \overline{Q_dT_Q}, \overline{T_QK_i}, (K_iX_f)^{im}\}$$

$$R_{D1}^{II} := \{(S, F) \text{ en la región envuelta por } (Q_dE_d)^{dr}, \overline{E_dT_Q}, \overline{T_QQ_d}\}$$

$$R_{D1}^{III} := \{(S, F) \text{ en la región envuelta por } (E_dM)^{dr}, \overline{MM_i}, (M_iK_i)^{im}, \overline{K_iE_d}\}$$

$$R_{D1}^{IV} := \{(S, F) \text{ en la región envuelta por } (MK_d)^{dr}, (K_dD)^{sc}, (DM_i)^{im}, \overline{M_iM}\}$$

$$R_{D1}^V := \{(S, F) \text{ en la región envuelta por } \overline{K_dE_i}, (E_iD)^{im}, (DK_d)^{sc}\}$$

$$R_{D1}^{VI} := \{(S, F) \text{ en la región envuelta por } (XE_i)^{sc}, \overline{E_iK_d}, (K_dX)^{dr}\}$$

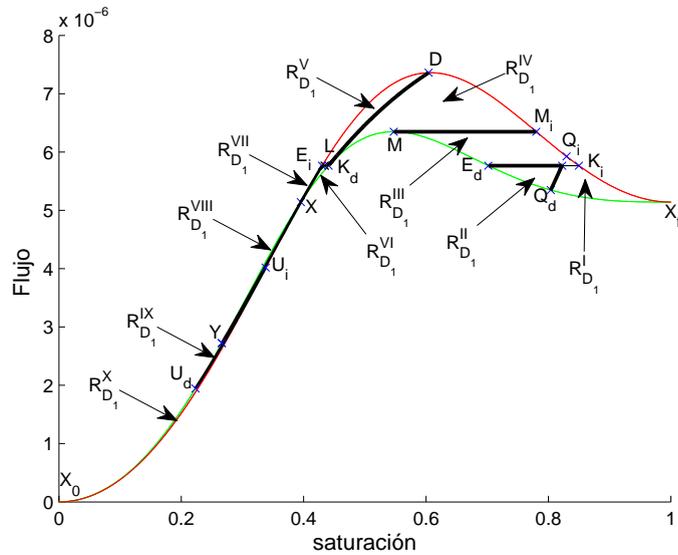
$$R_{D1}^{VII} := \{(S, F) \text{ en la región envuelta por } (XE_i)^{im}, (E_iX)^{sc}\}$$

$$R_{D1}^{VIII} := \{(S, F) \text{ en la región envuelta por } (YX)^{dr}, (XY)^{sc}\}$$

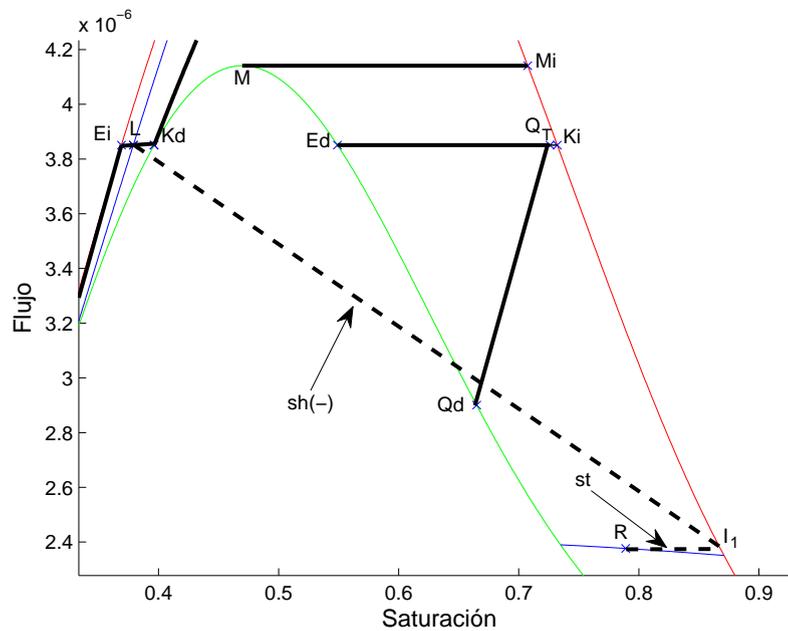
$$R_{D1}^{IX} := \{(S, F) \text{ en la región envuelta por } (U_dY)^{dr}, (YX)^{sc}, (XU_i)^{im}, (U_iU_d)^{sc}\}$$

$$R_{D1}^X := \{(S, F) \text{ en la región envuelta por } (X_0U_d)^{dr}, (U_dU_i)^{sc}, (U_iX_0)^{im}\}$$

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

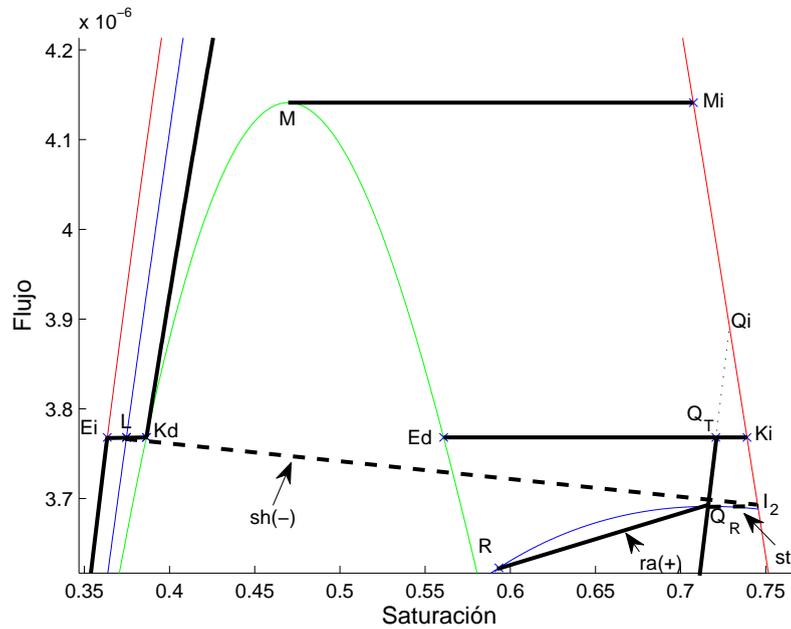


**Figura 5.42:**  $R$ -Regiones correspondientes a la  $L$ -Región  $D1$ . Fuente: Elaboración propia.

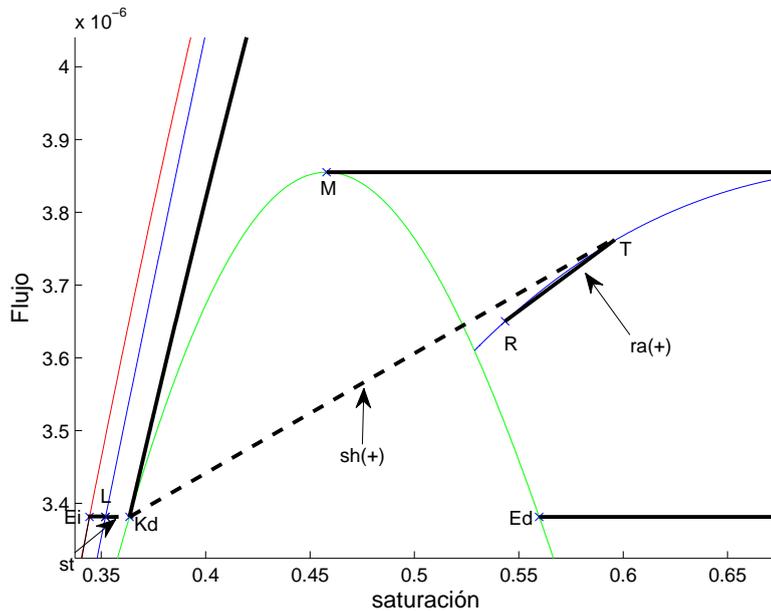


**Figura 5.43:** Solución para  $L \in D1$  y  $R \in R_{D_1}^I$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

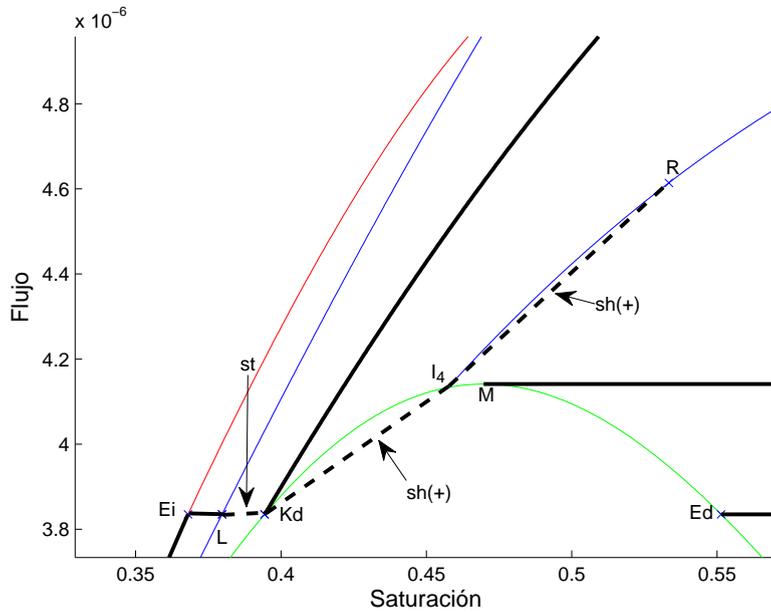


**Figura 5.44:** Solución para  $L \in D1$  y  $R \in R_{D1}^I$ . Fuente: Elaboración propia.

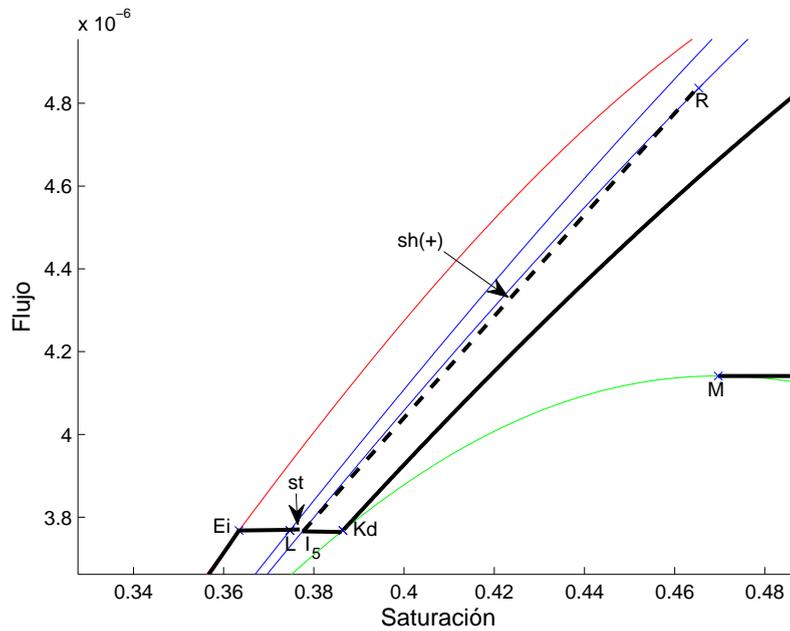


**Figura 5.45:** Solución para  $L \in D1$  y  $R \in R_{D1}^{III}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

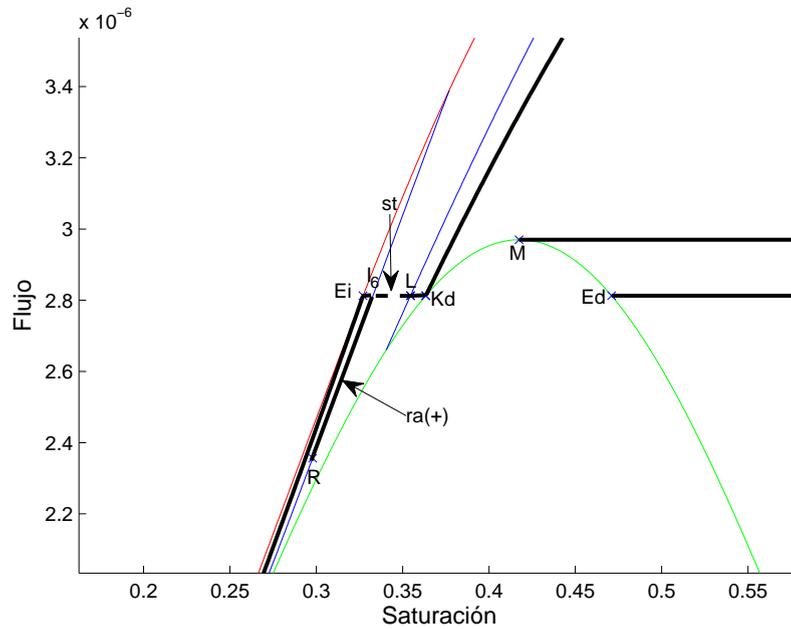


**Figura 5.46:** Solución para  $L \in D1$  y  $R \in R_{D1}^{IV}$ . Fuente: Elaboración propia.

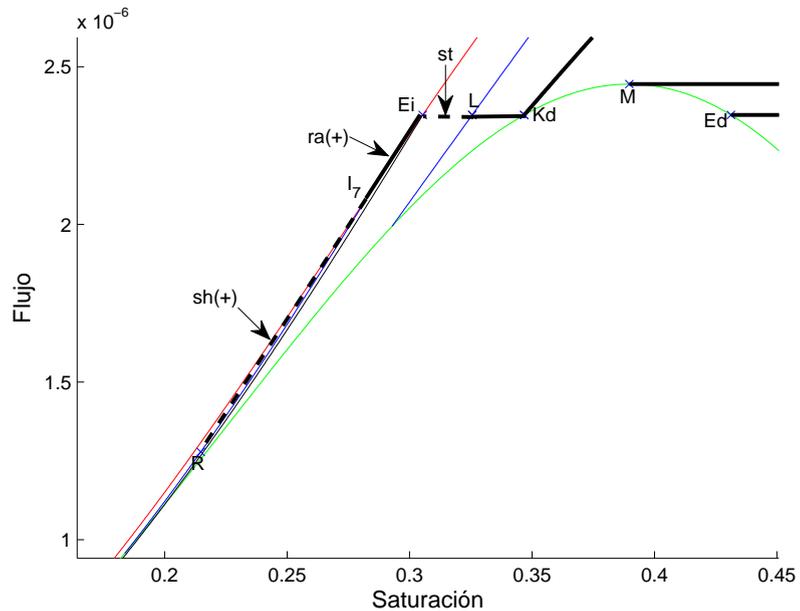


**Figura 5.47:** Solución para  $L \in D1$  y  $R \in R_{D1}^V$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

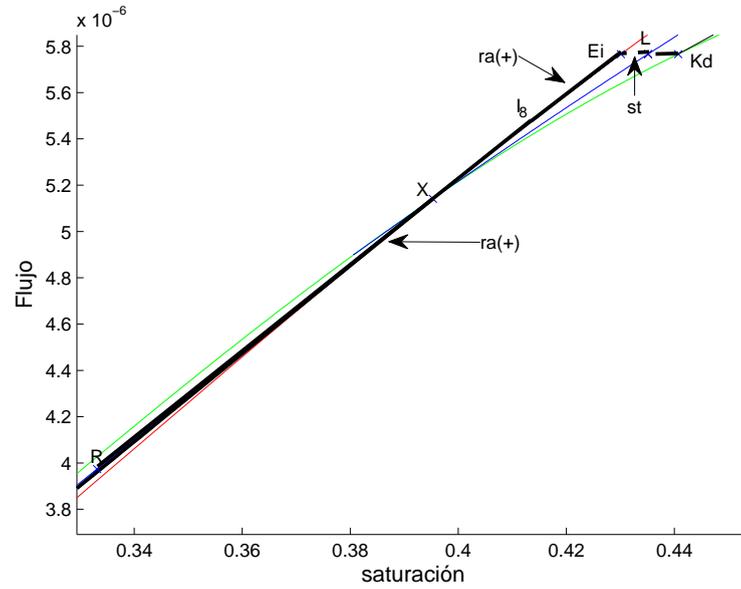


**Figura 5.48:** Solución para  $L \in D1$  y  $R \in R_{D1}^{VI}$ . Fuente: Elaboración propia.

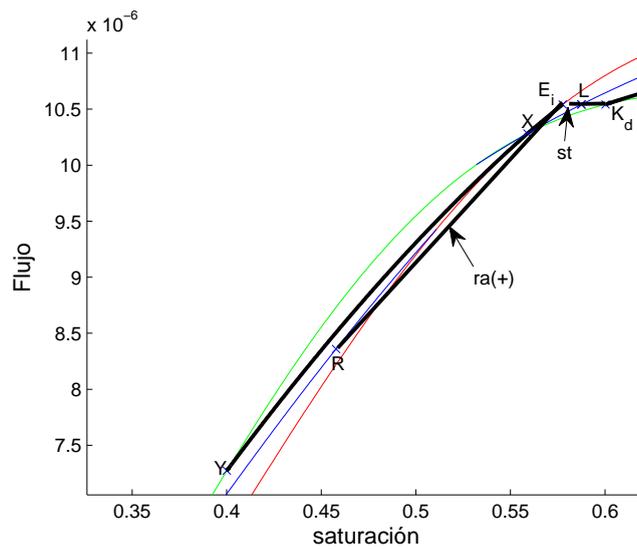


**Figura 5.49:** Solución para  $L \in D1$  y  $R \in R_{D1}^{VII}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



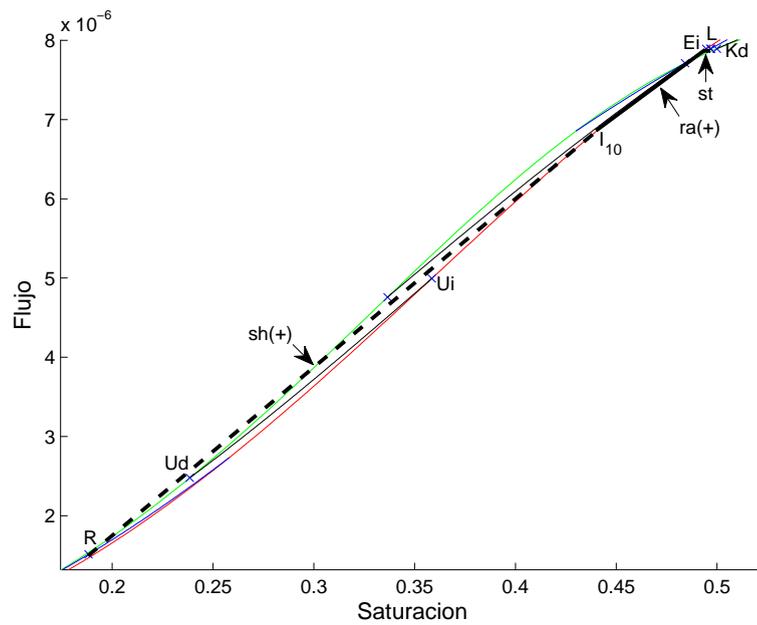
**Figura 5.50:** Solución para  $L \in D1$  y  $R \in R_{D1}^{VIII}$ . Fuente: Elaboración propia.



**Figura 5.51:** Solución para  $L \in D1$  y  $R \in R_{D1}^{IX}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

---



**Figura 5.52:** Solución para  $L \in D1$  y  $R \in R_{D1}^X$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

---

Caso D2: Dividimos  $\Omega$  en 12 sub-regiones de  $R$  para  $L = (S_L, F(S_L, \pi_L)) \in D2$  :

$$R_{D2}^I := \{(S, F) \text{ en la región envuelta por } (X_f Q_d)^{dr}, \overline{Q_d Q_i}, (Q_i X_f)^{im}\}$$

$$R_{D2}^{II} := \{(S, F) \text{ en la región envuelta por } (Q_d J)^{dr}, (J Q_i)^{sc}, \overline{Q_i Q_d}\}$$

$$R_{D2}^{III} := \{(S, F) \text{ en la región envuelta por } (J S)^{dr}, (S K_i)^{sc}, (K_i Q_i)^{im}, (Q_i J)^{sc}\}$$

$$R_{D2}^{IV} := \{(S, F) \text{ en la región envuelta por } (S E_d)^{dr}, \overline{E_d K_i}, (K_i S)^{sc}\}$$

$$R_{D2}^V := \{(S, F) \text{ en la región envuelta por } (E_i M)^{dr}, \overline{M M_i}, (M_i K_i)^{im}, \overline{K_i E_i}\}$$

$$R_{D2}^{VI} := \{(S, F) \text{ en la región envuelta por } (M K_d)^{dr}, (K_d D)^{sc}, (D M_i)^{im}, \overline{M_i M}\}$$

$$R_{D2}^{VII} := \{(S, F) \text{ en la región envuelta por } (E_i D)^{im}, (D K_d)^{sc}, \overline{K_d E_i}\}$$

$$R_{D2}^{VIII} := \{(S, F) \text{ en la región envuelta por } (X E_i)^{sc}, \overline{E_i K_d}, (K_d X)^{dr}\}$$

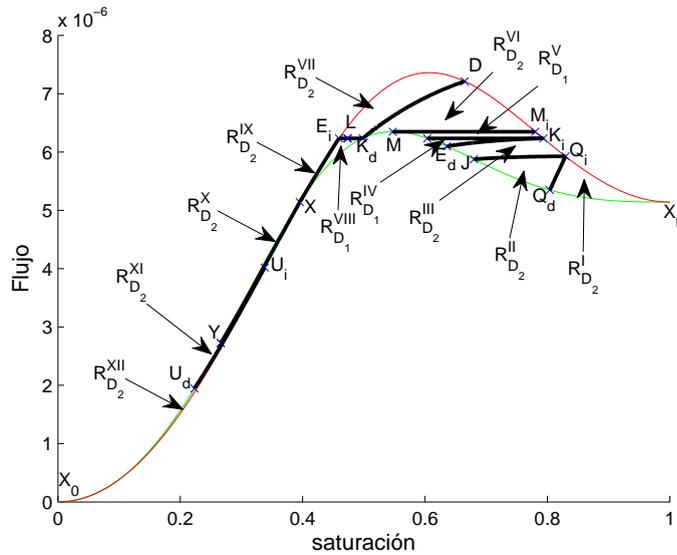
$$R_{D2}^{IX} := \{(S, F) \text{ en la región envuelta por } (X E_i)^{im}, (E_i X)^{sc}\}$$

$$R_{D2}^X := \{(S, F) \text{ en la región envuelta por } (Y X)^{dr}, (X Y)^{sc}\}$$

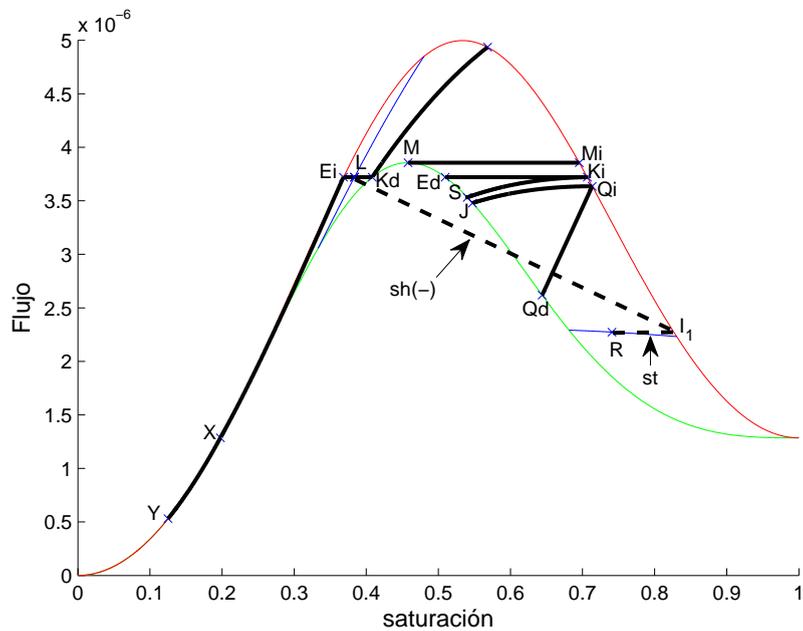
$$R_{D2}^{XI} := \{(S, F) \text{ en la región envuelta por } (U_d Y)^{dr}, (Y X)^{sc}, (X U_i)^{im}, (U_i U_d)^{sc}\}$$

$$R_{D2}^{XII} := \{(S, F) \text{ en la región envuelta por } (X_0 U_d)^{dr}, (U_d U_i)^{sc}, (U_i X_0)^{im}\}$$

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

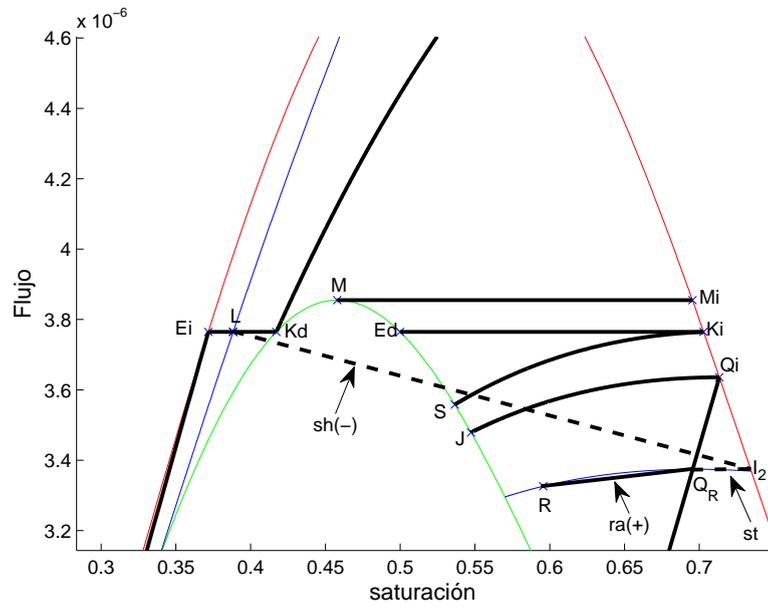


**Figura 5.53:**  $R$ -Regiones correspondientes a la  $L$ -Región  $D_2$ . Fuente: Elaboración propia.

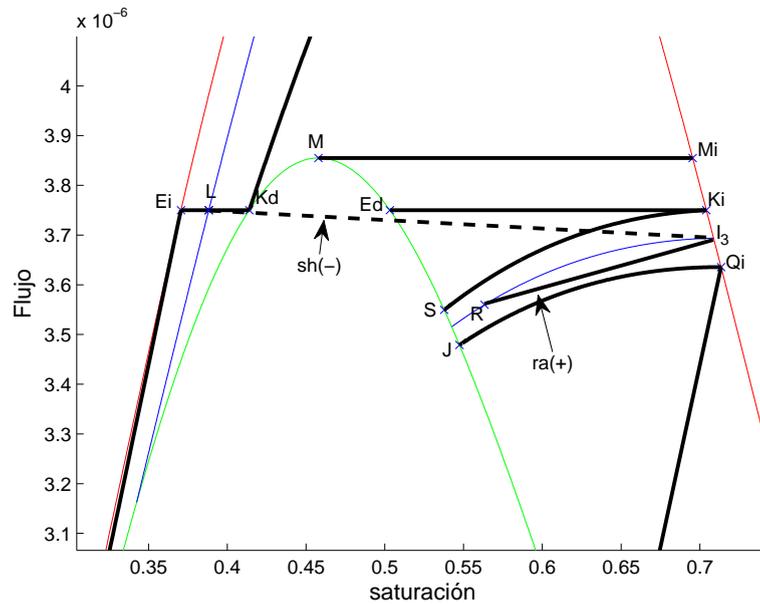


**Figura 5.54:** Solución para  $L \in D_2$  y  $R \in R_{D_2}^I$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

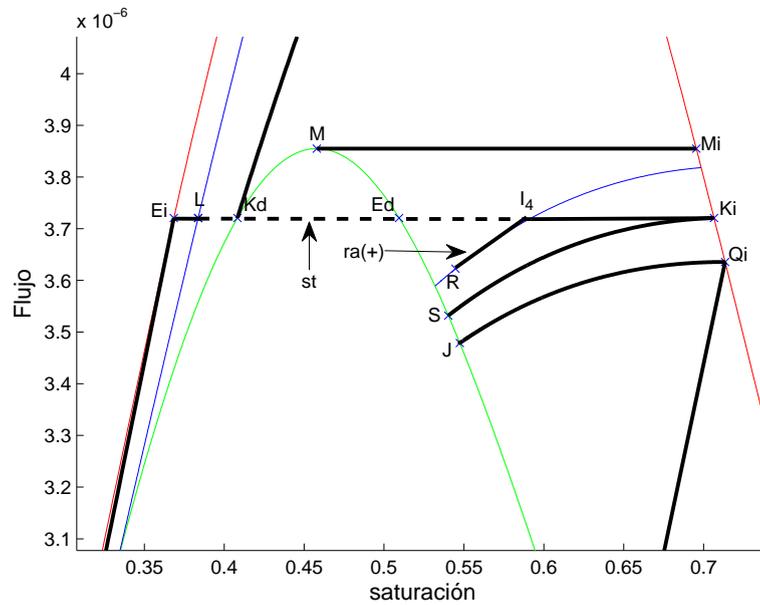


**Figura 5.55:** Solución para  $L \in D2$  y  $R \in R_{D2}^{II}$ . Fuente: Elaboración propia.

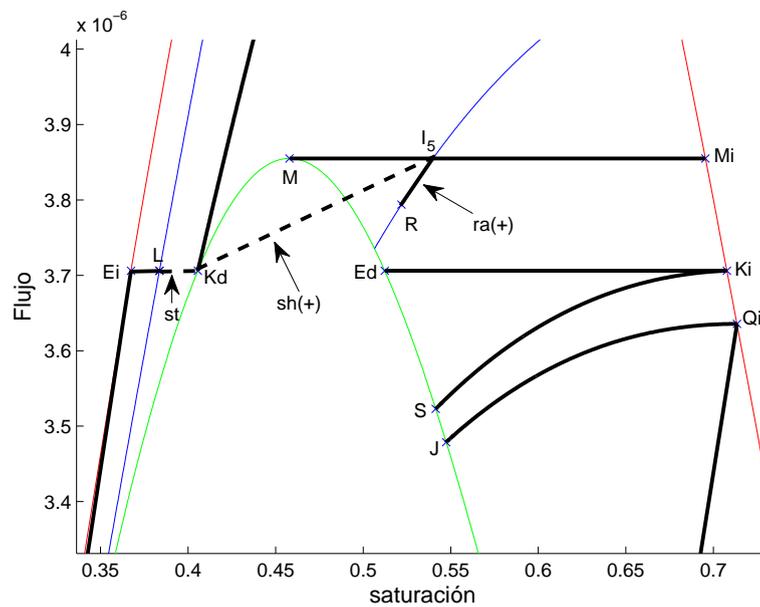


**Figura 5.56:** Solución para  $L \in D2$  y  $R \in R_{D2}^{III}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

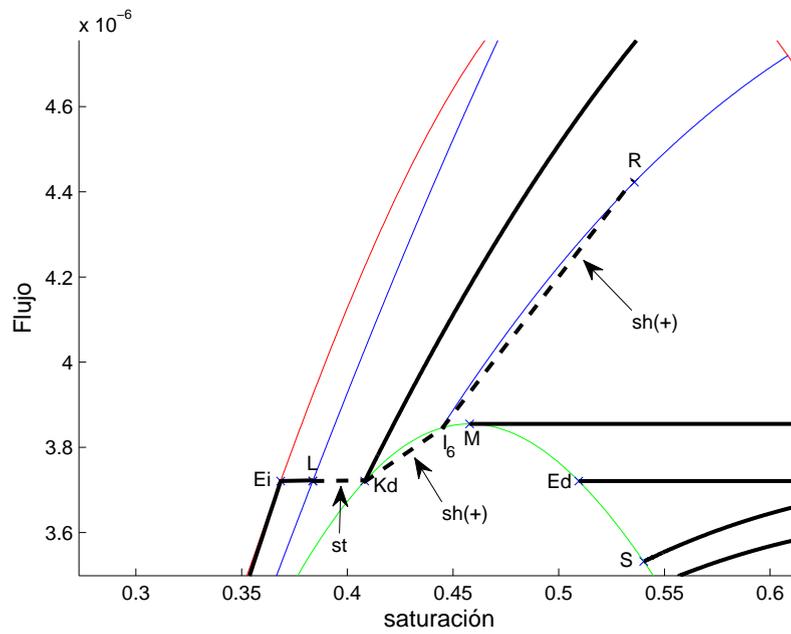


**Figura 5.57:** Solución para  $L \in D2$  y  $R \in R_{D2}^{IV}$ . Fuente: Elaboración propia.

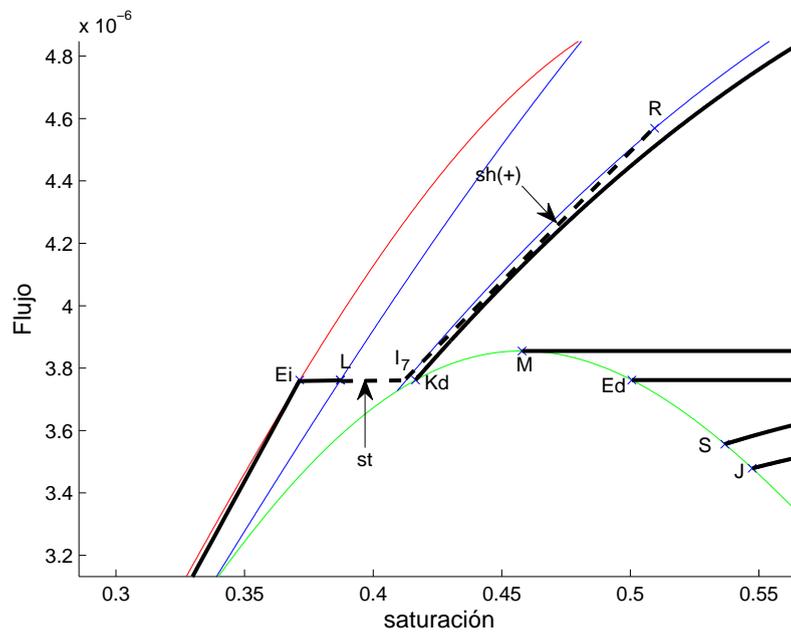


**Figura 5.58:** Solución para  $L \in D2$  y  $R \in R_{D2}^V$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

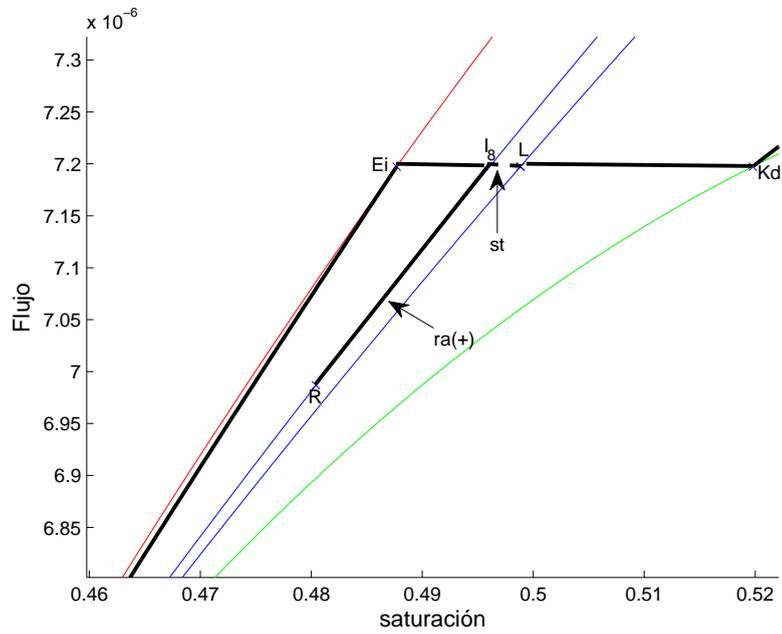


**Figura 5.59:** Solución para  $L \in D_2$  y  $R \in R_{D_2}^{VI}$ . Fuente: Elaboración propia.

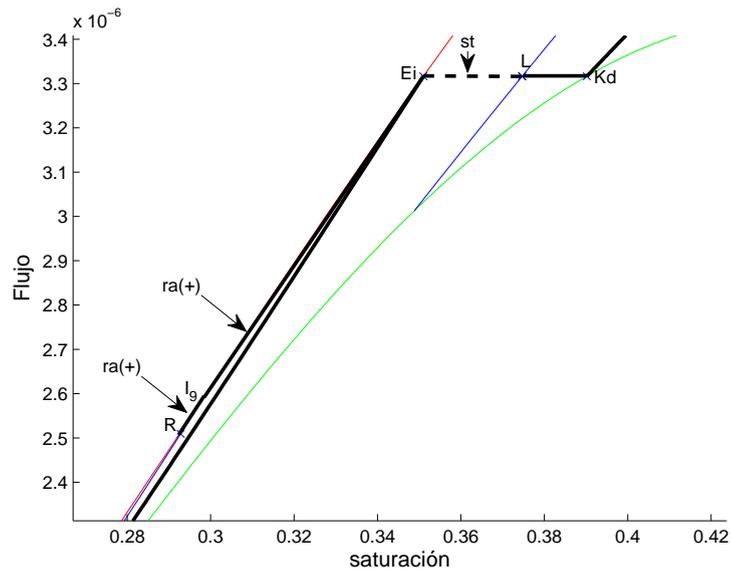


**Figura 5.60:** Solución para  $L \in D_2$  y  $R \in R_{D_2}^{VII}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

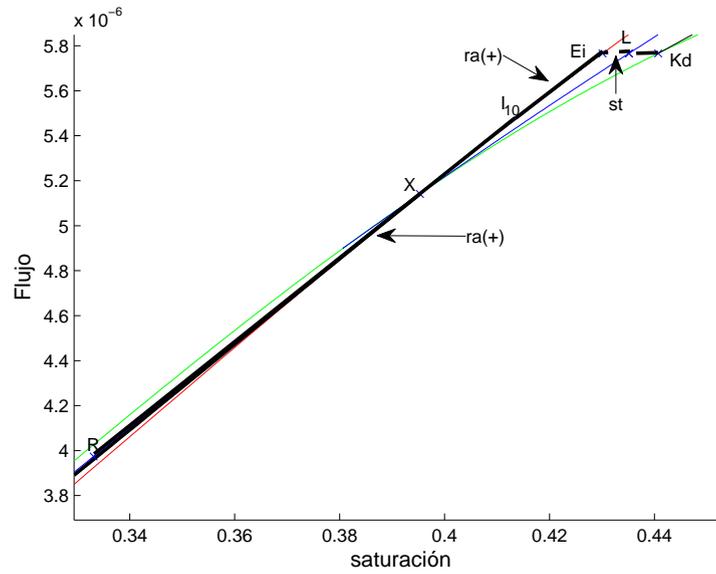


**Figura 5.61:** Solución para  $L \in D2$  y  $R \in R_{D2}^{VIII}$ . Fuente: Elaboración propia.

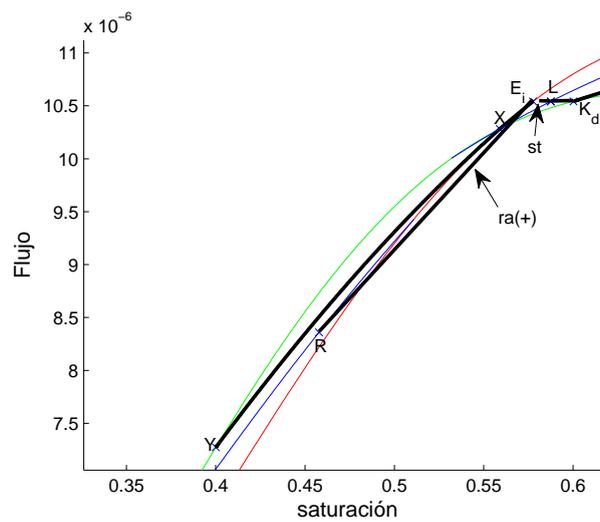


**Figura 5.62:** Solución para  $L \in D2$  y  $R \in R_{D2}^{IX}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



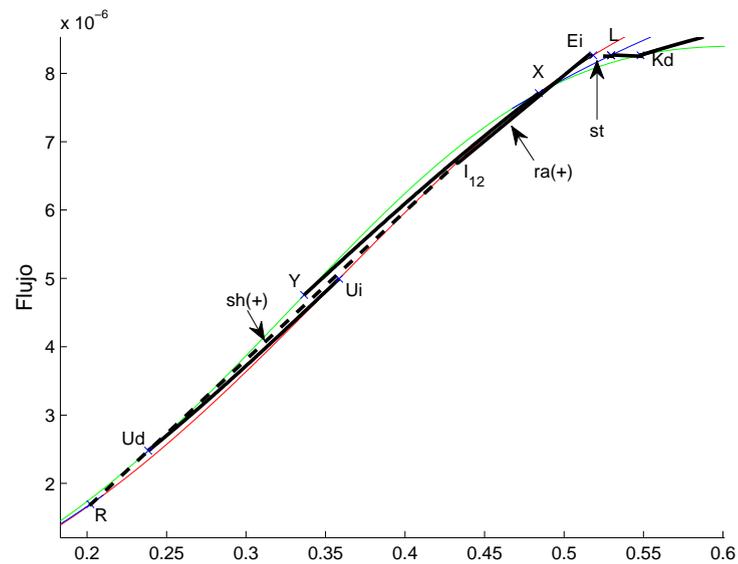
**Figura 5.63:** Solución para  $L \in D2$  y  $R \in R_{D2}^X$ . Fuente: Elaboración propia.



**Figura 5.64:** Solución para  $L \in D2$  y  $R \in R_{D2}^I$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

---



**Figura 5.65:** Solución para  $L \in D2$  y  $R \in R_{D2}^{XII}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

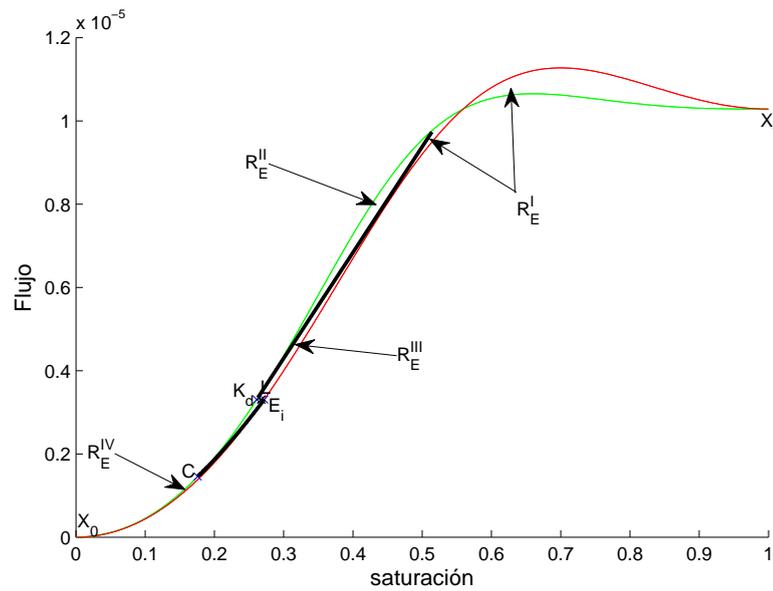
Caso E: Dividimos  $\Omega$  en 4 sub-regiones de  $R$  para  $L = (S_L, F(S_L, \pi_L)) \in E$  :

$$R_E^I := \{(S, F) \in \Omega | F \geq F_L, S \geq S_A(F)\}$$

$$R_E^{II} := \{(S, F) \in \Omega | F \geq F_L, S \geq S_A(F)\}$$

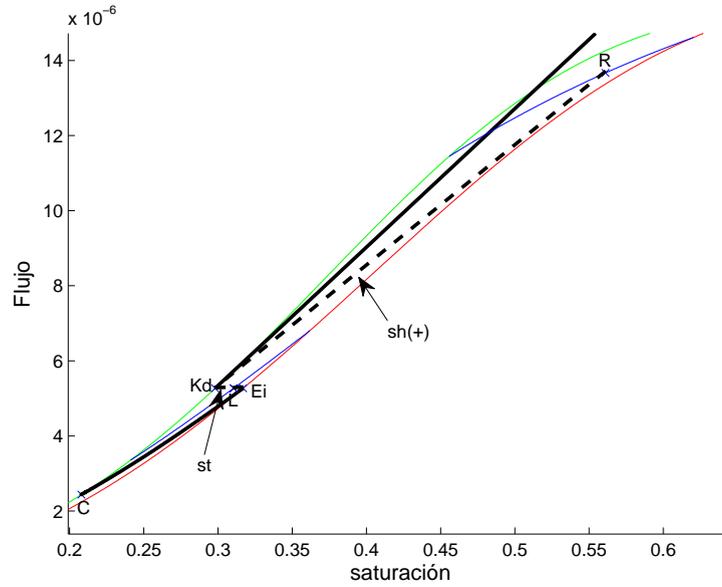
$$R_E^{III} := \{(S, F) \text{ en la región envuelta por } (SE_d)^{dr}, \overline{(E_d K_i)}, (K_i C)^{sc}\}$$

$$R_E^{IV} := \{(S, F) \text{ en la región envuelta por } (X_0 C)^{dr}, (C K_i)^{sc}, (K_i X_0)^{im}\}$$

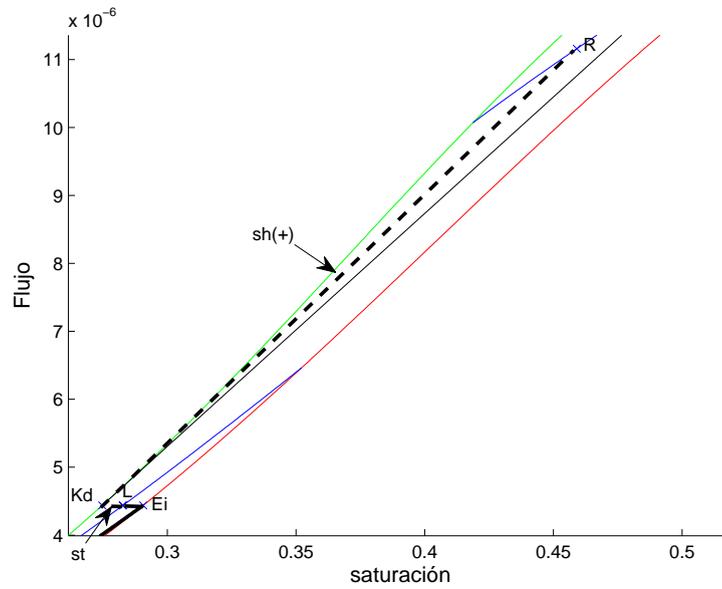


**Figura 5.66:**  $R$ -Regiones correspondientes a la  $L$ -Región E. Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

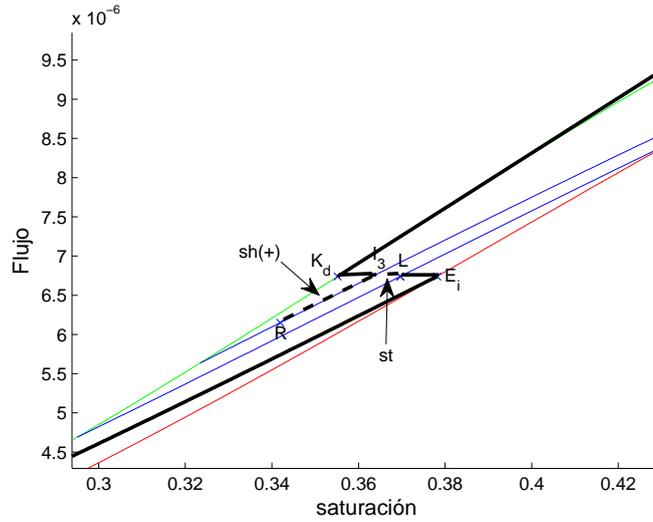


**Figura 5.67:** Solución para  $L \in E$  y  $R \in R_E^I$ . Fuente: Elaboración propia.

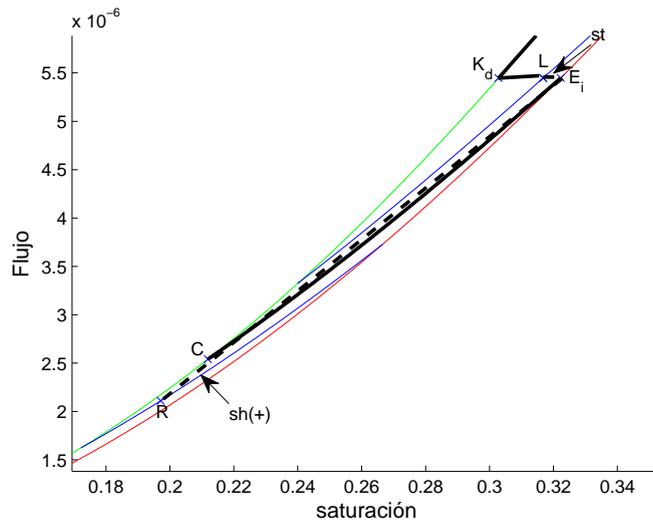


**Figura 5.68:** Solución para  $L \in E$  y  $R \in R_E^{II}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

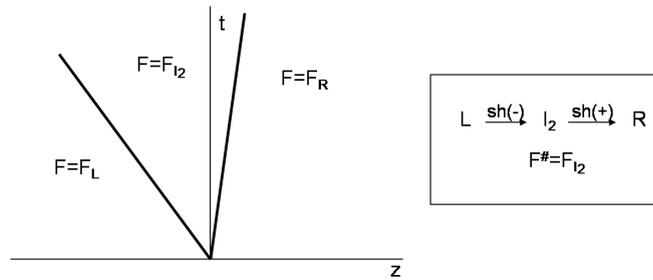


**Figura 5.69:** Solución para  $L \in E$  y  $R \in R_E^{III}$ . Fuente: Elaboración propia.



**Figura 5.70:** Solución para  $L \in E$  y  $R \in R_E^{IV}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



**Figura 5.71:** Solución de Riemann representada por sus características. Fuente: Elaboración propia.

**Determinación de flujo en frontera a partir de las soluciones de Riemann**

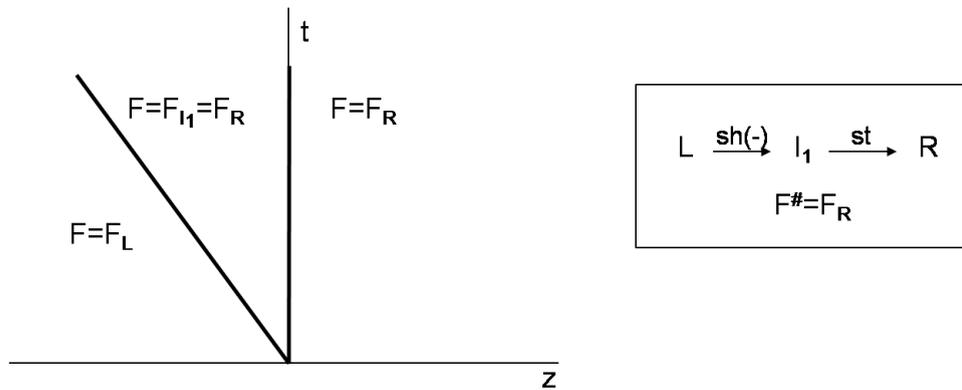
Habíamos mencionado anteriormente que las soluciones de Riemann pueden representarse en un plano  $z-t$  a través de sus curvas características. Las características de las ondas de choque, rarefacción y estacionaria determinan (en el plano  $z-t$ ) regiones con saturación y  $\pi$  constante, y como el flujo depende de la saturación y de  $\pi$ , también determinan regiones de flujo constante; las características de las ondas de rarefacción además de regiones con saturación y flujo constante determinan regiones donde la saturación y el flujo varían continuamente. De acuerdo a esta forma de representar las soluciones (según sus características), el método para obtener el valor del flujo en una frontera consiste en determinar en qué región, determinada por las características, cae la frontera en cuestión.

En la Figura 5.71, observamos una solución de Riemann representada por sus características. La recta a la izquierda de la frontera (la frontera representada por el eje  $t$ ) representa una onda de choque negativa  $sh(-)$ , negativa porque viaja hacia la izquierda, y la que está a la derecha de la frontera representa una onda de choque positiva  $sh(+)$ , positiva porque viaja hacia la derecha. Estas rectas delimitan regiones de flujo constante. Así, como la frontera cae en la región de flujo

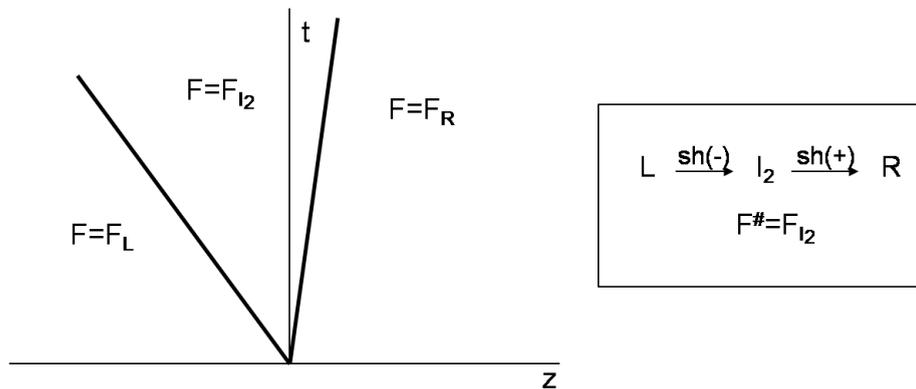
**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

constante  $F_{I_2}$ , el flujo en la frontera es  $F^\# = F_{I_2}$ .

A continuación presentamos los flujos en las fronteras para cada para cada combinación de  $L$ -Región y  $R$ -Región:

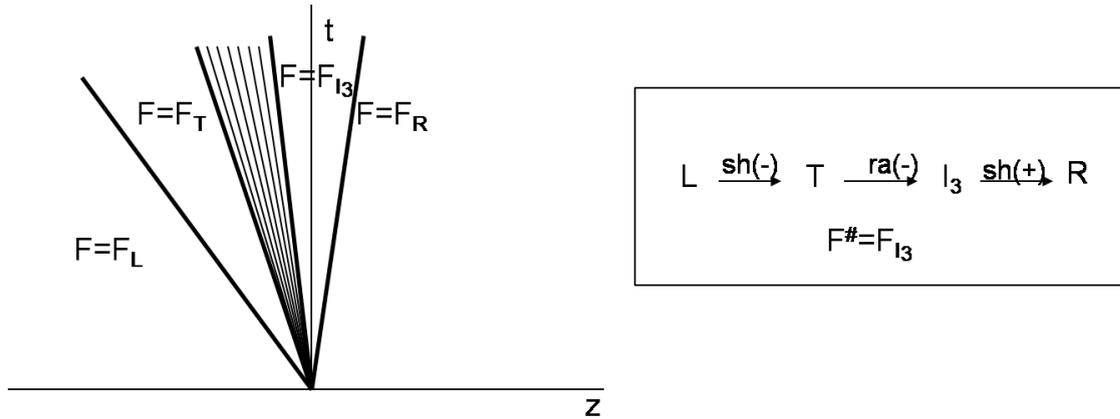


**Figura 5.72:** Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in A$  y  $R \in R_A^I$ . Fuente: Elaboración propia.

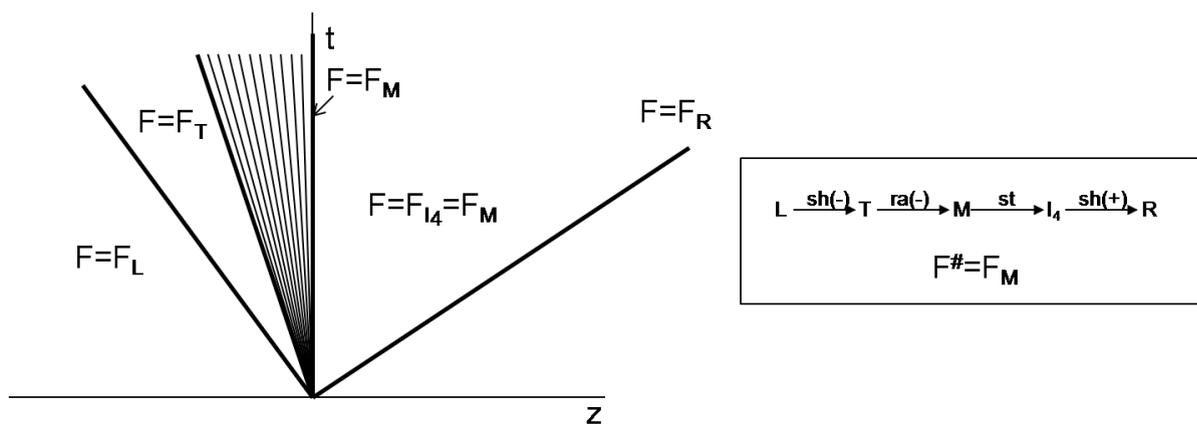


**Figura 5.73:** Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in A$  y  $R \in R_A^{II}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

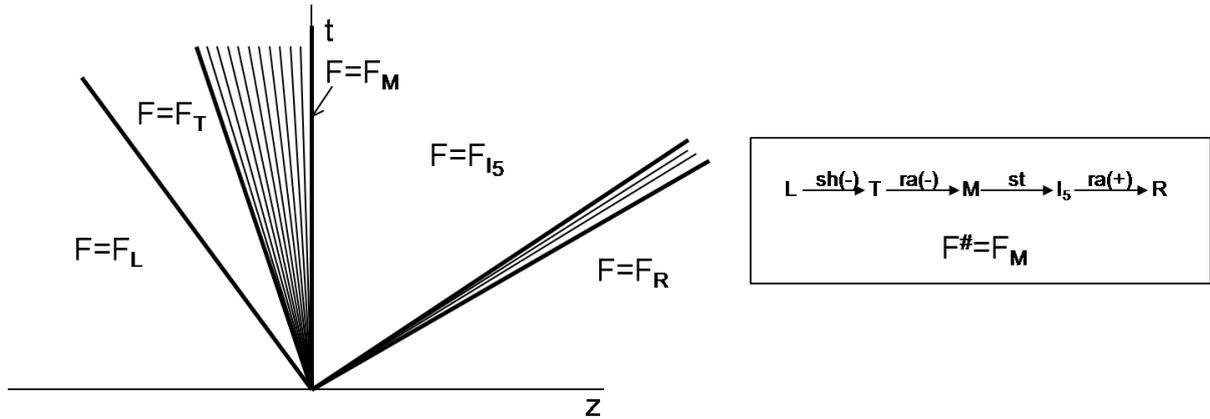


**Figura 5.74:** Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in A$  y  $R \in R_A^{III}$ . Fuente: Elaboración propia.

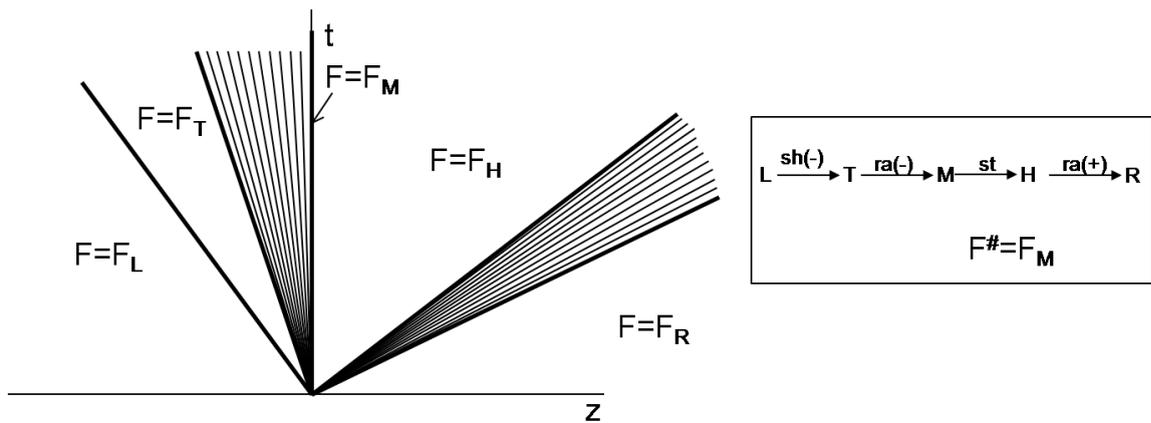


**Figura 5.75:** Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in A$  y  $R \in R_A^{IV}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

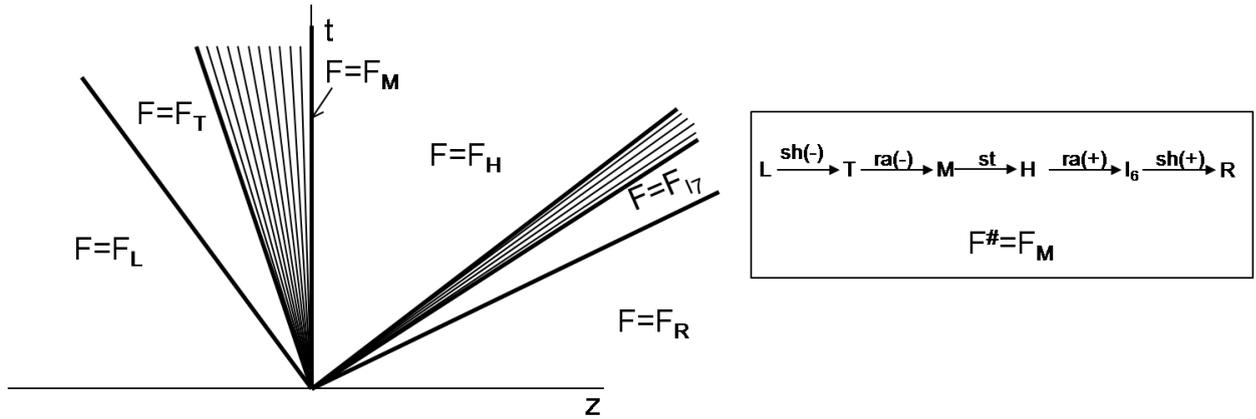


**Figura 5.76:** Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in A$  y  $R \in R_A^V$ . Fuente: Elaboración propia.

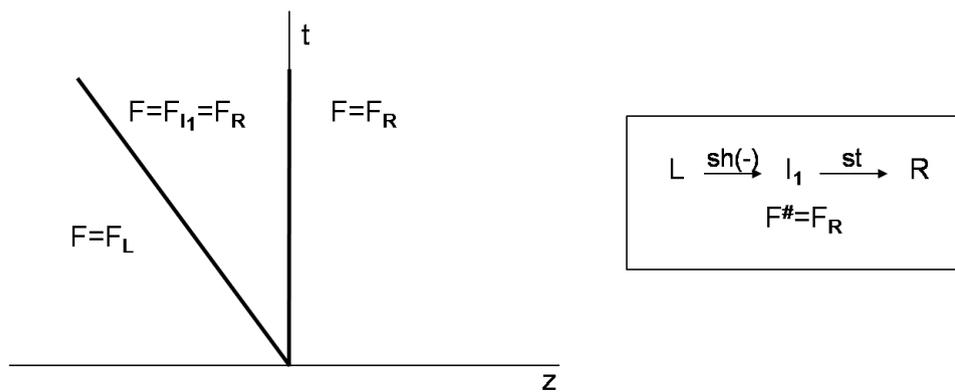


**Figura 5.77:** Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in A$  y  $R \in R_A^{VI}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

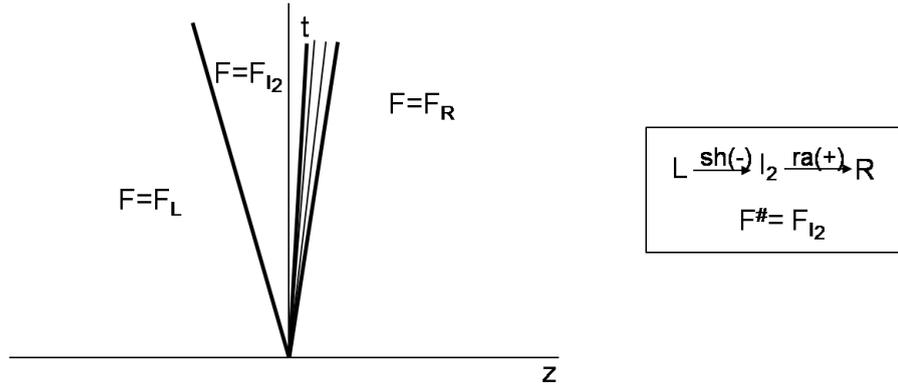


**Figura 5.78:** Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in A$  y  $R \in R_A^{VII}$ . Fuente: Elaboración propia.

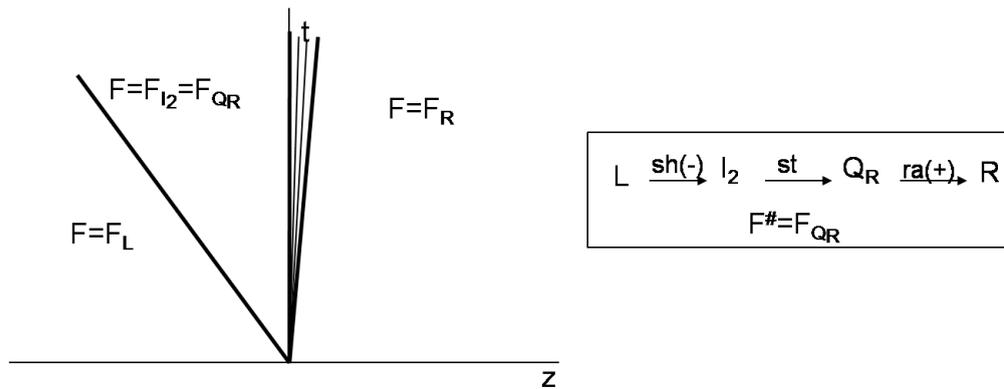


**Figura 5.79:** Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in B$  y  $R \in R_B^I$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

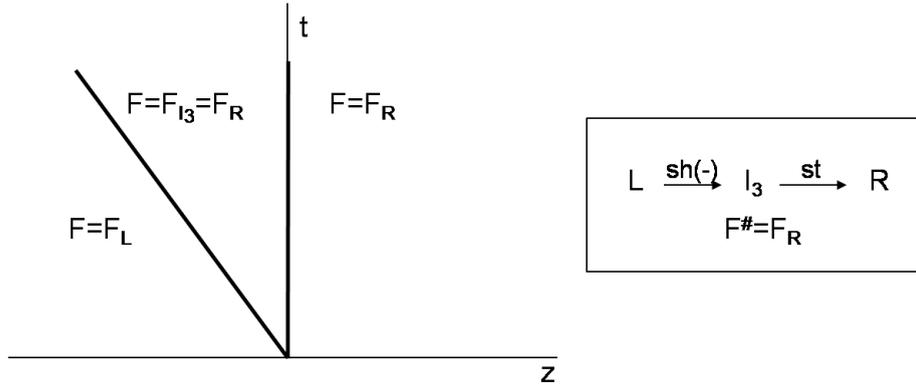


**Figura 5.80:** Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in B$  y  $R \in Rv_B^{II(a)}$ . Fuente: Elaboración propia.

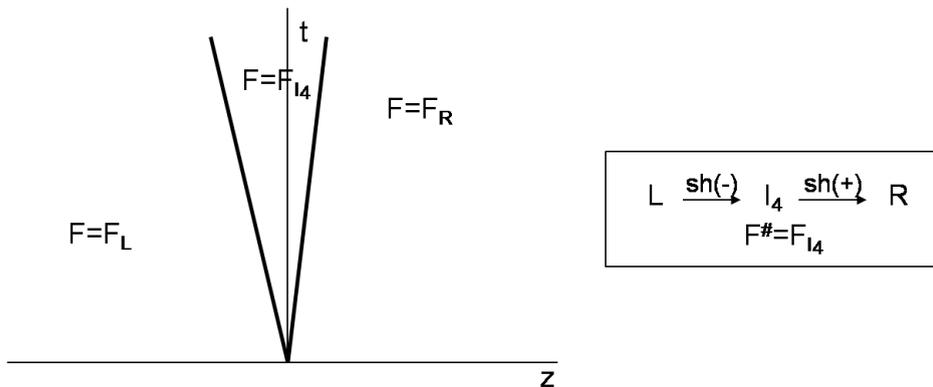


**Figura 5.81:** Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in B$  y  $R \in Rv_B^{II(b)}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

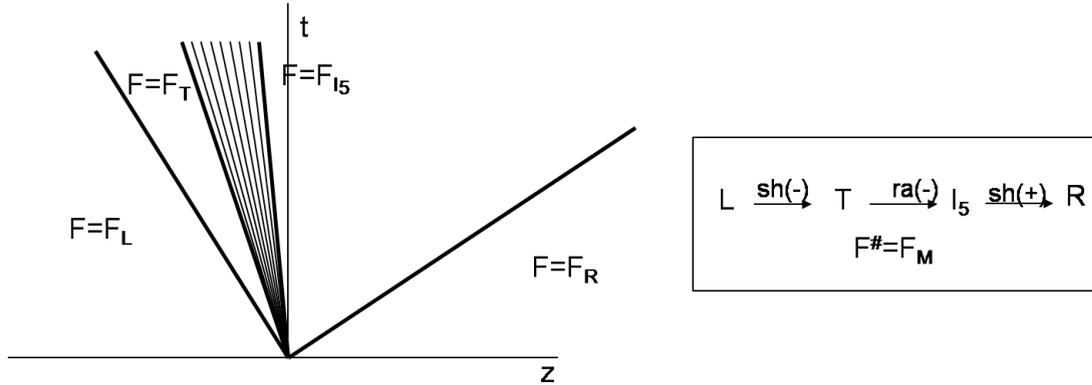


**Figura 5.82:** Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in B$  y  $R \in R_B^{III}$ . Fuente: Elaboración propia.

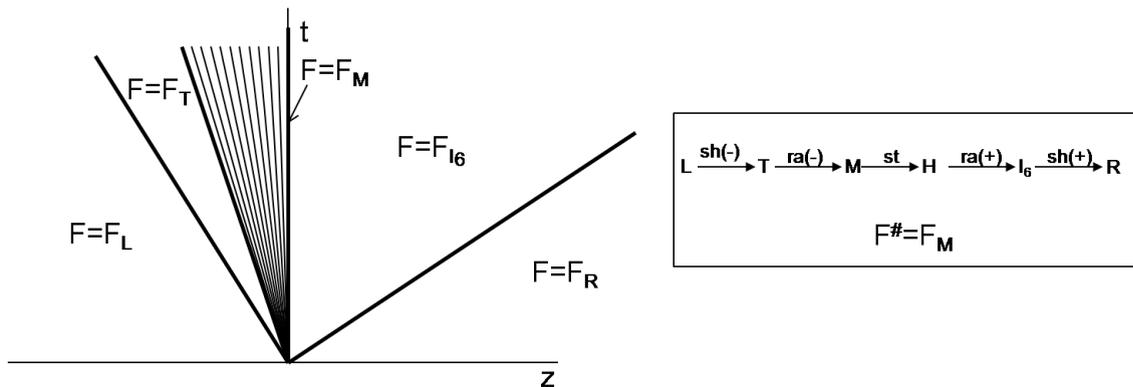


**Figura 5.83:** Características de las ondas Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in B$  y  $R \in R_B^{IV}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

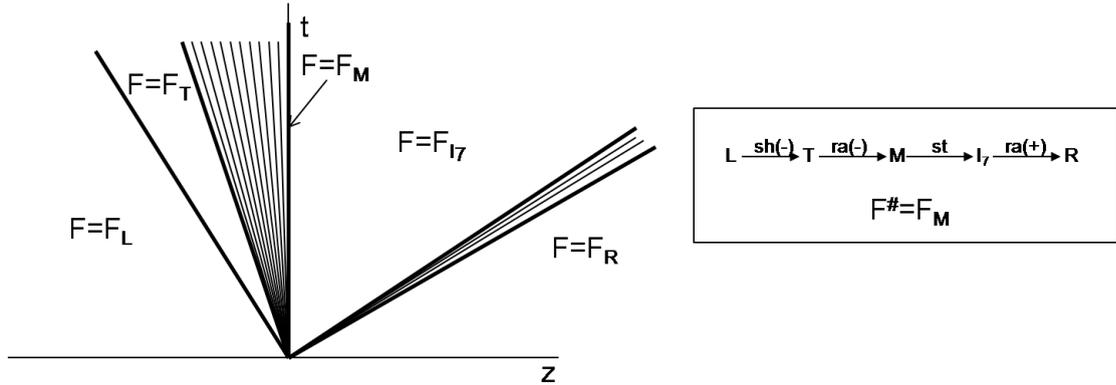


**Figura 5.84:** Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in B$  y  $R \in R_B^V$ . Fuente: Elaboración propia.

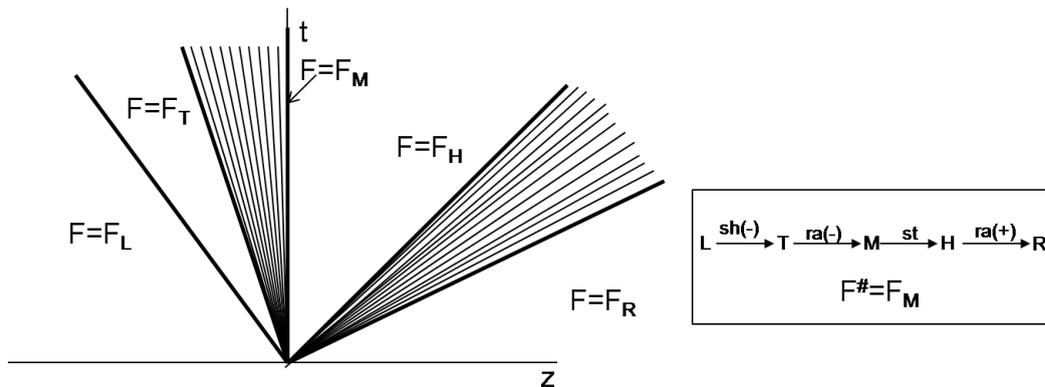


**Figura 5.85:** Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in B$  y  $R \in R_B^{VI}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

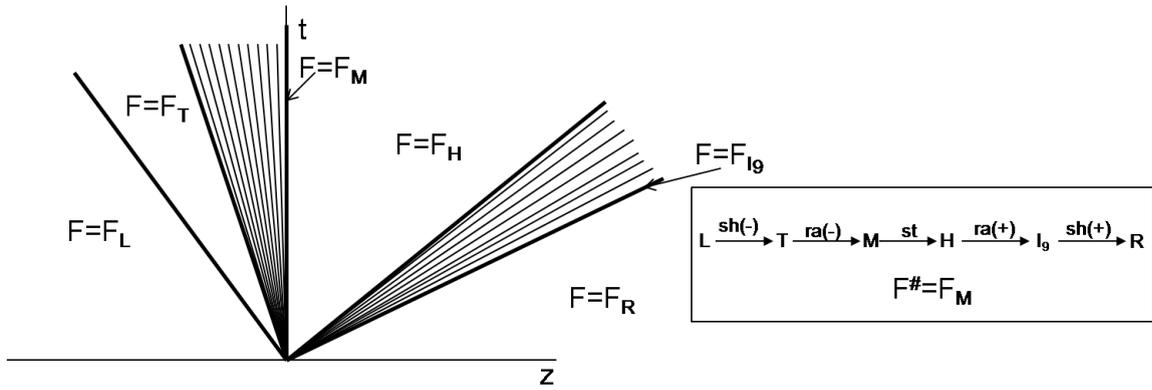


**Figura 5.86:** Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in B$  y  $R \in R_B^{VII}$ . Fuente: Elaboración propia.

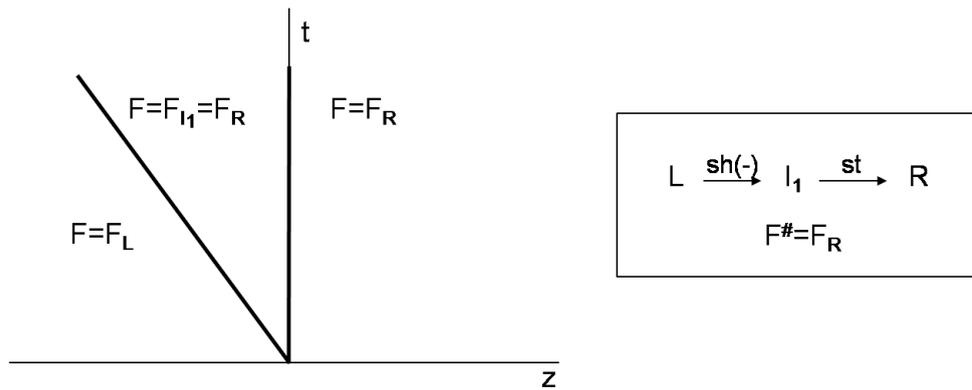


**Figura 5.87:** Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in B$  y  $R \in R_B^{VIII}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

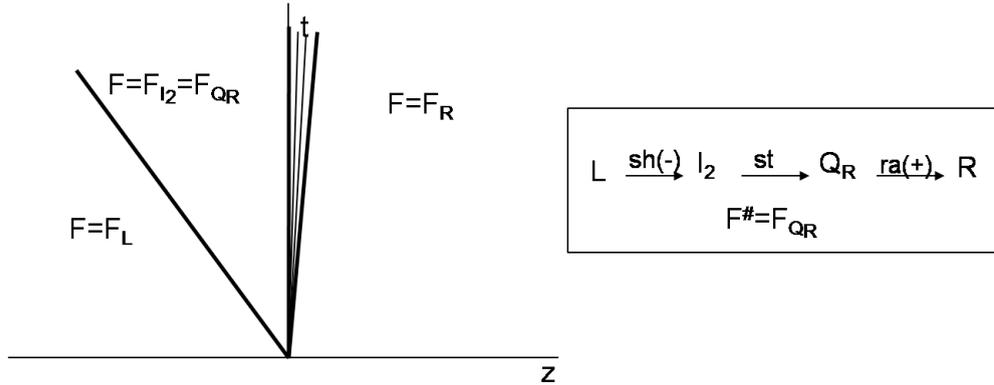


**Figura 5.88:** Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in B$  y  $R \in R_B^{IX}$ . Fuente: Elaboración propia.

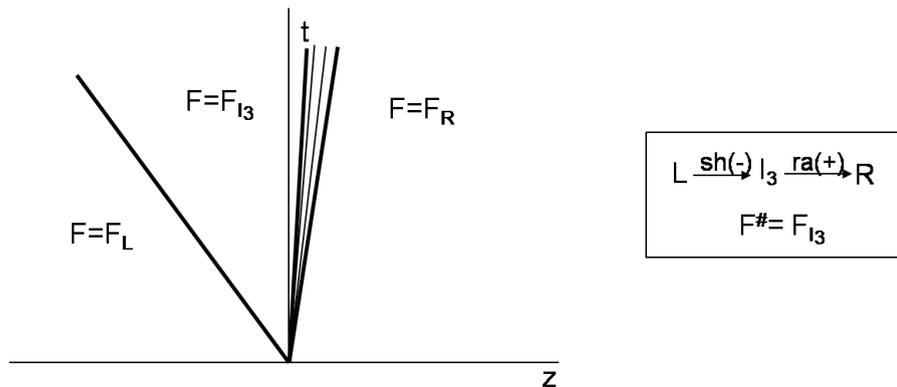


**Figura 5.89:** Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in C$  y  $R \in R_C^I$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

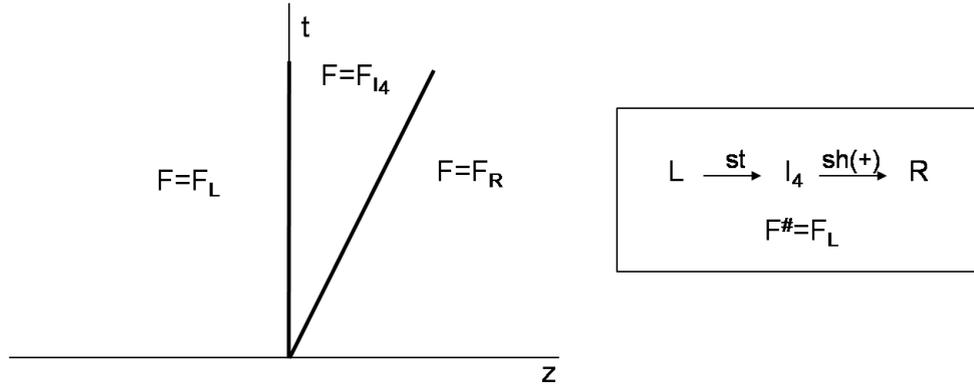


**Figura 5.90:** Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in C$  y  $R \in R_C^{II}$ . Fuente: Elaboración propia.

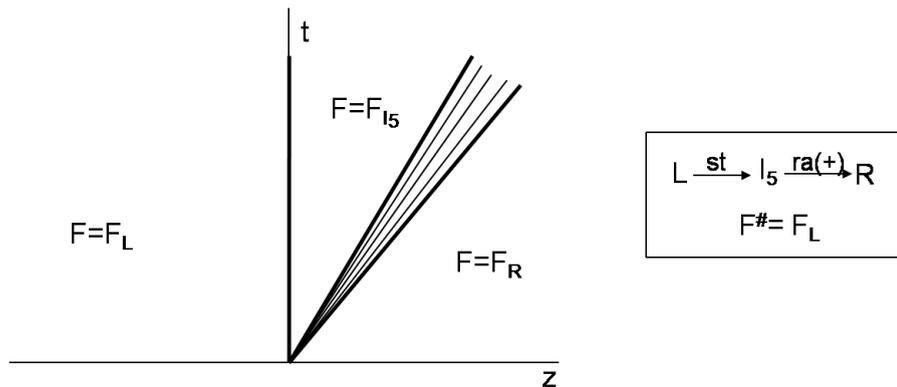


**Figura 5.91:** Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in C$  y  $R \in R_C^{III}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

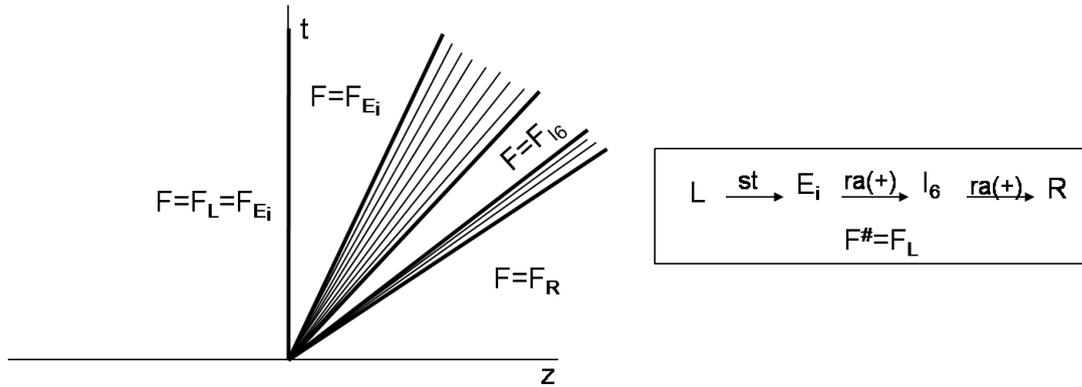


**Figura 5.92:** Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in C$  y  $R \in R_C^{IV}$ . Fuente: Elaboración propia.

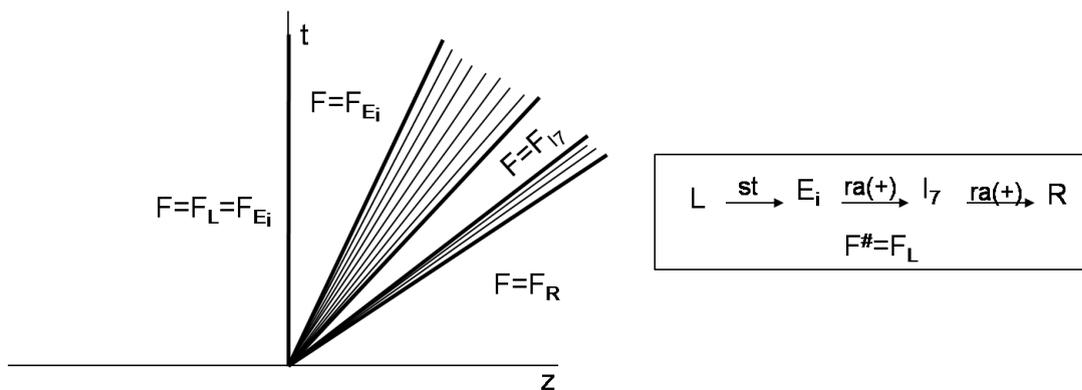


**Figura 5.93:** Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in C$  y  $R \in R_C^V$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

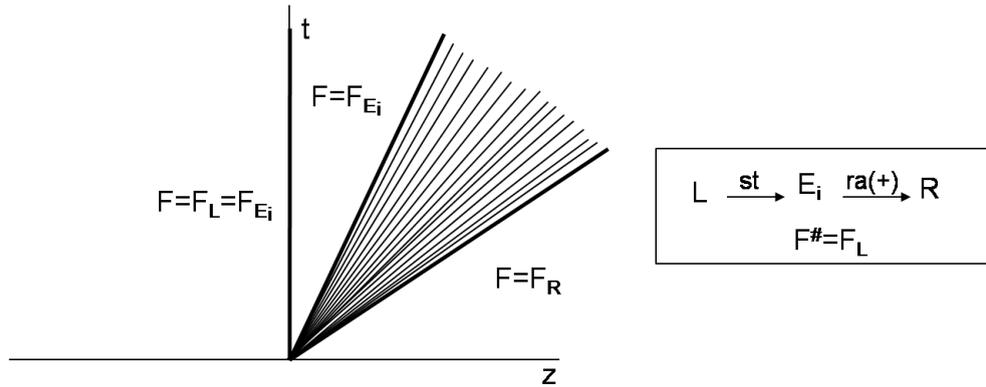


**Figura 5.94:** Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in C$  y  $R \in R_C^{VI}$ . Fuente: Elaboración propia.

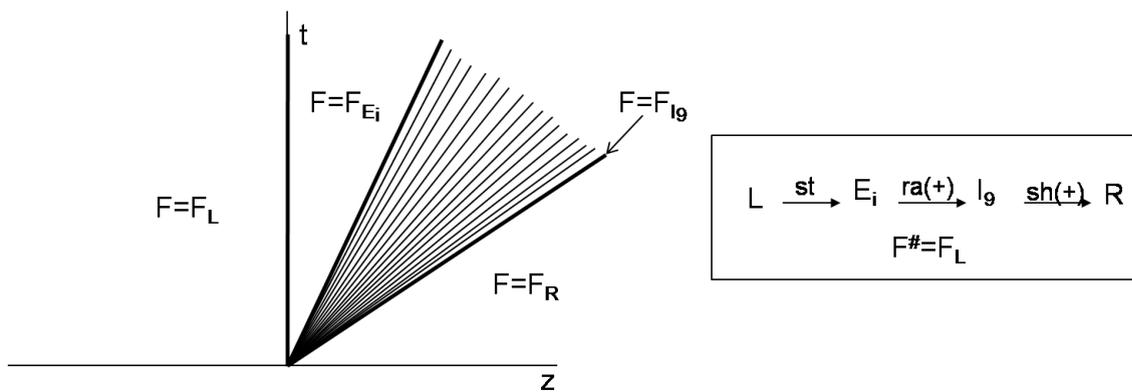


**Figura 5.95:** Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in C$  y  $R \in R_C^{VII}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

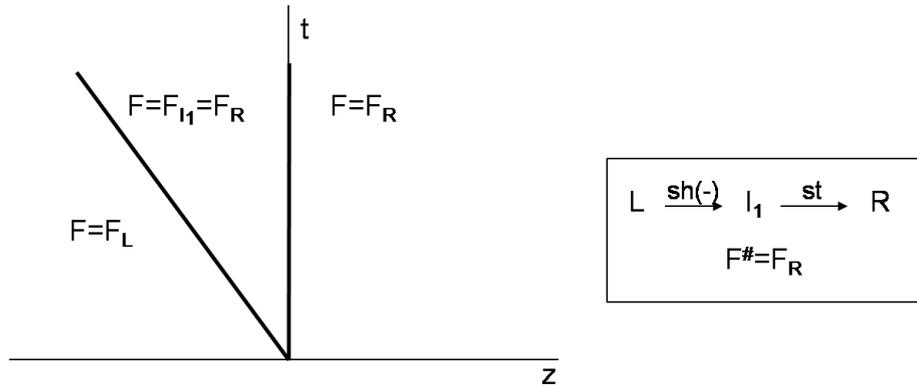


**Figura 5.96:** Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in C$  y  $R \in R_C^{VIII}$ . Fuente: Elaboración propia.

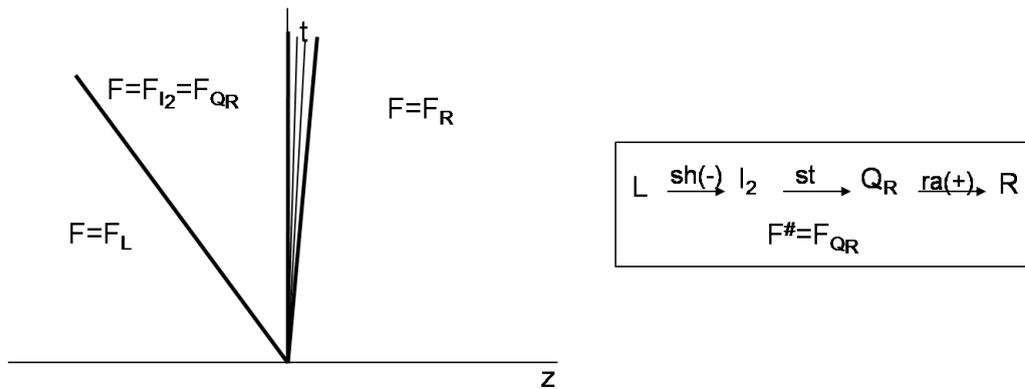


**Figura 5.97:** Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in C$  y  $R \in R_C^{IX}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

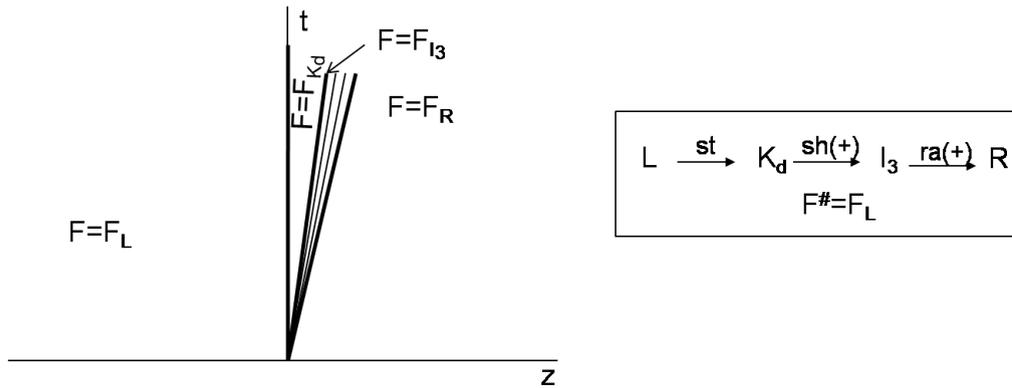


**Figura 5.98:** Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in D$  y  $R \in R_{D1}^I$ . Fuente: Elaboración propia.

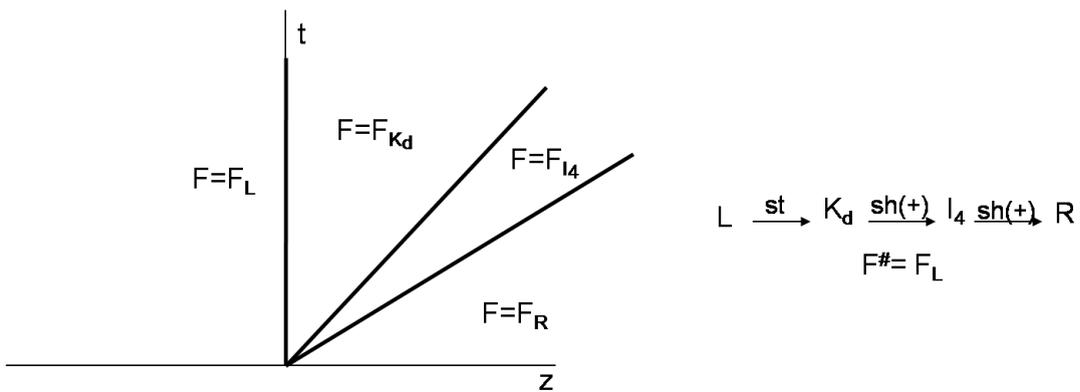


**Figura 5.99:** Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in D1$  y  $R \in R_{D1}^{II}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

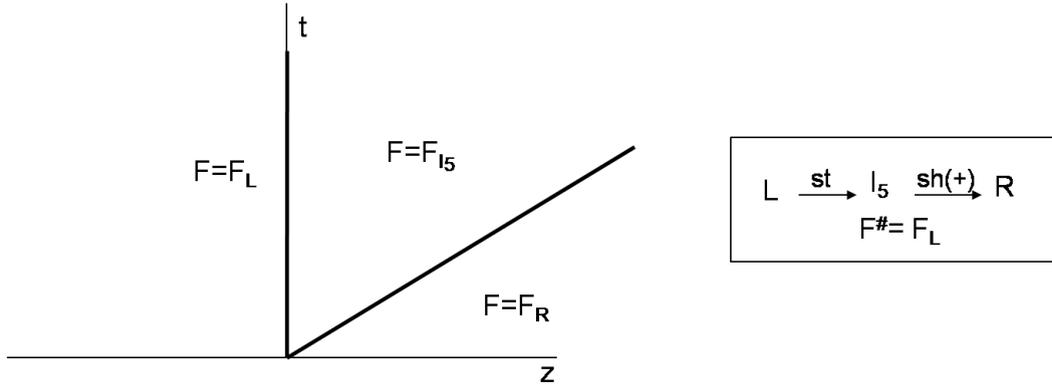


**Figura 5.100:** Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in D1$  y  $R \in R_{D1}^{III}$ . Fuente: Elaboración propia.

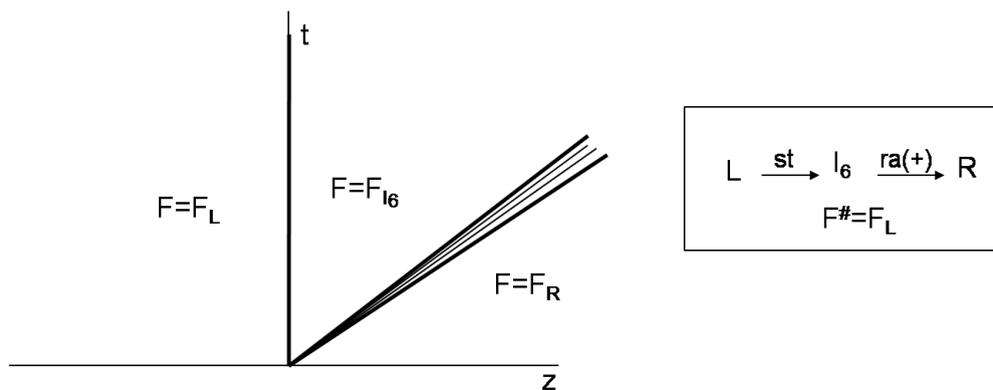


**Figura 5.101:** Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in D1$  y  $R \in R_{D1}^{IV}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

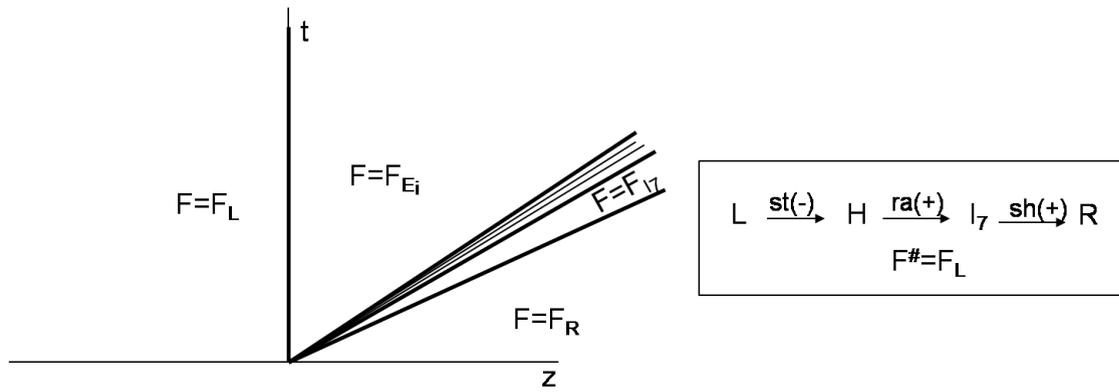


**Figura 5.102:** Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in D1$  y  $R \in R_{D1}^V$ . Fuente: Elaboración propia.

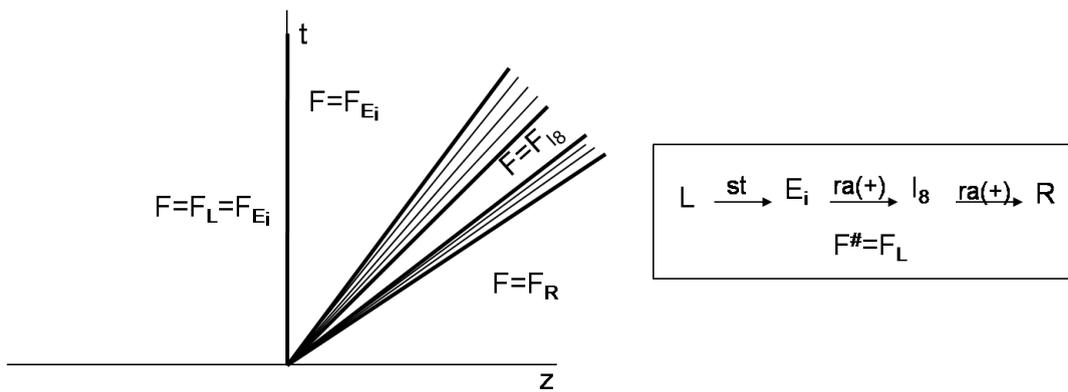


**Figura 5.103:** Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in D1$  y  $R \in R_{D1}^I$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

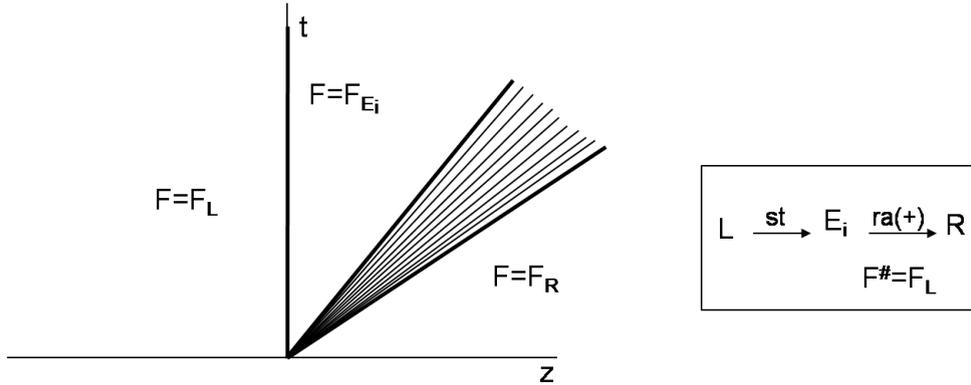


**Figura 5.104:** Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in D1$  y  $R \in R_{D1}^{VII}$ . Fuente: Elaboración propia.

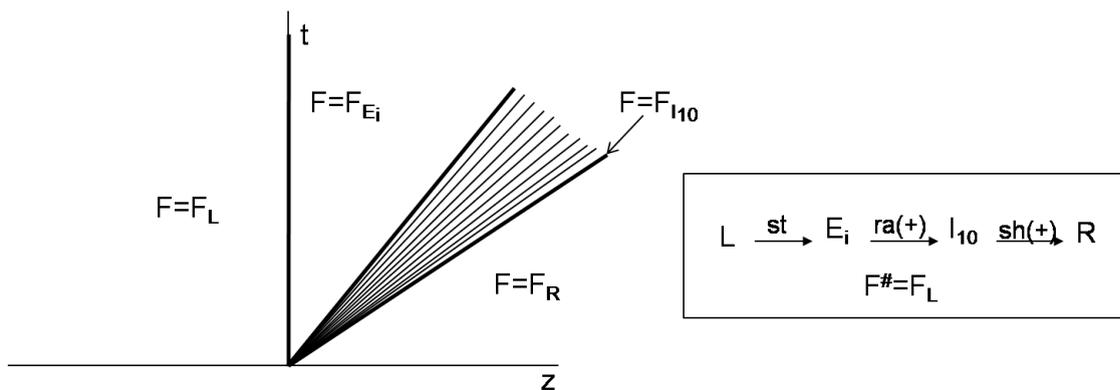


**Figura 5.105:** Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in D1$  y  $R \in R_{D1}^{VIII}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

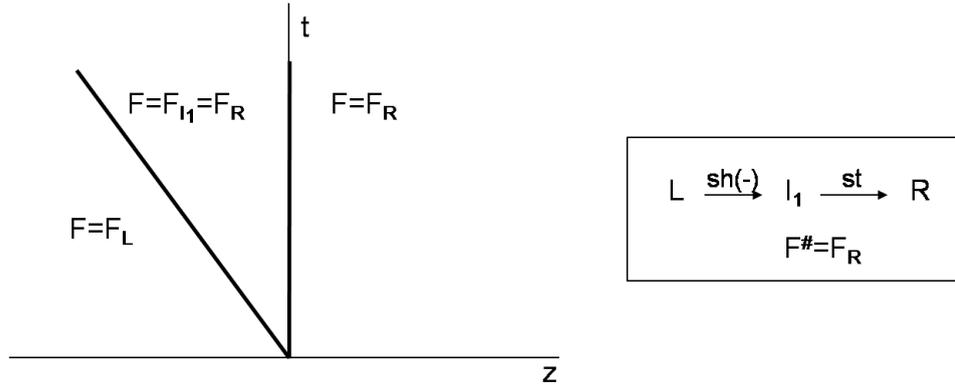


**Figura 5.106:** Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in D1$  y  $R \in R_{D1}^X$ . Fuente: Elaboración propia.

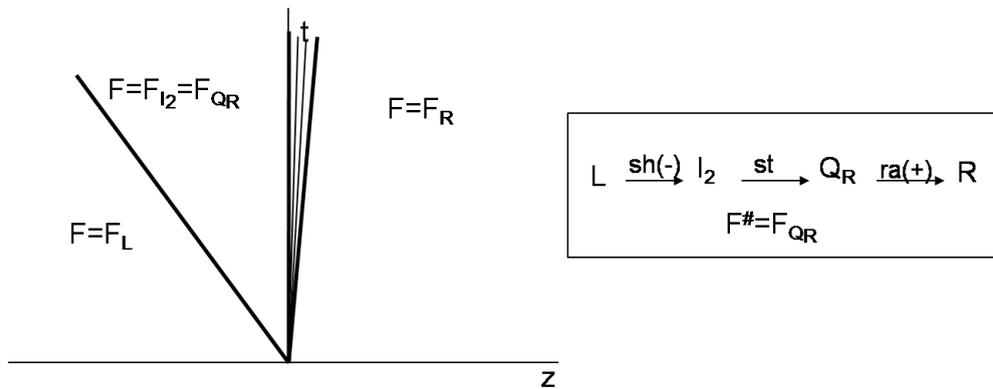


**Figura 5.107:** Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in D1$  y  $R \in R_{D1}^X$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

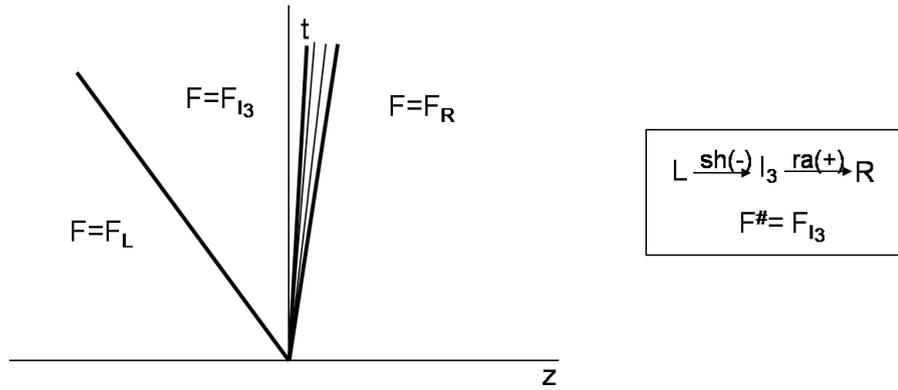


**Figura 5.108:** Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in D2$  y  $R \in R_{D2}^I$ . Fuente: Elaboración propia.

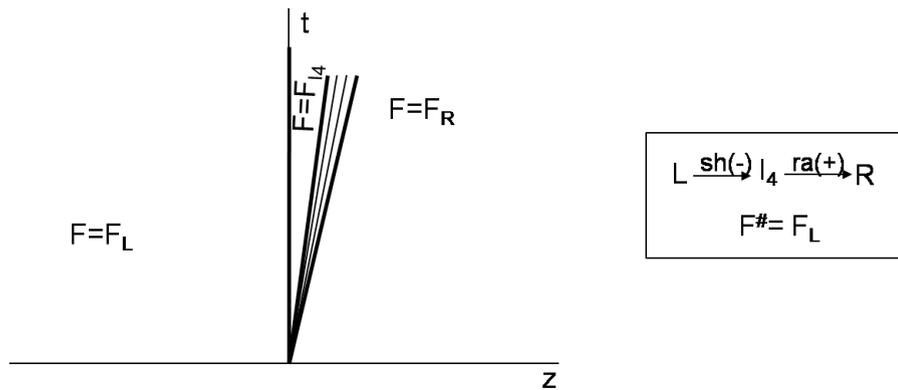


**Figura 5.109:** Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in D2$  y  $R \in R_{D2}^{II}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

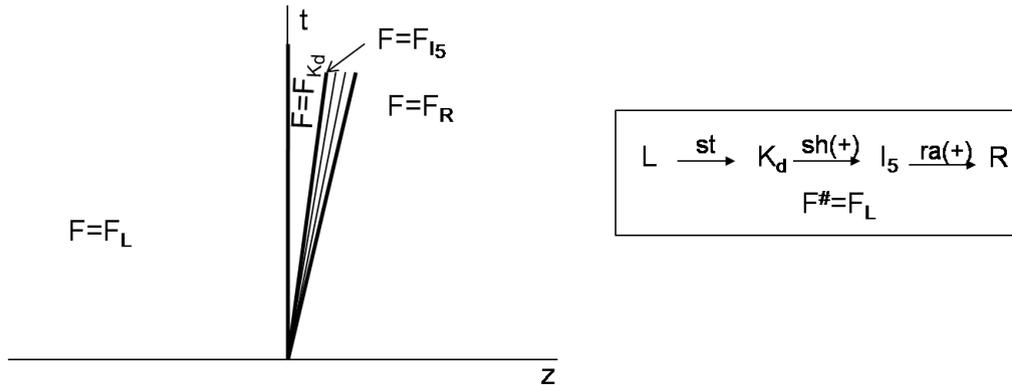


**Figura 5.110:** Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in D_2$  y  $R \in R_{D_2}^{III}$ . Fuente: Elaboración propia.

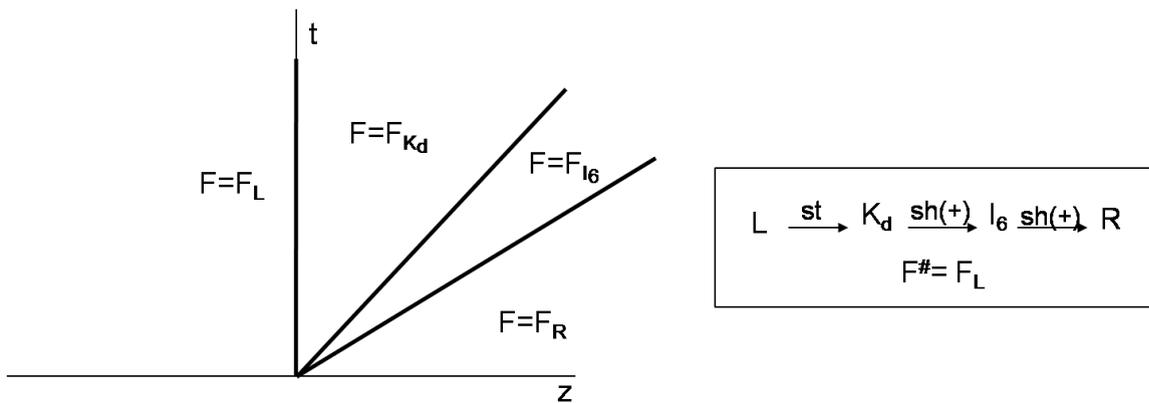


**Figura 5.111:** Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in D_2$  y  $R \in R_{D_2}^{IV}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

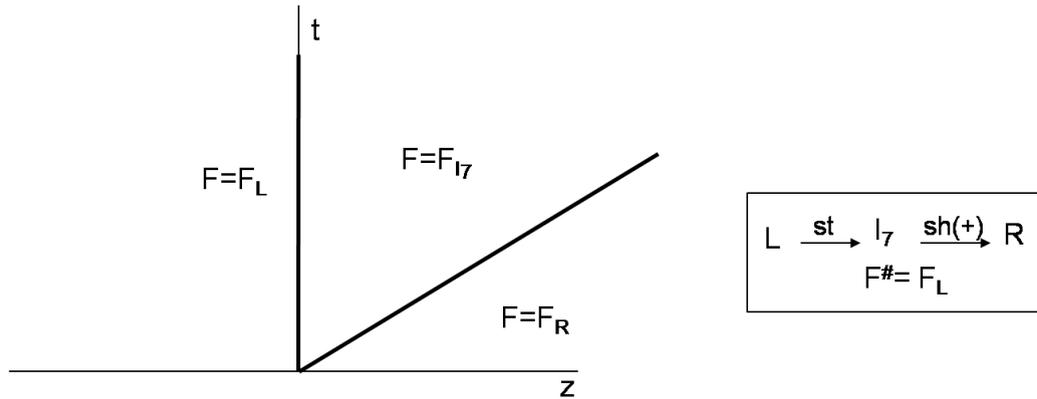


**Figura 5.112:** Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in D2$  y  $R \in R_{D2}^V$ . Fuente: Elaboración propia.

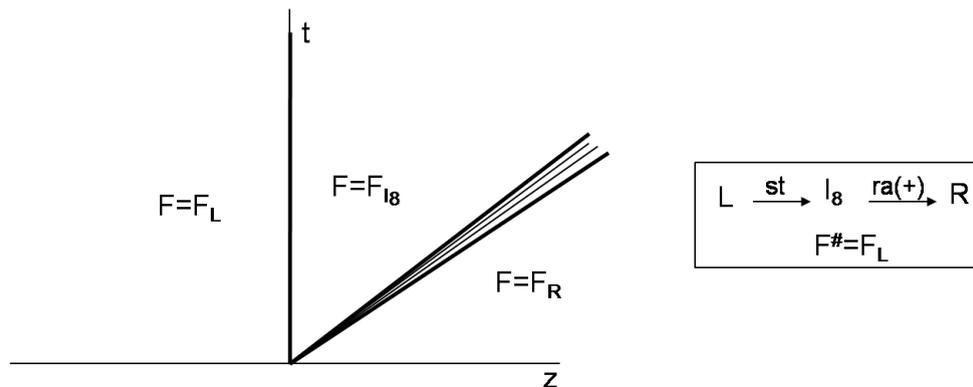


**Figura 5.113:** Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in D2$  y  $R \in R_{D2}^{VI}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

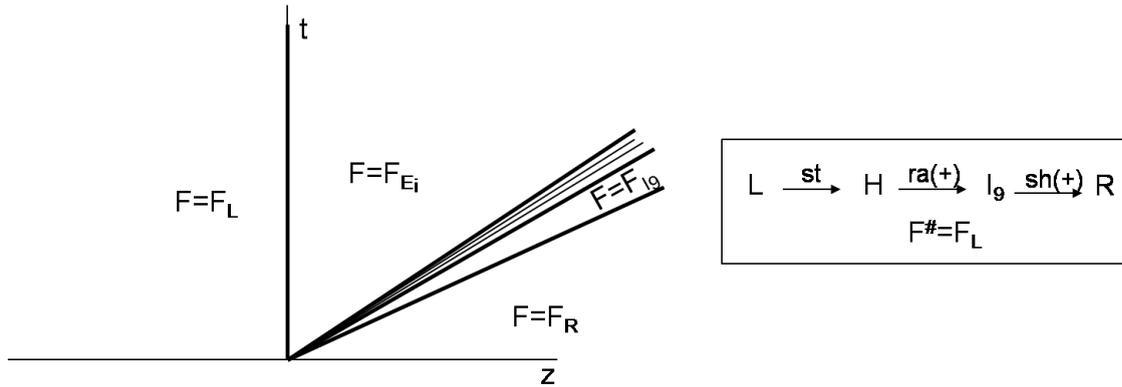


**Figura 5.114:** Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in D_2$  y  $R \in R_{D_2}^{VII}$ . Fuente: Elaboración propia.

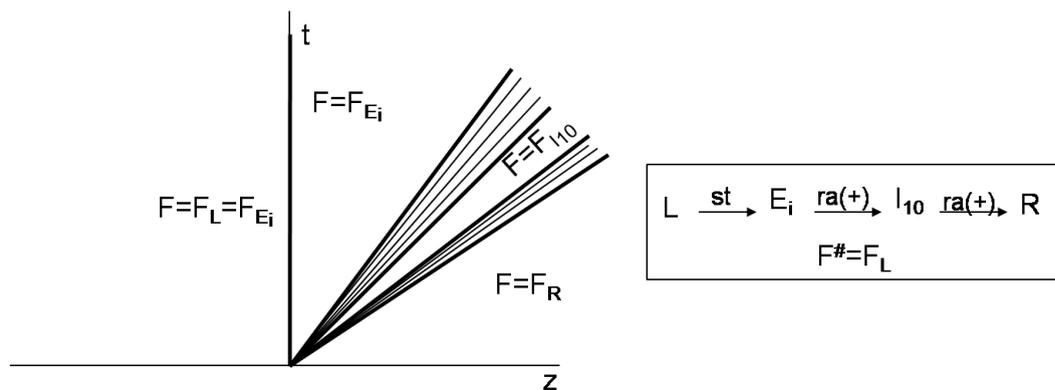


**Figura 5.115:** Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in D_2$  y  $R \in R_{D_2}^{VIII}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

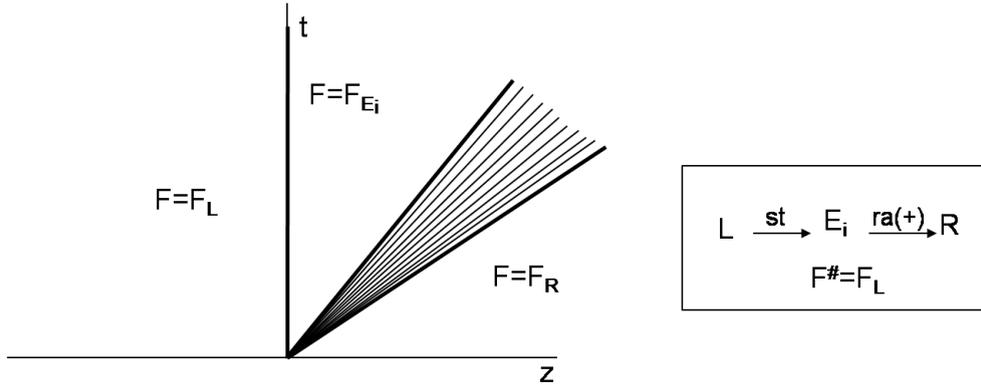


**Figura 5.116:** Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in D_2$  y  $R \in R_{D_2}^X$ . Fuente: Elaboración propia.

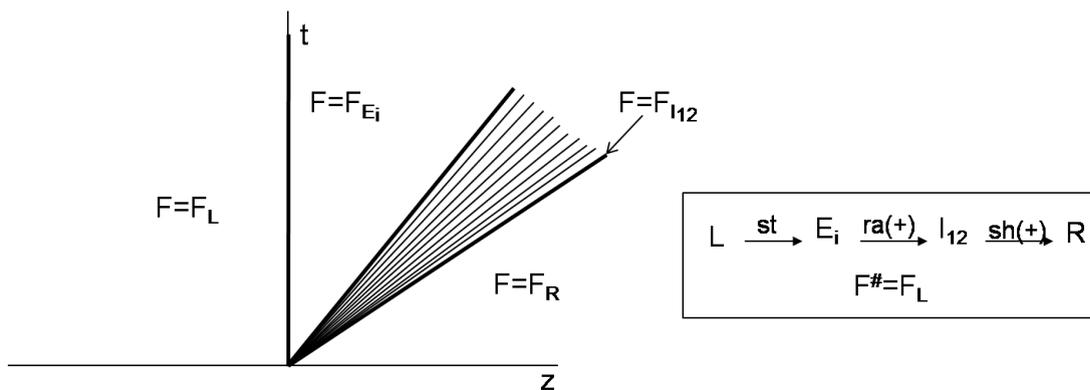


**Figura 5.117:** Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in D_2$  y  $R \in R_{D_2}^X$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

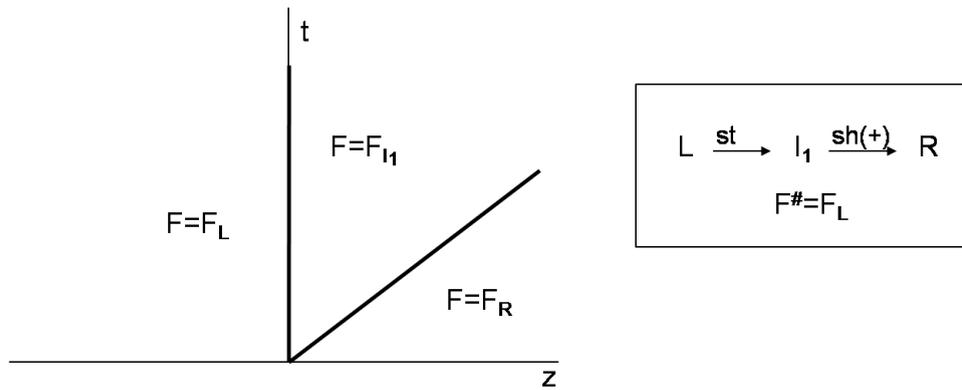


**Figura 5.118:** Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in D_2$  y  $R \in R_{D_2}^{XI}$ . Fuente: Elaboración propia.

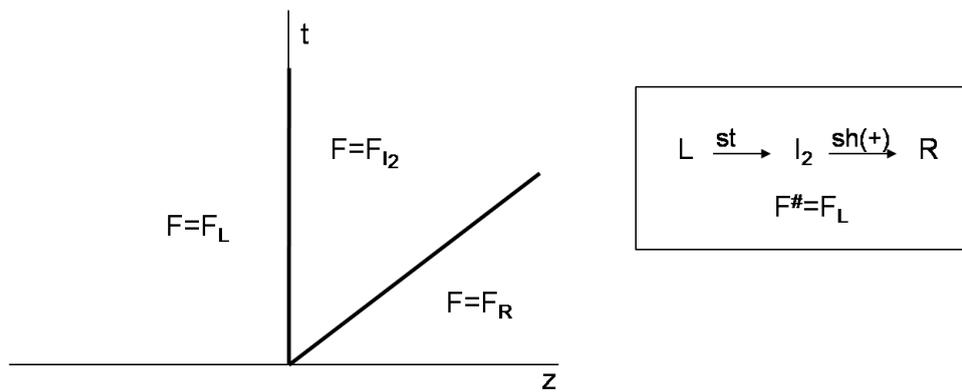


**Figura 5.119:** Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in D_2$  y  $R \in R_{D_2}^{XII}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

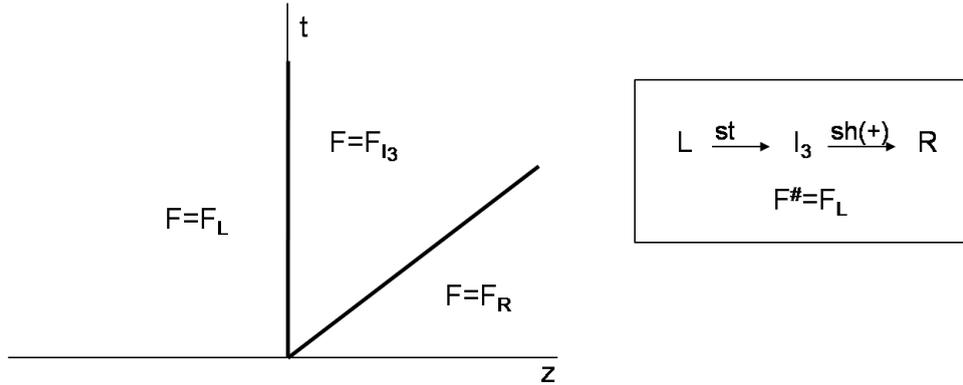


**Figura 5.120:** Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in E$  y  $R \in R_E^I$ . Fuente: Elaboración propia.

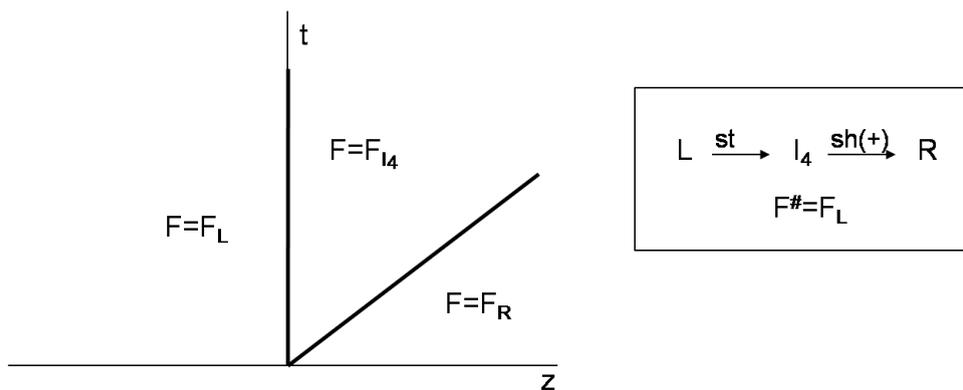


**Figura 5.121:** Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in E$  y  $R \in R_E^{II}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



**Figura 5.122:** Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in E$  y  $R \in R_{D_2}^{III}$ . Fuente: Elaboración propia.



**Figura 5.123:** Características de la ondas de Saturación y valores de flujos en las diferentes regiones del espacio para  $L \in E$  y  $R \in R_E^{IV}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

Las soluciones para todos los casos posibles junto con sus respectivos flujos se resumen en las siguientes tablas:

**TABLA 5.2:** Solución de Riemann para  $L \in A$

$R_1 \in R_A^I$	$L \xrightarrow{sh(-)} I_1 \xrightarrow{st} R_1$	$F(S_R, \pi_R)$
$R_2 \in R_A^{II}$	$L \xrightarrow{sh(-)} I_2 \xrightarrow{sh(+)} R_2$	$F^d(S^d(\pi_R))$
$R_3 \in R_A^{III}$	$L \xrightarrow{sh(-)} T \xrightarrow{ra(-)} I_3 \xrightarrow{sh(+)} R_3$	$F^d(S^d(\pi_R))$
$R_4 \in R_A^{IV}$	$L \xrightarrow{sh(-)} T \xrightarrow{ra(-)} M \xrightarrow{st} I_4 \xrightarrow{sh(+)} R_4$	$F(S_M, \pi_M)$
$R_5 \in R_A^V$	$L \xrightarrow{sh(-)} T \xrightarrow{ra(-)} M \xrightarrow{st} I_5 \xrightarrow{ra(+)} R_5$	$F(S_M, \pi_M)$
$R_6 \in R_A^{VI}$	$L \xrightarrow{sh(-)} T \xrightarrow{ra(-)} M \xrightarrow{st} H \xrightarrow{ra(+)} R_6$	$F(S_M, \pi_M)$
$R_7 \in R_A^{VII}$	$L \xrightarrow{sh(-)} T \xrightarrow{ra(-)} M \xrightarrow{st} H \xrightarrow{ra(+)} I_7 \xrightarrow{sh(+)} R_7$	$F(S_M, \pi_M)$

Fuente: Elaboración propia

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

**TABLA 5.3:** Solución de Riemann para  $L \in B$

$R_1 \in R_B^I$	$L \xrightarrow{sh(-)} I_1 \xrightarrow{st} R_1$	$F(S_R, \pi_R)$
$R_2 \in R_B^{II}$	$L \xrightarrow{sh(-)} I_2 \xrightarrow{st} Q_R \xrightarrow{ra(+)} R_2$	$F(S_Q, \pi_Q)$
$R_3 \in R_B^{III}$	$L \xrightarrow{sh(-)} I_3 \xrightarrow{st} R_3$	$F(S_R, \pi_R)$
$R_4 \in R_B^{IV}$	$L \xrightarrow{sh(-)} I_4 \xrightarrow{sh(+)} R_4$	$F^d(S^d(\pi_R))$
$R_5 \in R_B^V$	$L \xrightarrow{sh(-)} T \xrightarrow{ra(-)} I_5 \xrightarrow{sh(+)} R_5$	$F^d(S^d(\pi_R))$
$R_6 \in R_B^{VI}$	$L \xrightarrow{sh(-)} T \xrightarrow{ra(-)} M \xrightarrow{st} I_6 \xrightarrow{sh(+)} R_6$	$F(S_M, \pi_M)$
$R_7 \in R_B^{VII}$	$L \xrightarrow{sh(-)} T \xrightarrow{ra(-)} M \xrightarrow{st} I_7 \xrightarrow{ra(+)} R_7$	$F(S_M, \pi_M)$
$R_8 \in R_B^{VIII}$	$L \xrightarrow{sh(-)} T \xrightarrow{ra(-)} M \xrightarrow{st} H \xrightarrow{ra(+)} R_8$	$F(S_M, \pi_M)$
$R_9 \in R_A^{VII}$	$L \xrightarrow{sh(-)} T \xrightarrow{ra(-)} M \xrightarrow{st} H \xrightarrow{ra(+)} I_9 \xrightarrow{sh(+)} R_9$	$F(S_M, \pi_M)$

Fuente: Elaboración propia

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

---

**TABLA 5.4:** Solución de Riemann para  $L \in C$

$R_1 \in R_C^I$	$L \xrightarrow{sh(-)} I_1 \xrightarrow{st} R_1$	$F(S_R, \pi_R)$
$R_2 \in R_C^{II}$	$L \xrightarrow{sh(-)} I_2 \xrightarrow{st} Q_R \xrightarrow{ra(+)} R_2$	$F(S_Q, \pi_Q)$
$R_3 \in R_C^{III}$	$L \xrightarrow{sh(-)} I_3 \xrightarrow{ra(+)} R_3$	$F^i(S^i(\pi_R))$
$R_4 \in R_C^{IV}$	$L \xrightarrow{st} I_4 \xrightarrow{sh(+)} R_4$	$F(S_L, \pi_L)$
$R_5 \in R_C^V$	$L \xrightarrow{st} I_5 \xrightarrow{ra(+)} R_5$	$F(S_L, \pi_L)$
$R_6 \in R_C^{VI}$	$L \xrightarrow{st} E \xrightarrow{ra(+)} I_6 \xrightarrow{ra(+)} R_6$	$F(S_L, \pi_L)$
$R_7 \in R_C^{VII}$	$L \xrightarrow{st} E \xrightarrow{ra(+)} I_7 \xrightarrow{ra(+)} R_7$	$F(S_L, \pi_L)$
$R_8 \in R_C^{VIII}$	$L \xrightarrow{st} E \xrightarrow{ra(+)} R_8$	$F(S_L, \pi_L)$
$R_9 \in R_C^{IX}$	$L \xrightarrow{st} E \xrightarrow{ra(+)} I_9 \xrightarrow{sh(+)} R_9$	$F(S_L, \pi_L)$

Fuente: Elaboración propia

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

**TABLA 5.5:** Solución de Riemann para  $L \in D1$

$R_1 \in R_{D1}^I$	$L \xrightarrow{sh(-)} I_1 \xrightarrow{st} R_1$	$F(S_R, \pi_R)$
$R_2 \in R_{D1}^{II}$	$L \xrightarrow{sh(-)} I_2 \xrightarrow{st} Q_R \xrightarrow{ra(+)} R_2$	$F(S_Q, \pi_Q)$
$R_3 \in R_{D1}^{III}$	$L \xrightarrow{st} K_d \xrightarrow{sh(+)} I_3 \xrightarrow{ra(+)} R_3$	$F(S_L, \pi_L)$
$R_4 \in R_{D1}^{IV}$	$L \xrightarrow{st} I_4 \xrightarrow{sh(+)} R_4$	$F(S_L, \pi_L)$
$R_5 \in R_{D1}^V$	$L \xrightarrow{st} I_5 \xrightarrow{sh(+)} R_5$	$F(S_L, \pi_L)$
$R_6 \in R_{D1}^{VI}$	$L \xrightarrow{st} I_6 \xrightarrow{ra(+)} R_6$	$F(S_L, \pi_L)$
$R_7 \in R_{D1}^{VII}$	$L \xrightarrow{st} E_i \xrightarrow{ra(+)} I_7 \xrightarrow{ra(+)} R_7$	$F(S_L, \pi_L)$
$R_8 \in R_{D1}^{VIII}$	$L \xrightarrow{st} E_i \xrightarrow{ra(+)} I_8 \xrightarrow{ra(+)} R_8$	$F(S_L, \pi_L)$
$R_9 \in R_{D1}^{IX}$	$L \xrightarrow{st} E_i \xrightarrow{ra(+)} R_9$	$F(S_L, \pi_L)$
$R_8 \in R_{D1}^X$	$L \xrightarrow{st} E_i \xrightarrow{ra(+)} I_{10} \xrightarrow{sh(+)} R_8$	$F(S_L, \pi_L)$

Fuente: Elaboración propia

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

**TABLA 5.6:** Solución de Riemann para  $L \in D2$

$R_1 \in R_{D2}^I$	$L \xrightarrow{sh(-)} I_1 \xrightarrow{st} R_1$	$F(S_R, \pi_R)$
$R_2 \in R_{D2}^{II}$	$L \xrightarrow{sh(-)} I_2 \xrightarrow{st} Q_R \xrightarrow{ra(+)} R_2$	$F(S_Q, \pi_Q)$
$R_3 \in R_{D2}^{III}$	$L \xrightarrow{sh(-)} I_3 \xrightarrow{ra(+)} R_3$	$F(S_L, \pi_L)$
$R_4 \in R_{D2}^{IV}$	$L \xrightarrow{st} I_4 \xrightarrow{ra(+)} R_4$	$F(S_L, \pi_L)$
$R_5 \in R_{D2}^V$	$L \xrightarrow{st} K_d \xrightarrow{sh(+)} T \xrightarrow{ra(+)} R_5$	$F(S_L, \pi_L)$
$R_6 \in R_{D2}^{VI}$	$L \xrightarrow{st} K_d \xrightarrow{sh(+)} R_6$	$F(S_L, \pi_L)$
$R_7 \in R_{D2}^{VII}$	$L \xrightarrow{st} I_7 \xrightarrow{sh(+)} R_7$	$F(S_L, \pi_L)$
$R_8 \in R_{D2}^{VIII}$	$L \xrightarrow{st} I_8 \xrightarrow{sh(+)} R_8$	$F(S_L, \pi_L)$
$R_9 \in R_{D2}^{IX}$	$L \xrightarrow{st} E_i \xrightarrow{ra(+)} I_9 \xrightarrow{ra(+)} R_9$	$F(S_L, \pi_L)$
$R_{10} \in R_{D2}^X$	$L \xrightarrow{st} E_i \xrightarrow{ra(+)} I_{10} \xrightarrow{ra(+)} R_{10}$	$F(S_L, \pi_L)$
$R_{11} \in R_{D2}^{XI}$	$L \xrightarrow{st} E_i \xrightarrow{ra(+)} R_{11}$	$F(S_L, \pi_L)$
$R_{12} \in R_{D2}^{XII}$	$L \xrightarrow{st} E_i \xrightarrow{ra(+)} I_{12} \xrightarrow{sh(+)} R_{12}$	$F(S_L, \pi_L)$

Fuente: Elaboración propia

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

---

**TABLA 5.7:** Solución de Riemann para  $L \in E$

$R_1 \in R_E^I$	$L \xrightarrow{st} K_d \xrightarrow{sh(+)} R_1$	$F(S_L, \pi_L)$
$R_2 \in R_E^{II}$	$L \xrightarrow{st} K_d \xrightarrow{sh(+)} R_2$	$F(S_L, \pi_L)$
$R_3 \in R_{D2}^{III}$	$L \xrightarrow{st} I_3 \xrightarrow{sh(+)} R_3$	$F(S_L, \pi_L)$
$R_4 \in R_{D2}^{IV}$	$L \xrightarrow{st} K_d \xrightarrow{sh(+)} R_4$	$F(S_L, \pi_L)$

Fuente: Elaboración propia

Para los casos en que no haya interacción con las curvas de drenaje e imbibición y se tengan máximos en las curva de scanning, las soluciones se determinan de acuerdo a las  $L$ -Regiones y  $R$ -Regiones presentadas en las Figuras 5.10(a) y 5.10(b). Las soluciones para estos casos se resumen en la Tabla 5.2.

### **5.2.2. Extensión del esquema numérico para el caso 2D**

En el caso bidimensional, en contraste con el caso unidimensional, las velocidades en general no son necesariamente paralelas, y las celdas tienen más de dos fronteras. Para la resolución de las ecuaciones se utilizan dos clases de mallas, una denominada malla primaria y la otra malla dual (Figura 5.124). La malla primaria se utiliza para calcular las velocidades de las fases en todos los puntos del dominio espacial discreto, y la malla dual para calcular las saturaciones en los centroides de los elementos de esta última malla. En la malla dual utilizada, los elementos (celdas) tienen forma de hexágono, de manera que se tienen seis fronteras por celda. Esto requiere el cálculo de seis flujos, uno para cada frontera, por tanto el problema 2D implica un mayor tiempo de cómputo.

Una vez que se tienen las velocidades de las fases en todos los nodos de la malla primaria, se calculan las velocidades de fases en las intersecciones de las aristas de los elementos primarios con las de los elementos duales; dichas velocidades serán utilizadas como dato en la ecuación de transporte para determinar las saturaciones. El flujo en cada frontera de celda no será necesariamente perpendicular a la frontera (Figura 5.125), no obstante, solamente los flujos normales a la frontera contribuyen a la variación de la saturación, por ello, para determinar estos flujos normales, se hallan los versores normales salientes a cada frontera, se determinan las componentes normales de la velocidades de fases para cada frontera al proyectar la velocidad de fase sobre el versor normal correspondiente a dicha frontera y luego se utilizan estas componentes normales para determinar el flujo normal en la frontera. Así, la fórmula de la etapa de predicción queda

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

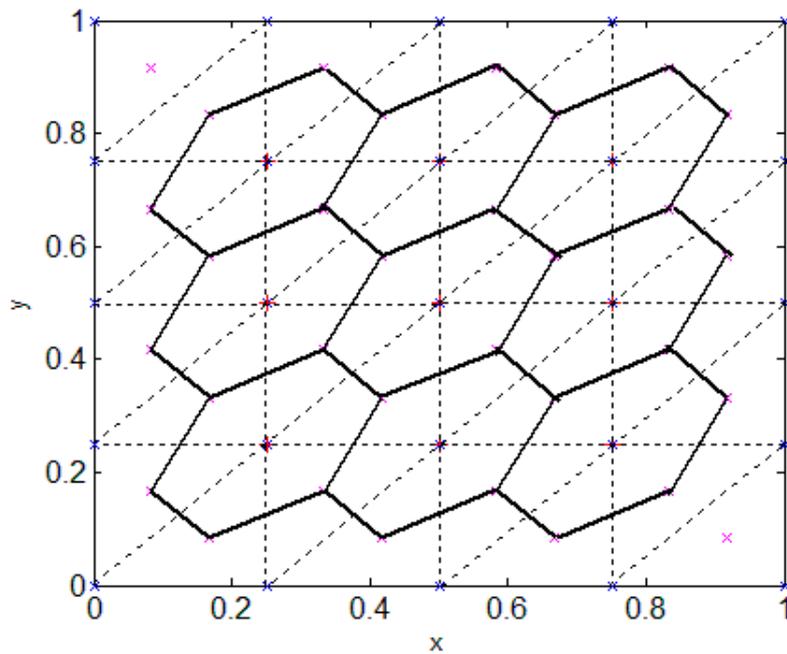
---

extendida al caso 2D de la siguiente manera:

$$S_j^{n+1} = S_j^n - \frac{\tau}{h} \sum_{i=1}^6 F_{j^{i_N}}^{\#} \quad (5.13)$$

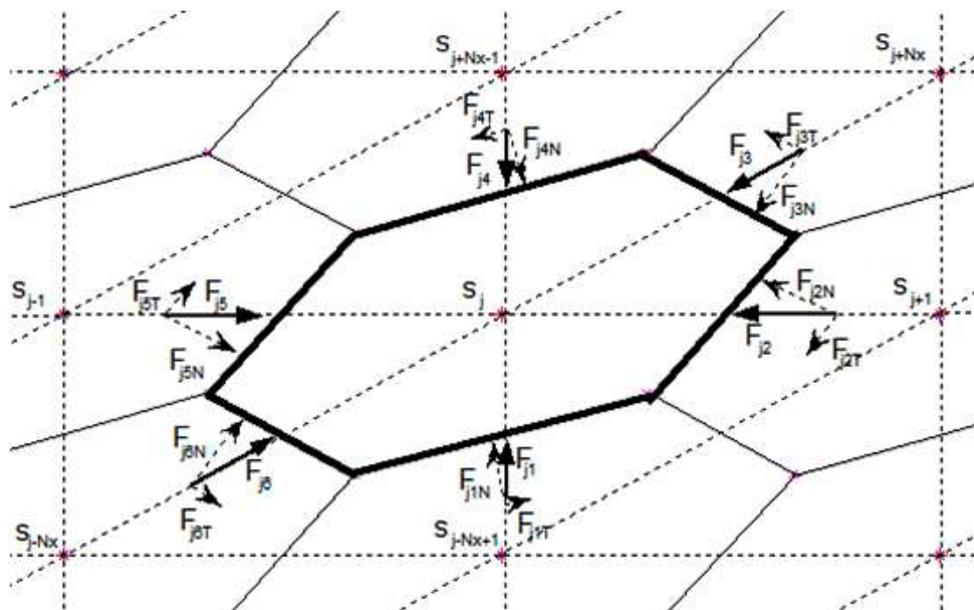
donde es el flujo normal en la  $i$ -ésima frontera de la  $j$ -ésima celda.

La etapa de corrección para el caso bidimensional permanece igual a la del caso unidimensional.



**Figura 5.124:** Mallas Primaria (líneas discontinuas) y Dual (líneas llenas). Fuente: Elaboración propia

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



**Figura 5.125:** Celda para casos bidimensionales. Fuente: Elaboración propia

## CAPITULO 6

### IMPLEMENTACION DEL SIMULADOR

#### 6.0.3. Función FlujoFronteraf

El módulo principal y el más complejo dentro del algoritmo del simulador es el módulo FlujoFronteraf, el cual se encarga de determinar en qué  $L$ -Región y en qué  $R$ -Región caen los estados  $L$  y  $R$  de una frontera, y en base a estas regiones determina el flujo en esa frontera. El algoritmo de la función FlujoFronteraf contiene las condiciones que tiene que reunir un estado para pertenecer a una u otra región. Esta función recibe como datos de entrada los estados izquierdo  $L(S_L, \pi_L)$  y derecho  $R(S_R, \pi_R)$  de la frontera, las velocidades de las fases ( $u_w$  y  $u_g$ ) y la aceleración gravitacional ( $g$ ), y devuelve el valor del flujo en la frontera (Figura 4.7).



**Figura 6.1:** Bloque de la función FlujoFronteraf. Fuente: Elaboración propia

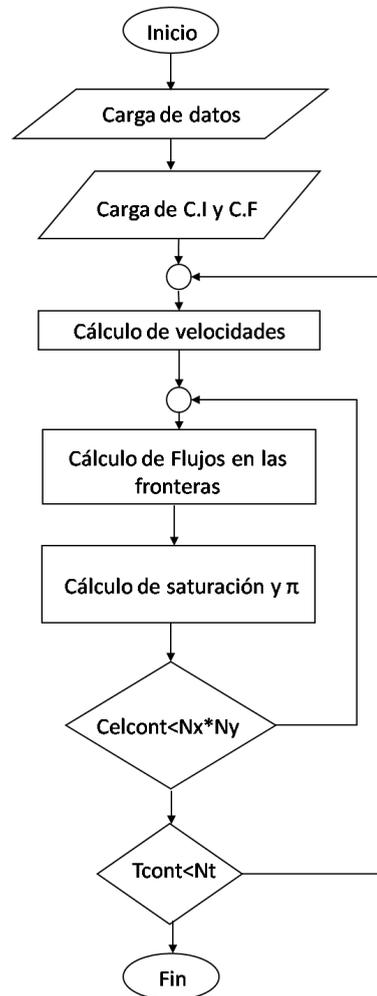
#### **6.0.4. Algoritmo del Simulador**

El algoritmo del simulador se puede apreciar en la Figura 6.2. En el bloque Carga de datos se cargan los datos físicos (permeabilidad absoluta, aceleración gravitacional, porosidad, ángulo de inclinación, etc.) y los datos de malla (tamaño de los intervalos de observación espaciales  $(x_0, x_f)$  y  $(y_0, y_f)$  y del intervalo de observación temporal  $(t_0, t_f)$ , número de sub-intervalos del espacio de observación  $(N_x, N_y)$ , etc.). En el bloque Carga de C.I y C.F se cargan las condiciones iniciales y las de contorno de la saturación y de  $\pi$ . En el bloque Cálculo de velocidades se calculan las velocidades en el espacio discreto; las velocidades se determinan resolviendo la ecuación de Laplace  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  mediante elementos finitos. El bloque Cálculo de Flujos en las fronteras calcula los flujos en todas las fronteras de celda utilizando la función FlujoFronteraF. El bloque Cálculo de saturación y  $\pi$  implementa las etapas de predicción y corrección del esquema numérico. El bloque de decisión  $Celcont < N_x * N_y$  representa la condición de que se lleven a cabo los procesos de Cálculo de flujos en las fronteras y Cálculo de saturación y  $\pi$  para todas las celdas, incrementándose el contador hasta cumplirse la condición. El bloque de decisión  $Tcont < Nt$  representa la condición de realizar los cálculos anteriores para los distintos instantes que comprenden el tiempo de observación.

La programación e implementación del simulador se llevó a cabo utilizando la herramienta MATLAB. Así también, se utilizó la herramienta auxiliar MAPLE en el cálculo de los puntos importantes que definen las  $L$ -Regiones y  $R$ -regiones para realizar operaciones algebraicas y obtener expresiones analíticas que determinan los valores de saturación y de  $\pi$  de dichos puntos.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

---



**Figura 6.2:** Algoritmo de simulación. Fuente: Elaboración propia

## **CAPITULO 7**

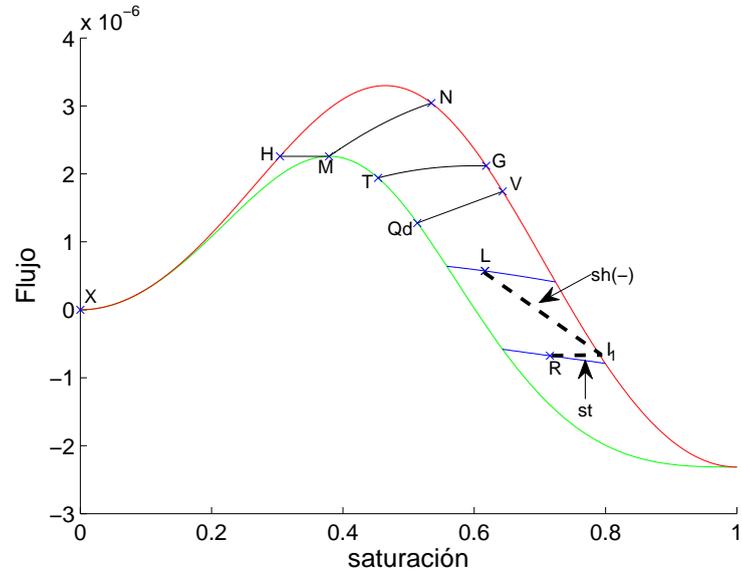
### **RESULTADOS EXPERIMENTALES**

Las simulaciones en 1D y 2D se llevaron a cabo utilizando los siguientes datos físicos: permeabilidad absoluta  $\kappa = 11,84 \times 10^{-8} \text{cm}^2$  (11.84 Darcys), porosidad  $\phi = 0,389$ , viscosidad de la fase mojanante  $\mu_w = 1 \text{cp}$ , viscosidad de la fase no mojanante  $\mu_g = 0,9 \text{cp}$ , densidad de la fase mojanante  $\rho_w = 1 \text{g/cm}^3$ , densidad de la fase no mojanante  $\rho_g = 0,844 \text{g/cm}^3$ . En cuanto a los datos de malla, se utilizaron diferentes tamaños de mallas para capturar las ondas más lentas.

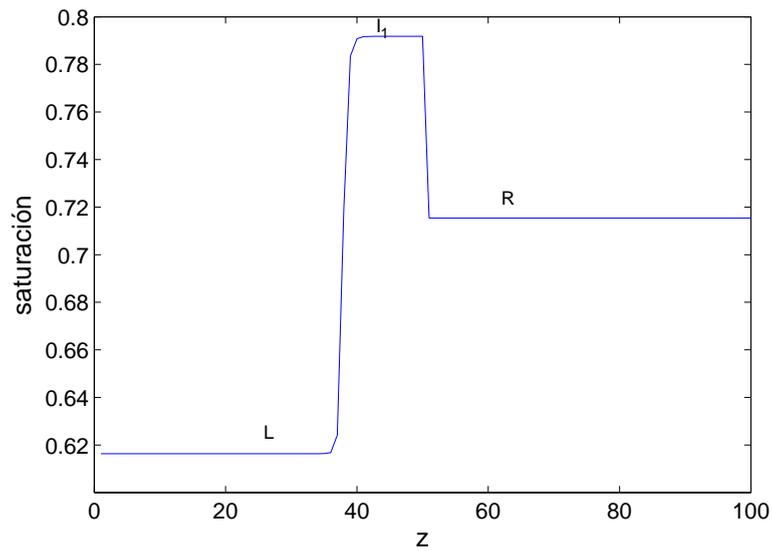
#### **7.1. Resultados para 1D**

Con el propósito de validar los resultados obtenidos con el simulador, se utilizaron como condiciones iniciales y de frontera solamente dos estados (dos valores de saturación separados por una discontinuidad, lo mismo para  $\pi$ ), ya que para estos casos se conocen las soluciones analíticas del modelo, permitiendo comparar los resultados numéricos con los teóricos.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



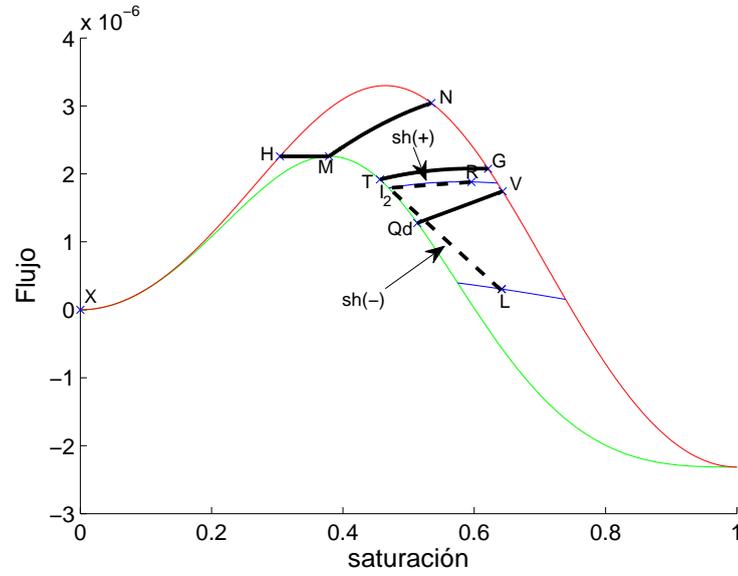
(a) Solución del problema de Riemann



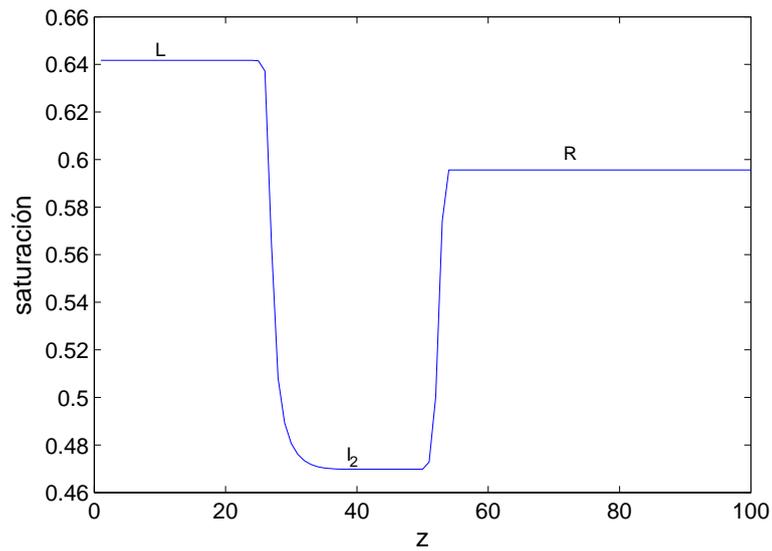
(b) Resultado de la simulación

**Figura 7.1:** Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in A$  y  $R \in R_A^I$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



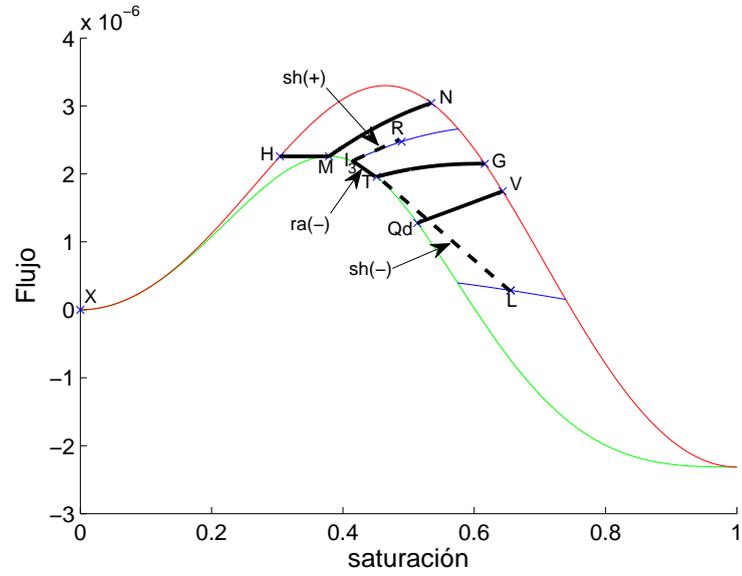
(a) Solución del problema de Riemann



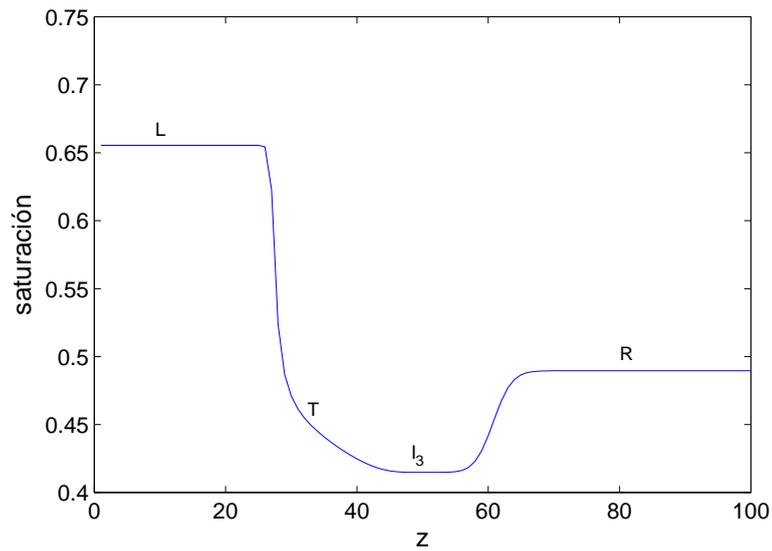
(b) Resultado de la simulación

**Figura 7.2:** Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in A$  y  $R \in R_A^{II}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



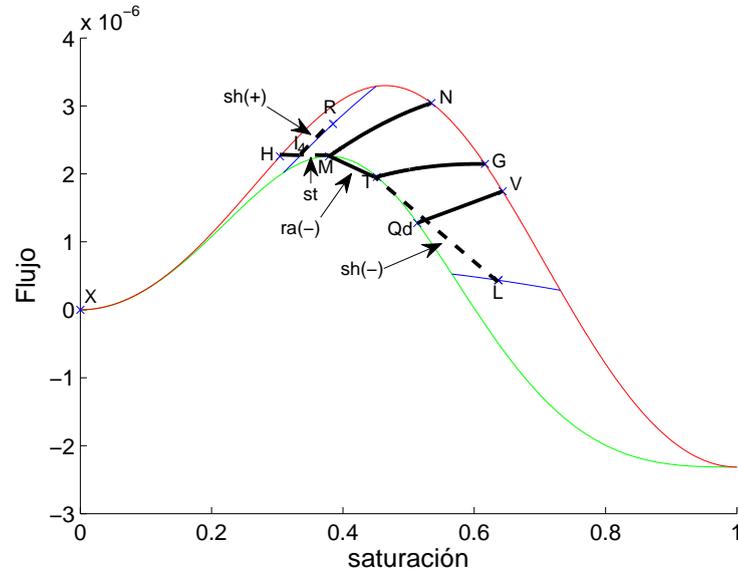
(a) Solución del problema de Riemann



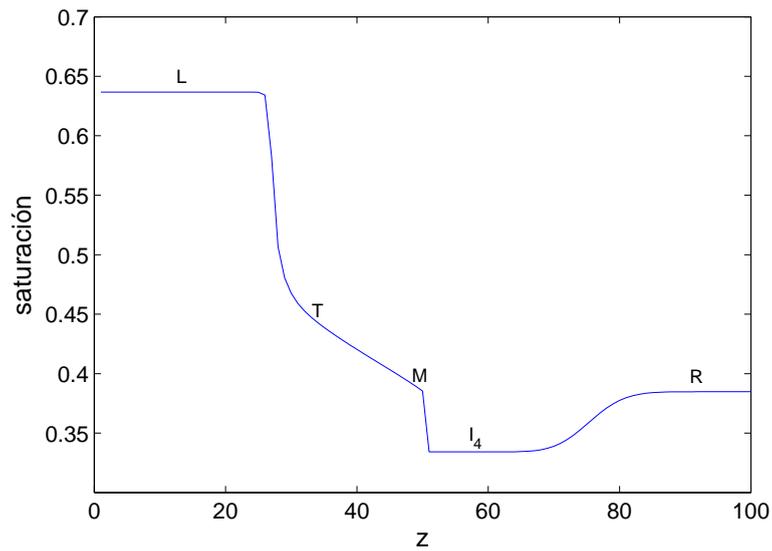
(b) Resultado de la simulación

**Figura 7.3:** Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in A$  y  $R \in R_A^{III}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



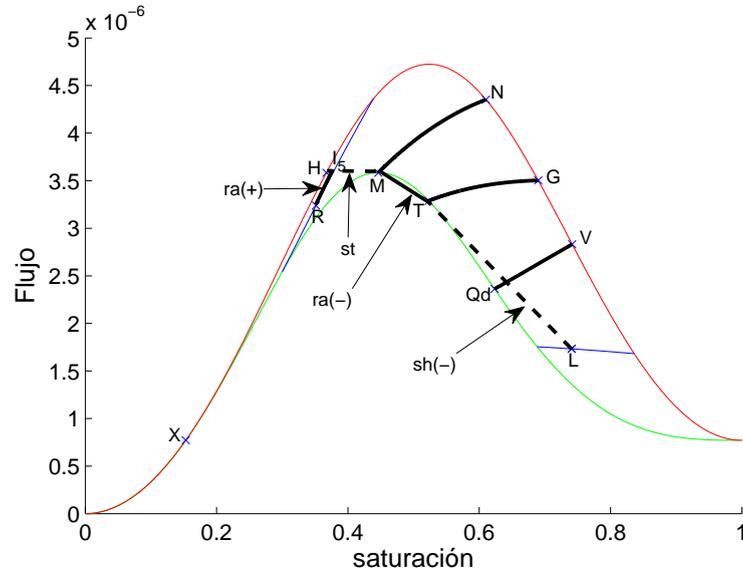
(a) Solución del problema de Riemann



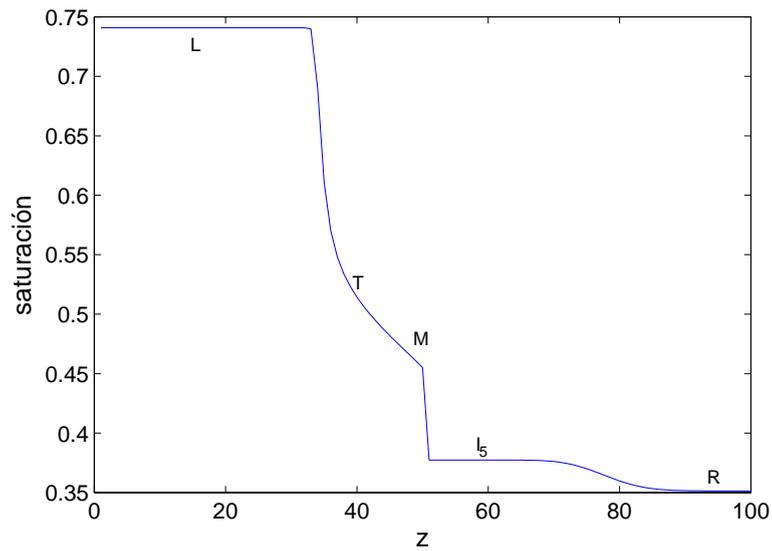
(b) Resultado de la simulación

**Figura 7.4:** Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in A$  y  $R \in R_A^{IV}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



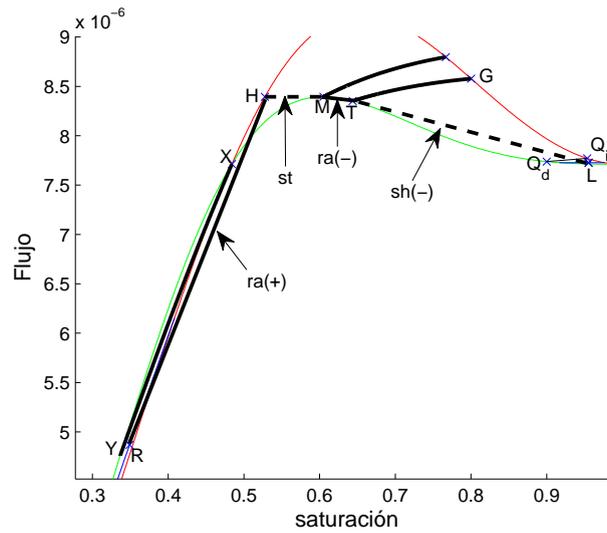
(a) Solución del problema de Riemann



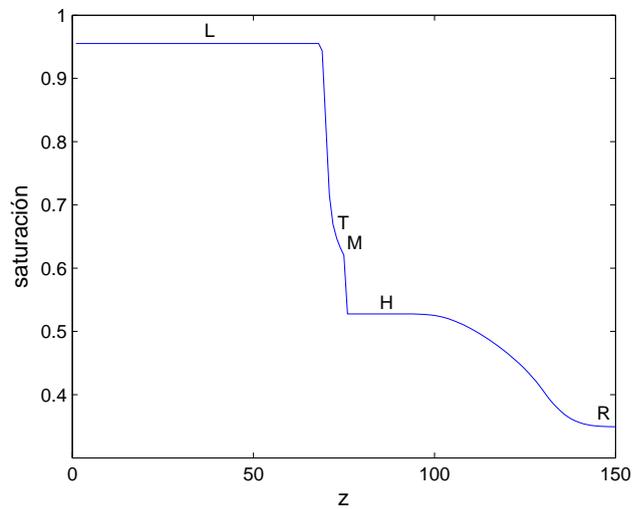
(b) Resultado de la simulación

**Figura 7.5:** Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in A$  y  $R \in R_A^V$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



(a) Solución del problema de Riemann

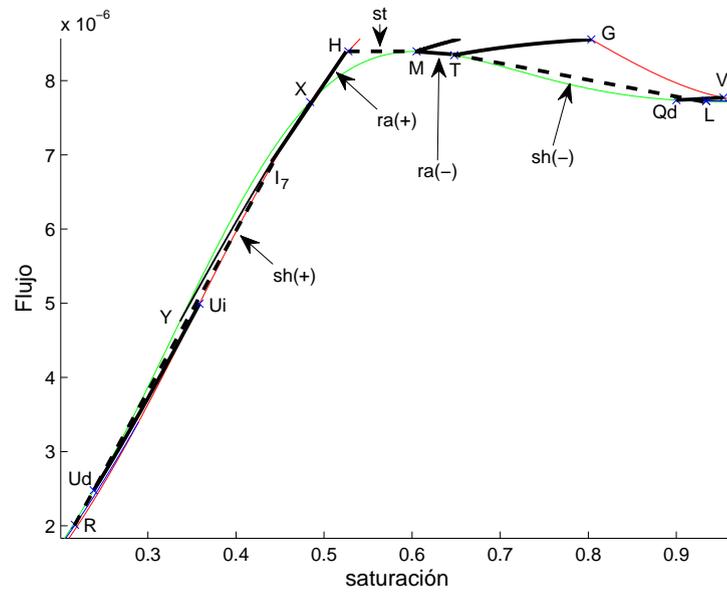


(b) Resultado de la simulación

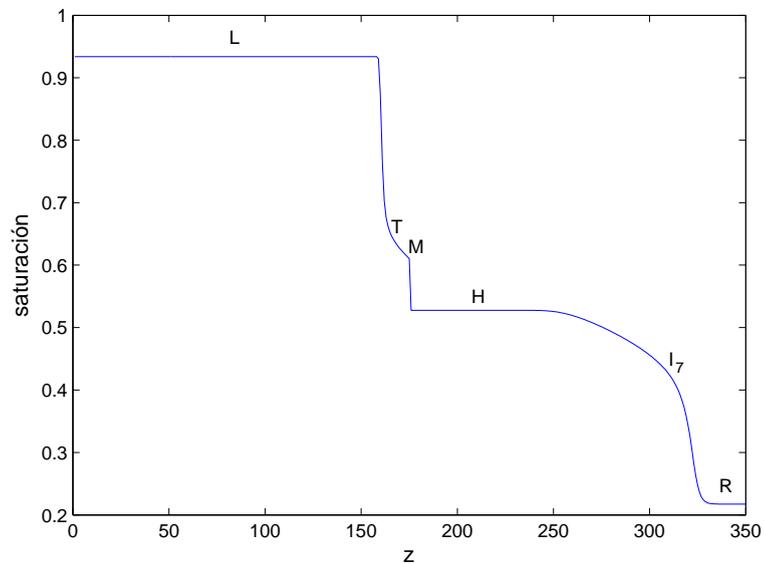
**Figura 7.6:** Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in A$  y

$R \in R_A^{VI}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



(a) Solución del problema de Riemann



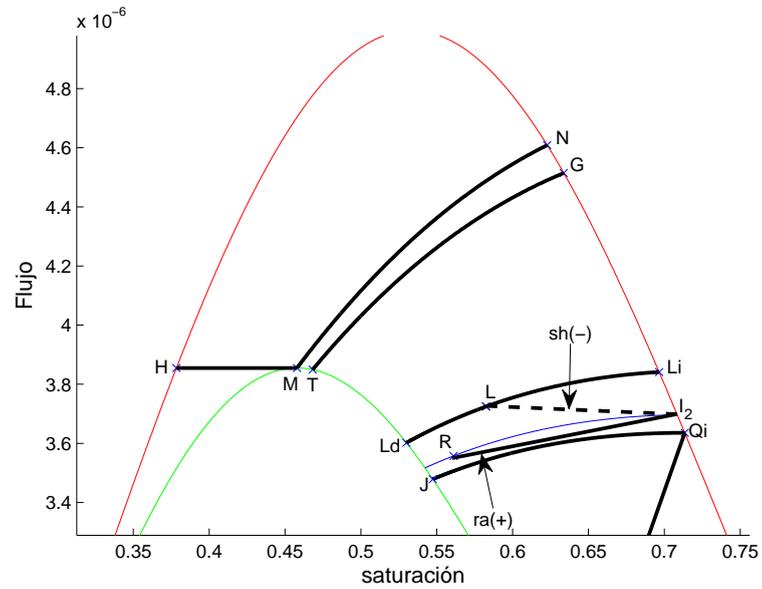
(b) Resultado de la simulación

**Figura 7.7:** Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in A$  y

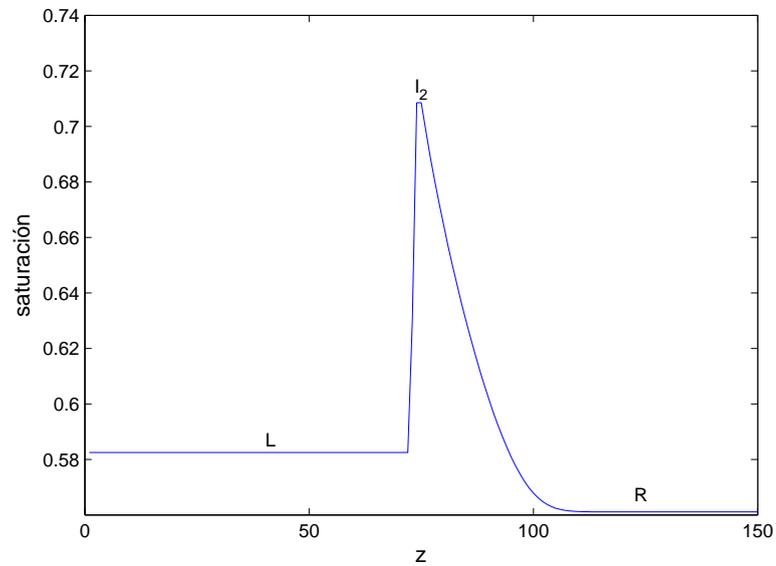
$R \in R_A^{VII}$ . Fuente: Elaboración propia.



**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



(a) Solución del problema de Riemann

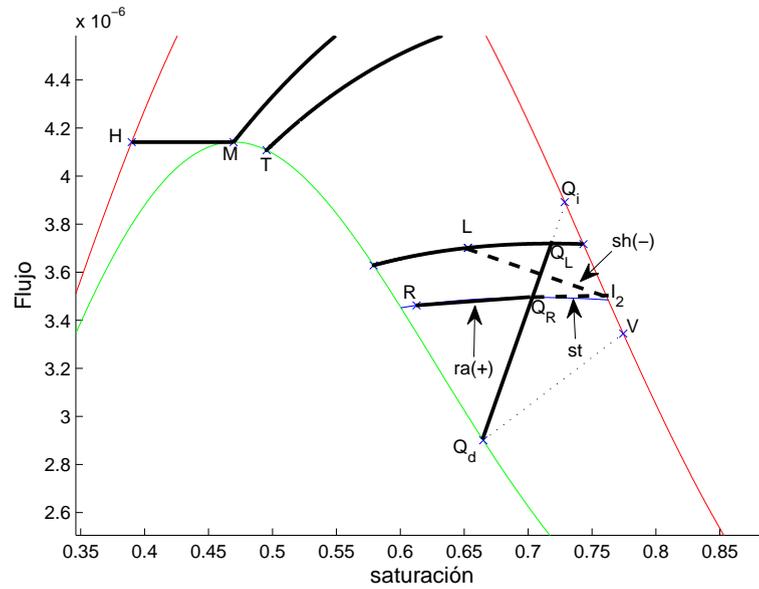


(b) Resultado de la simulación

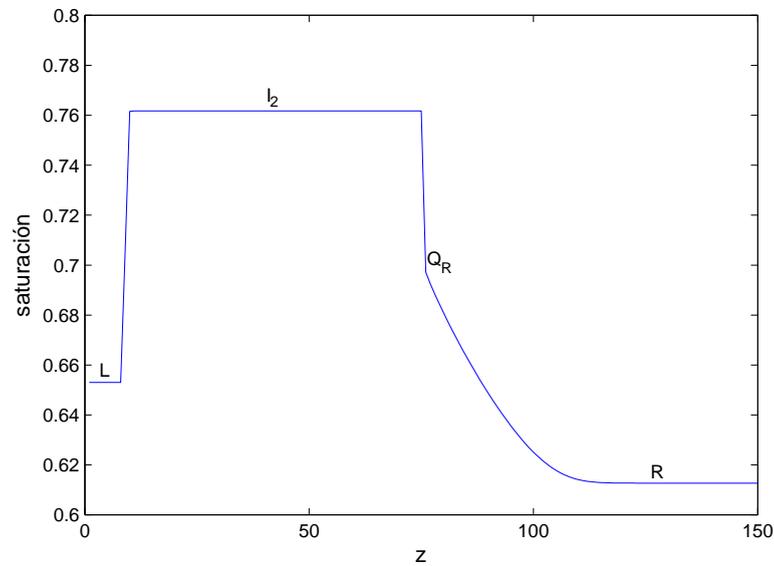
**Figura 7.9:** Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in B$  y

$R \in R_B^{II(a)}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



(a) Solución del problema de Riemann

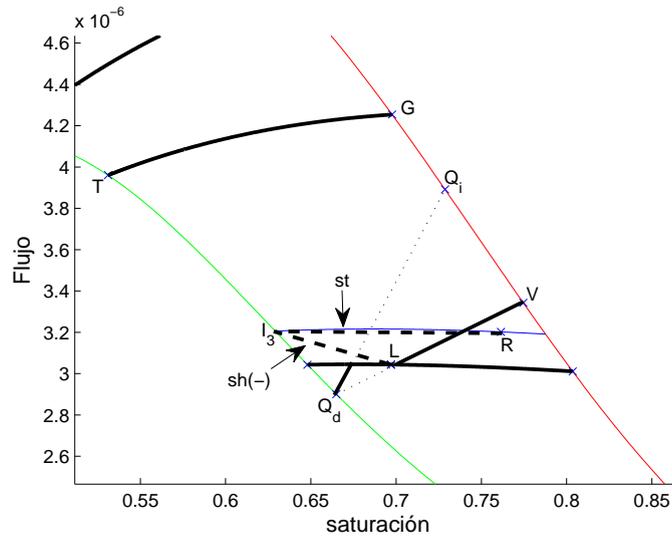


(b) Resultado de la simulación

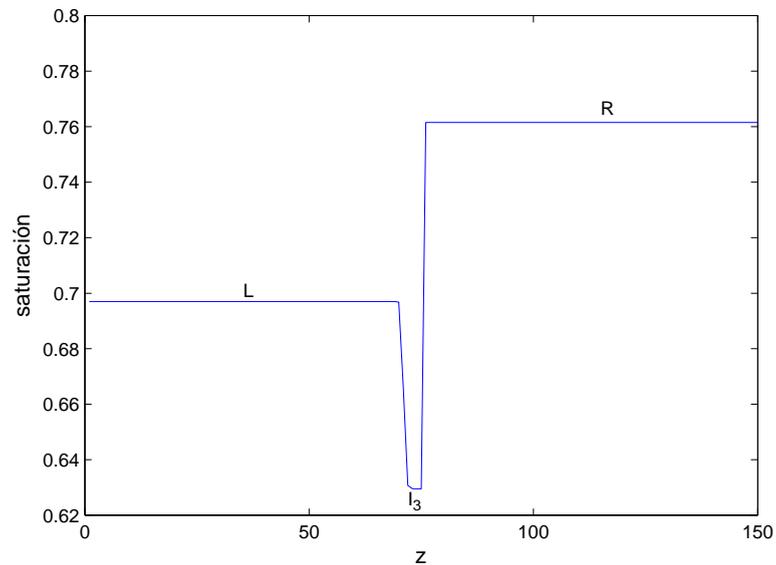
**Figura 7.10:** Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in B$  y

$R \in R_B^{II(b)}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



(a) Solución del problema de Riemann

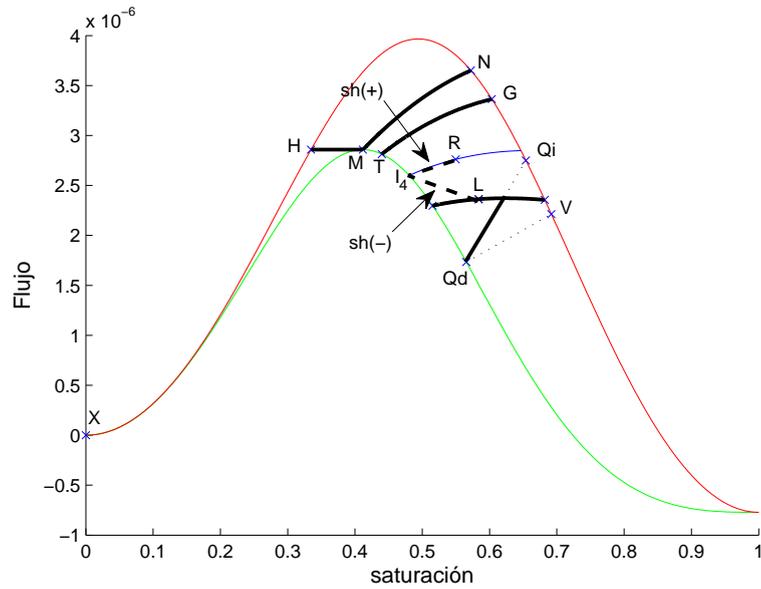


(b) Resultado de la simulación

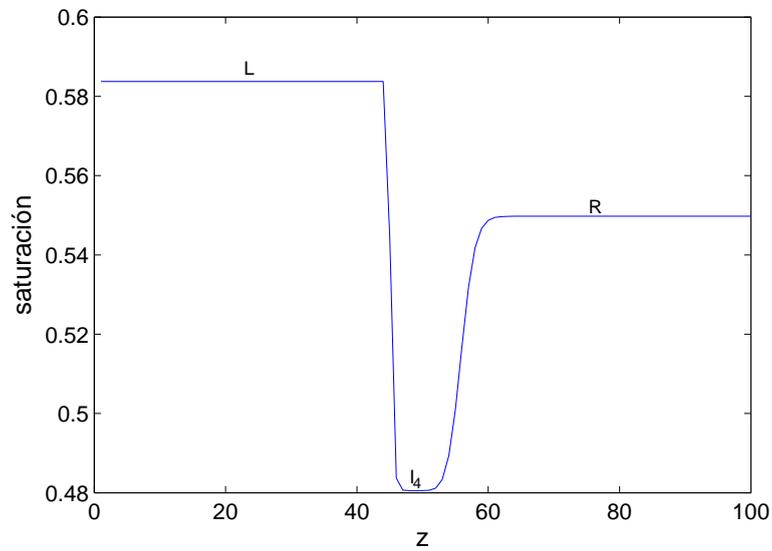
**Figura 7.11:** Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in B$  y

$R \in R_B^{III}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



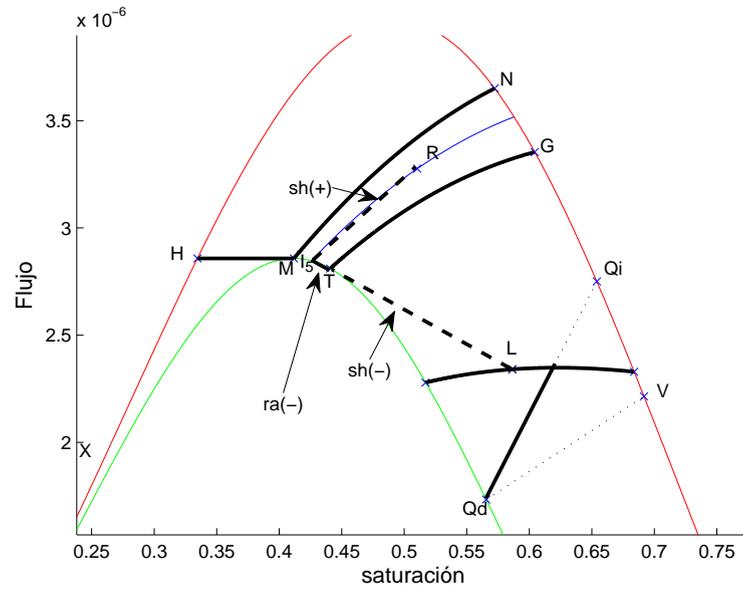
(a) Solución del problema de Riemann



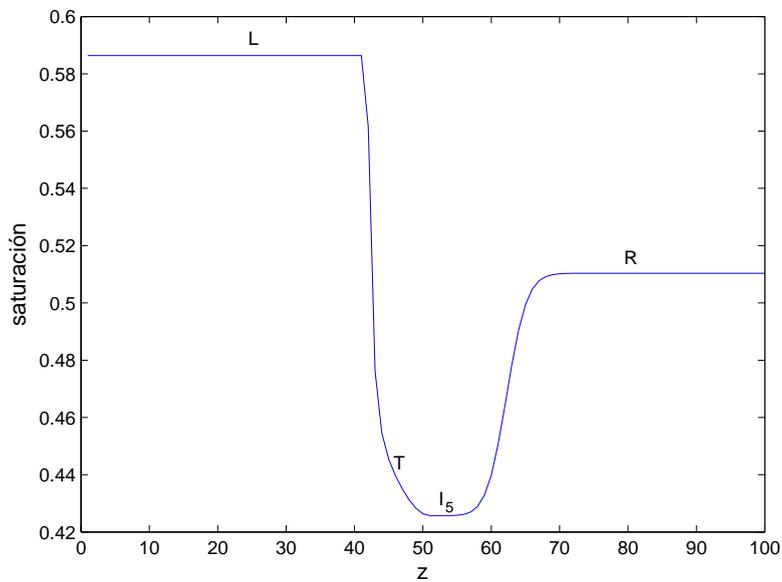
(b) Resultado de la simulación

**Figura 7.12:** Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in B$  y  $R \in R_B^{IV}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



(a) Solución del problema de Riemann

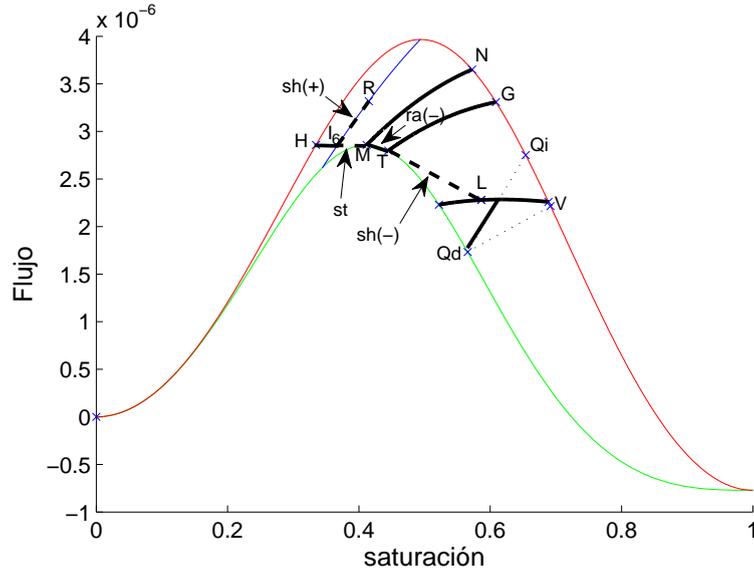


(b) Resultado de la simulación

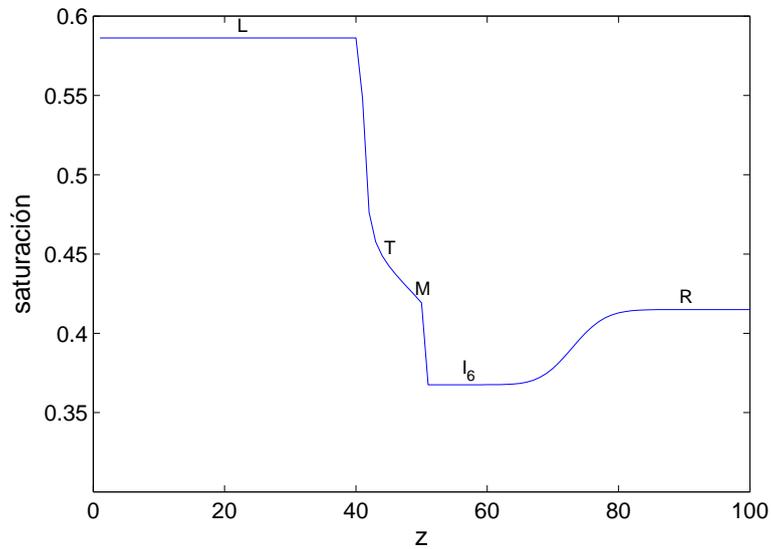
**Figura 7.13:** Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in B$  y

$R \in R_B^V$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



(a) Solución del problema de Riemann

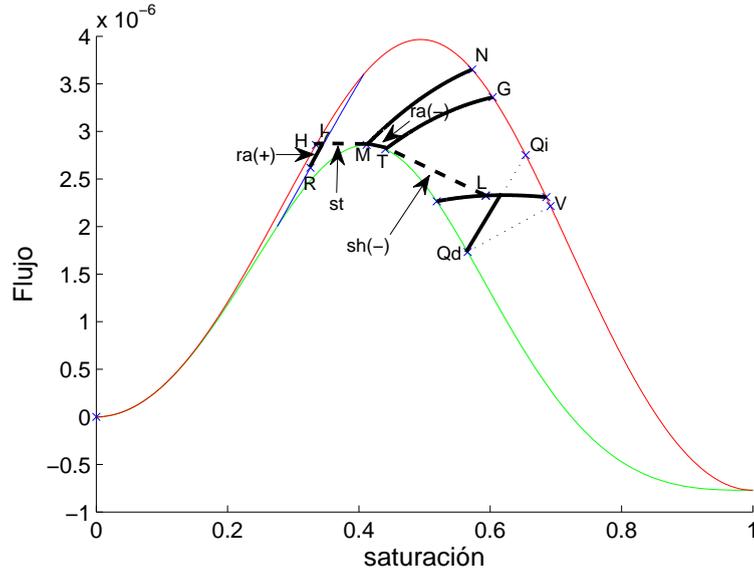


(b) Resultado de la simulación

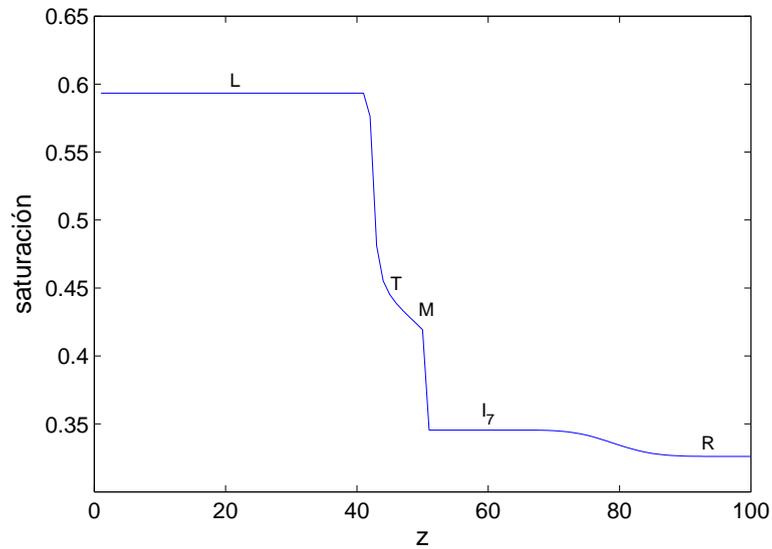
**Figura 7.14:** Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in B$  y

$R \in R_B^{VI}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



(a) Solución del problema de Riemann

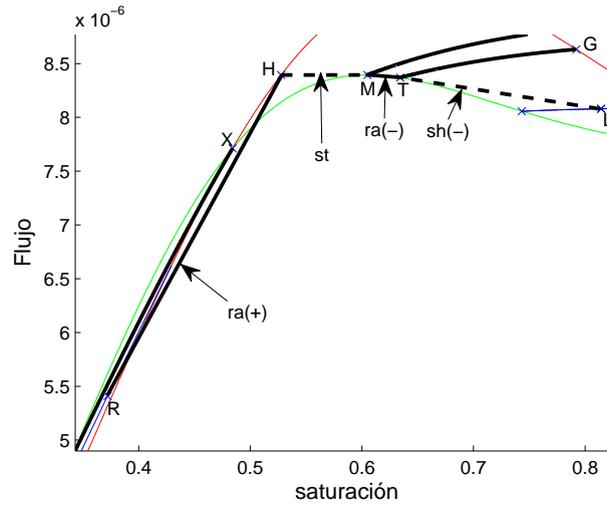


(b) Resultado de la simulación

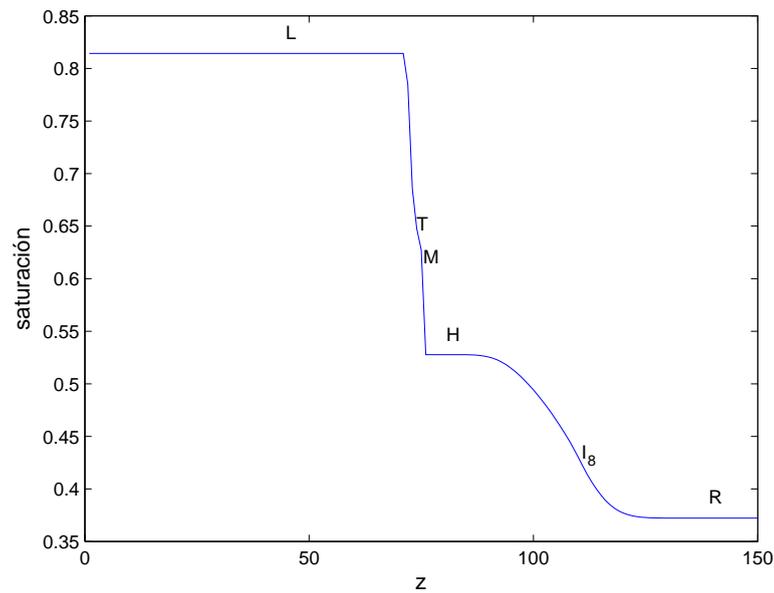
**Figura 7.15:** Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in B$  y

$R \in R_B^{VII}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



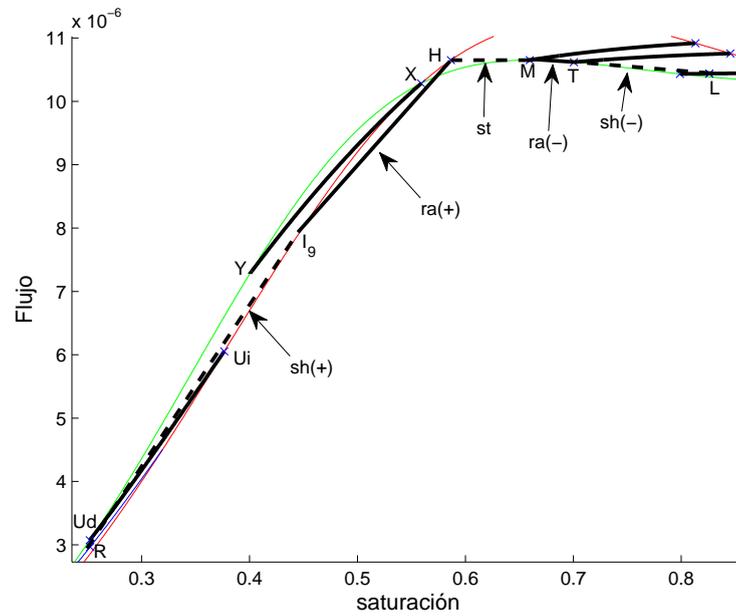
(a) Solución del problema de Riemann



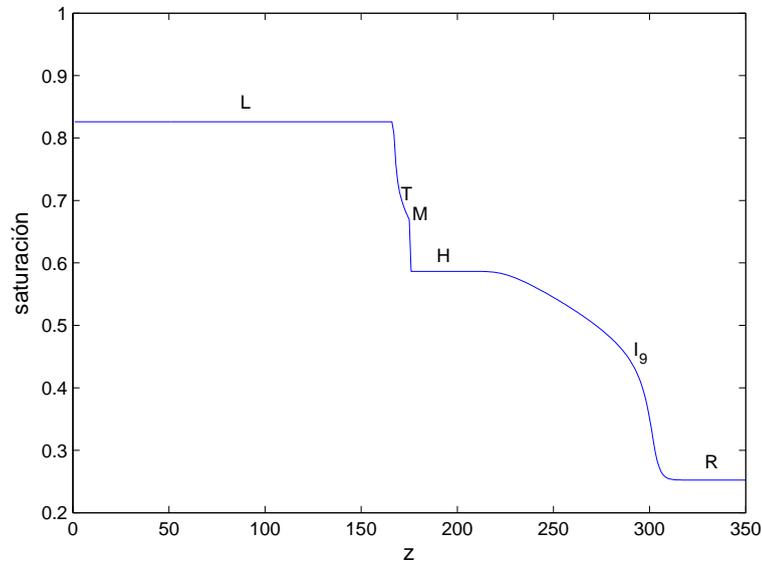
(b) Resultado de la simulación

**Figura 7.16:** Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in B$  y  $R \in R_B^{VIII}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



(a) Solución del problema de Riemann

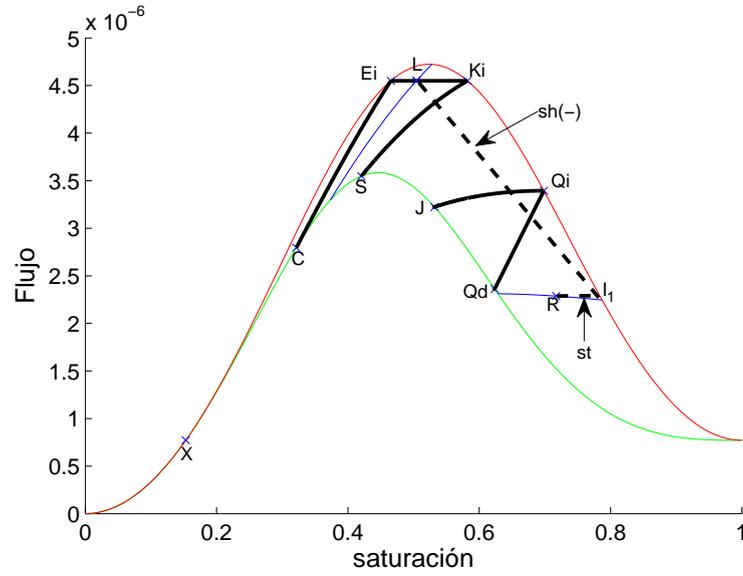


(b) Resultado de la simulación

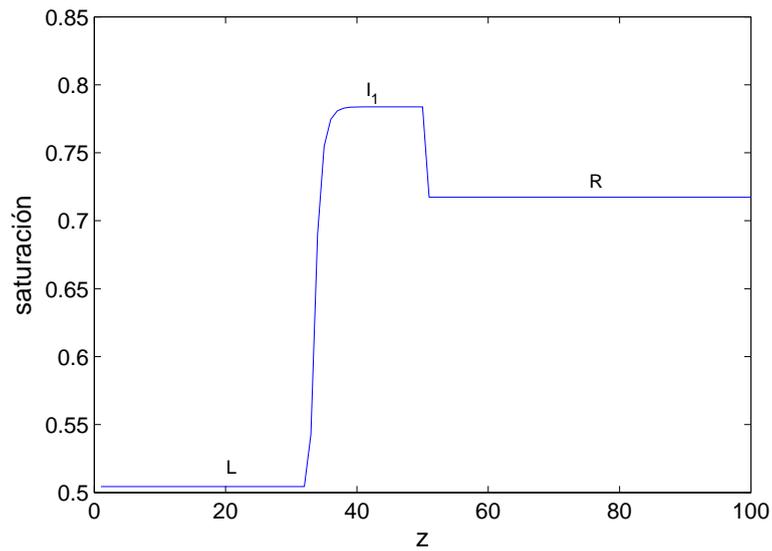
**Figura 7.17:** Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in B$  y

$R \in R_B^{IX}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



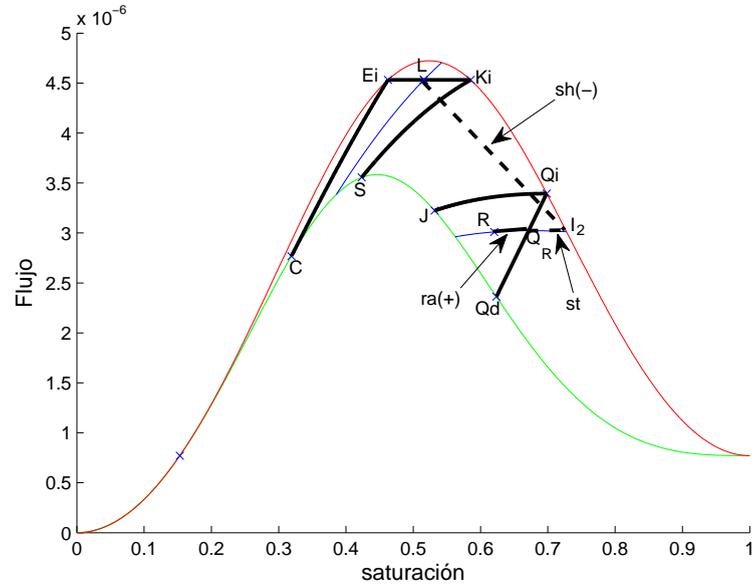
(a) Solución del problema de Riemann



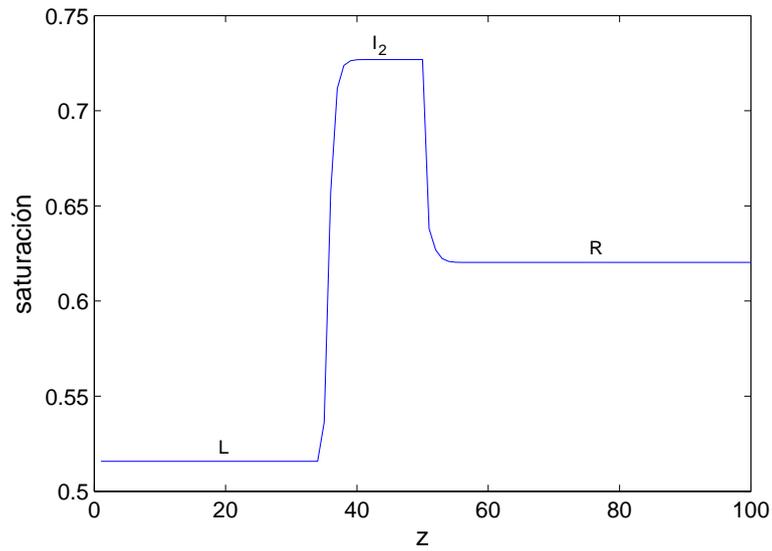
(b) Resultado de la simulación

**Figura 7.18:** Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in C$  y  $R \in R_C^I$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



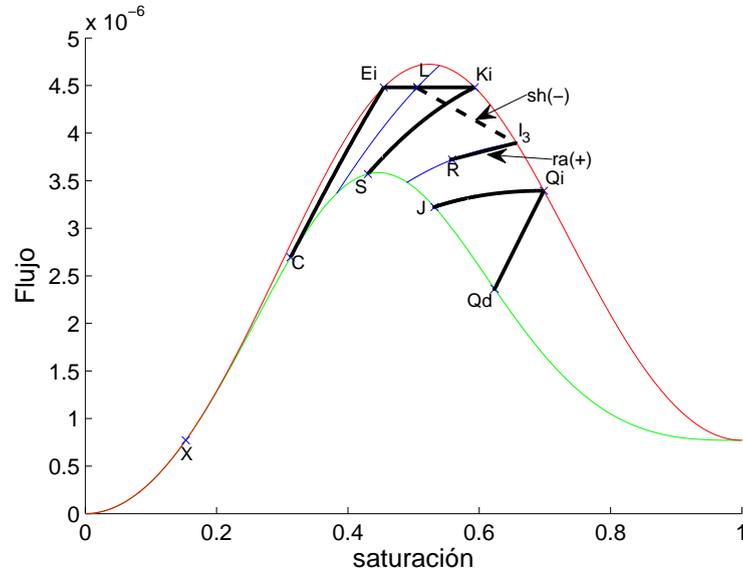
(a) Solución del problema de Riemann



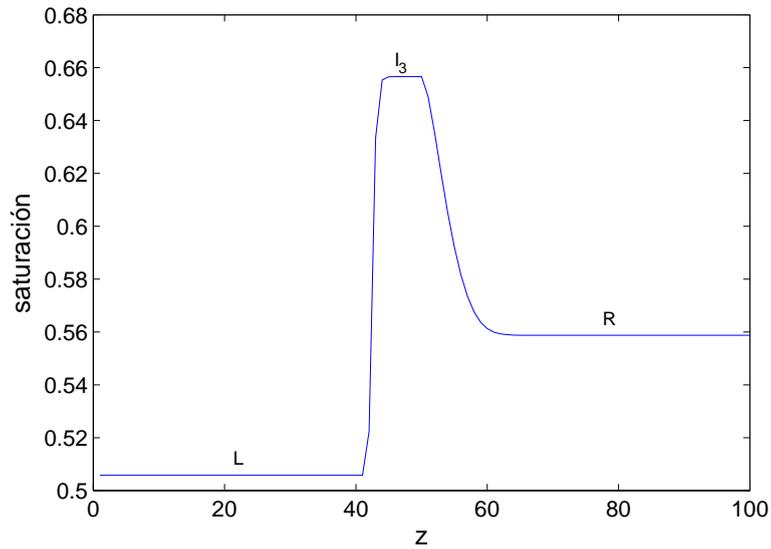
(b) Resultado de la simulación

**Figura 7.19:** Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in C$  y  $R \in R_C^{II}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



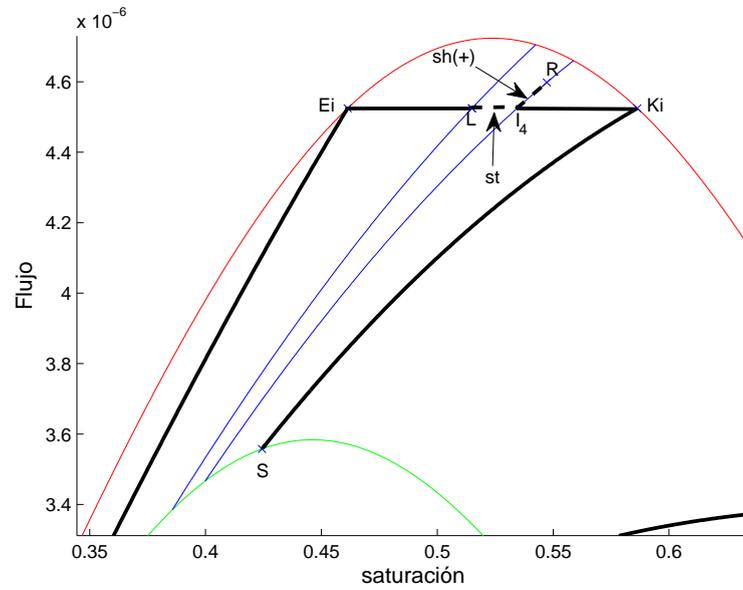
(a) Solución del problema de Riemann



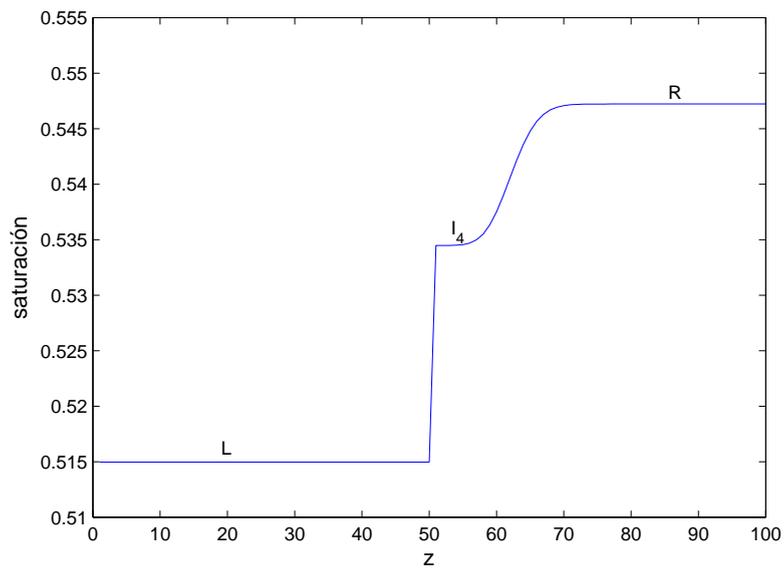
(b) Resultado de la simulación

**Figura 7.20:** Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in C$  y  $R \in R_C^{III}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



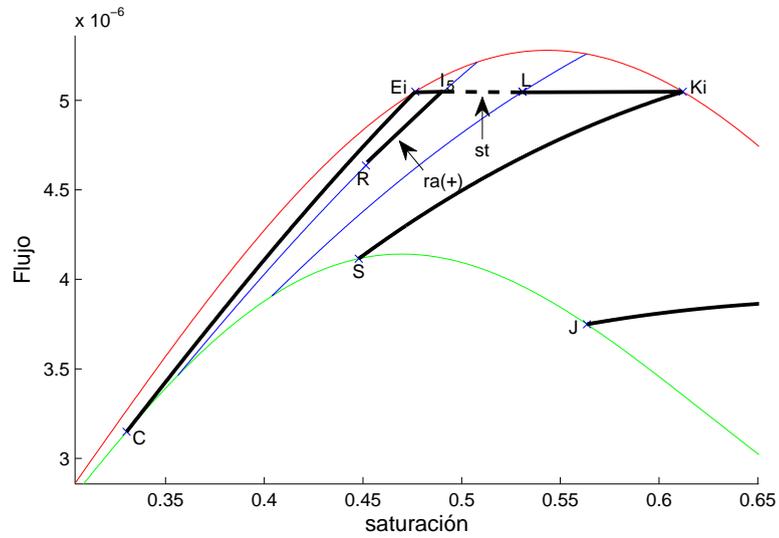
(a) Solución del problema de Riemann



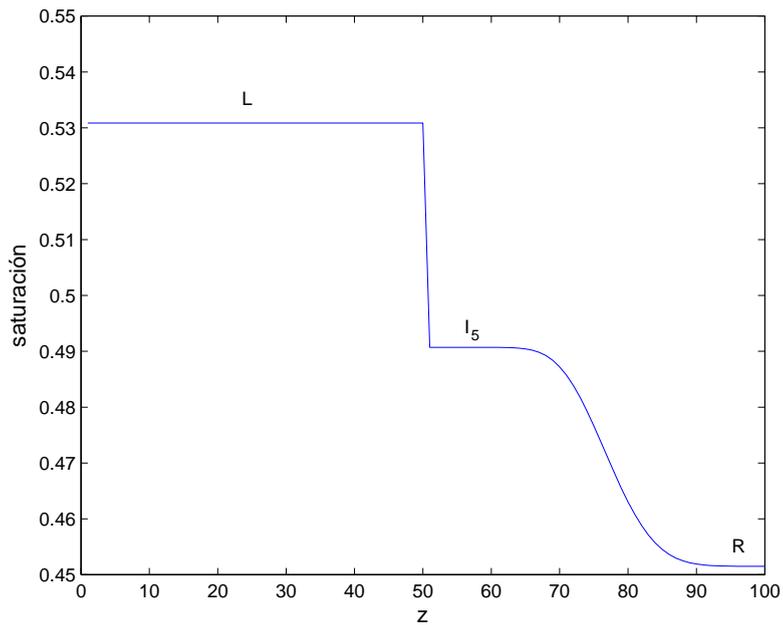
(b) Resultado de la simulación

**Figura 7.21:** Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in C$  y  $R \in R_C^{IV}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



(a) Solución del problema de Riemann

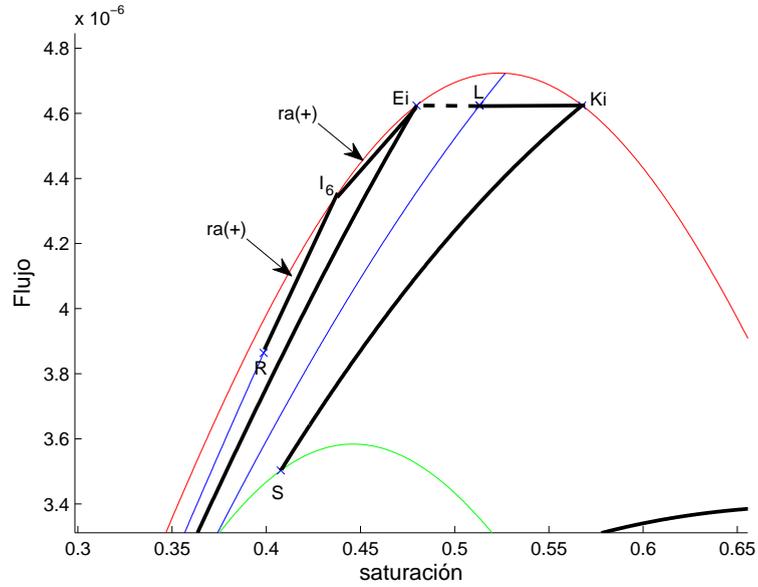


(b) Resultado de la simulación

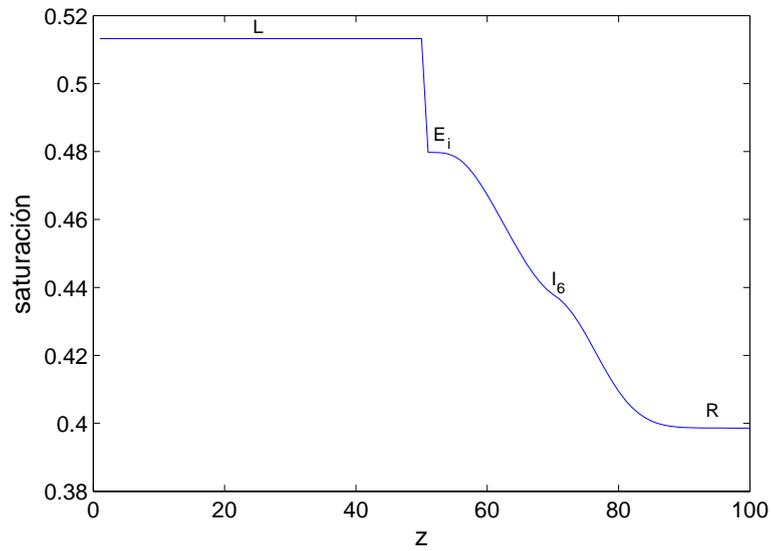
**Figura 7.22:** Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in C$  y

$R \in R_C^V$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



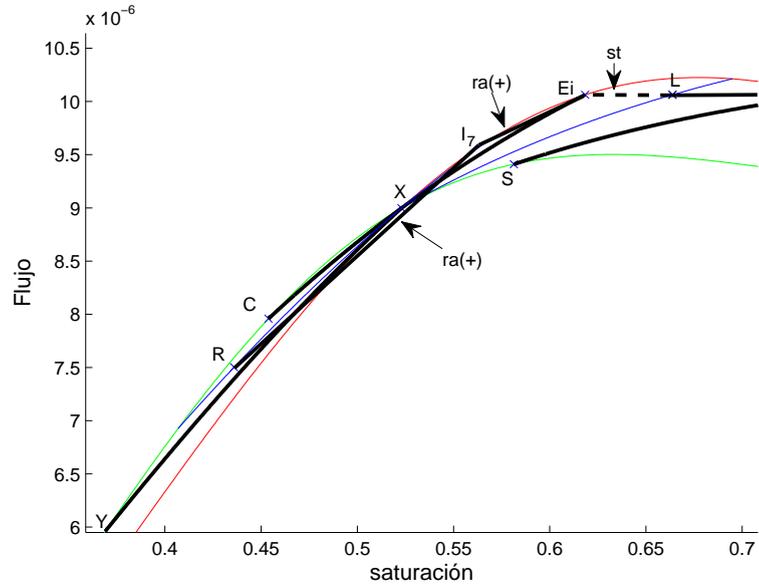
(a) Solución del problema de Riemann



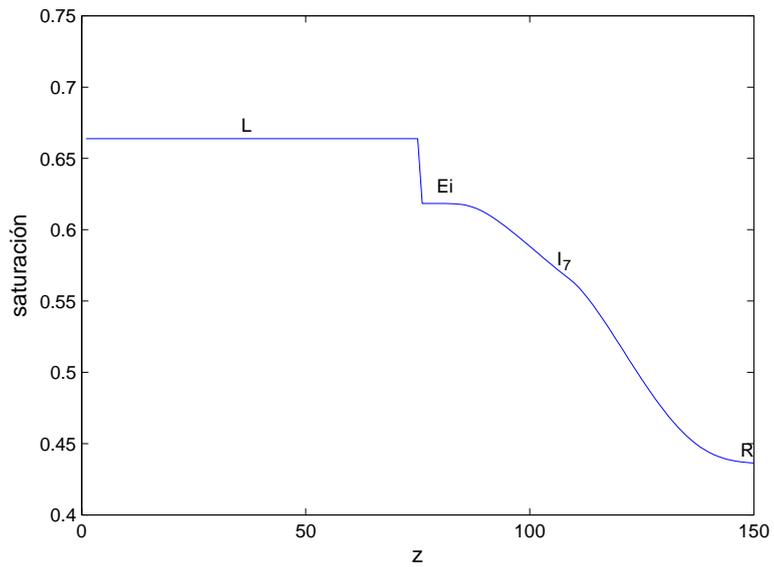
(b) Resultado de la simulación

**Figura 7.23:** Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in C$  y  $R \in R_C^{VI}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



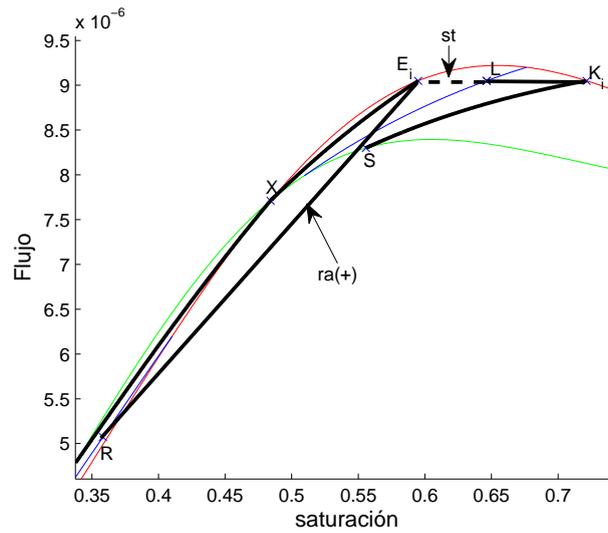
(a) Solución del problema de Riemann



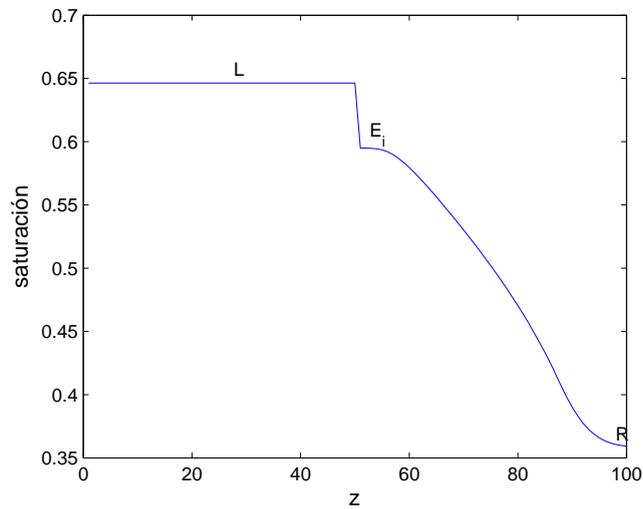
(b) Resultado de la simulación

**Figura 7.24:** Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in C$  y  $R \in R_C^{VII}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



(a) Solución del problema de Riemann

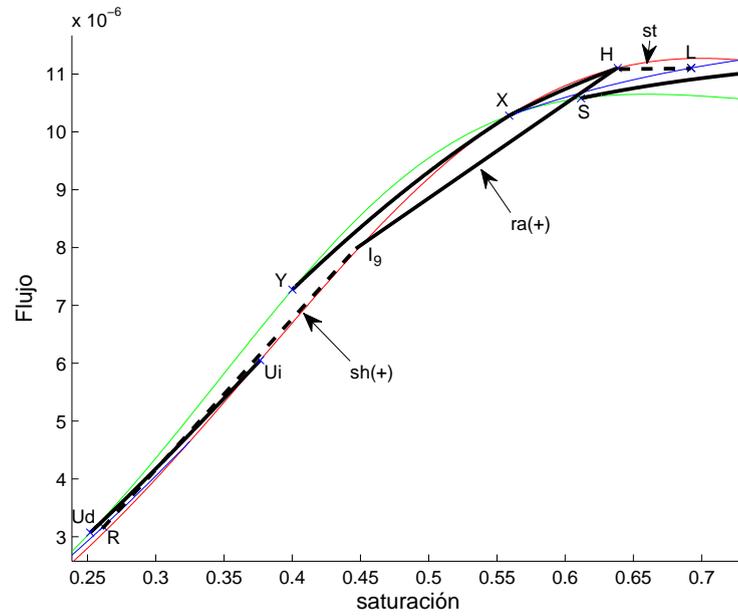


(b) Resultado de la simulación

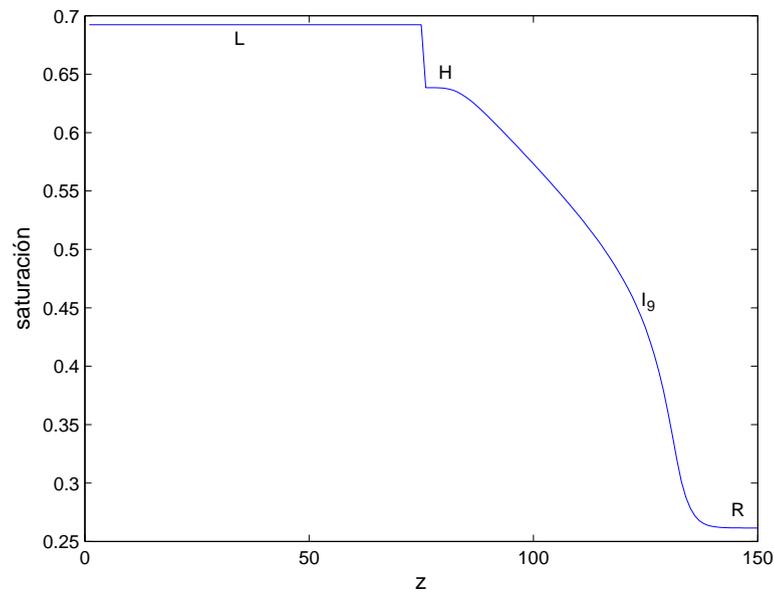
**Figura 7.25:** Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in C$  y

$R \in R_C^{VIII}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



(a) Solución del problema de Riemann

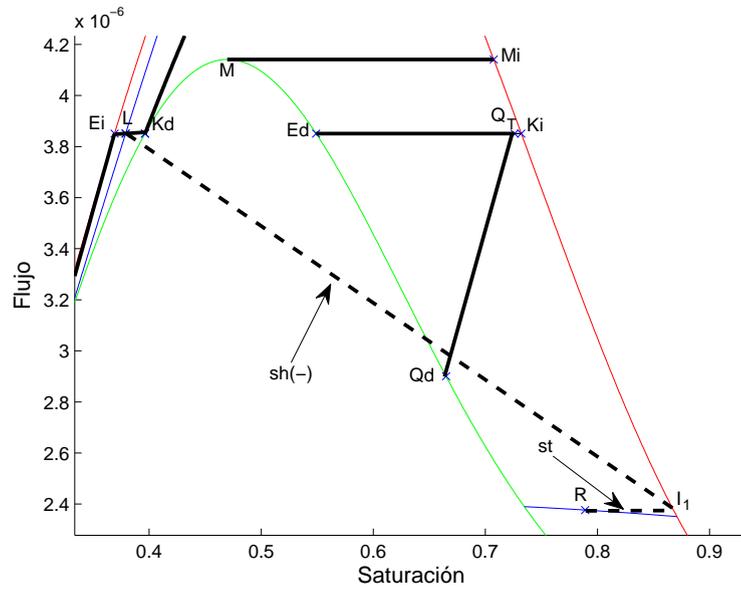


(b) Resultado de la simulación

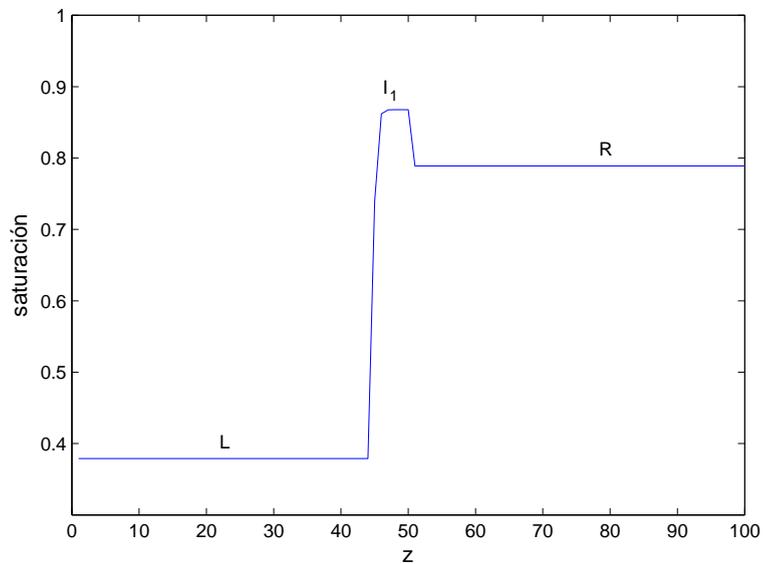
**Figura 7.26:** Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in C$  y

$R \in R_C^{IX}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



(a) Solución del problema de Riemann

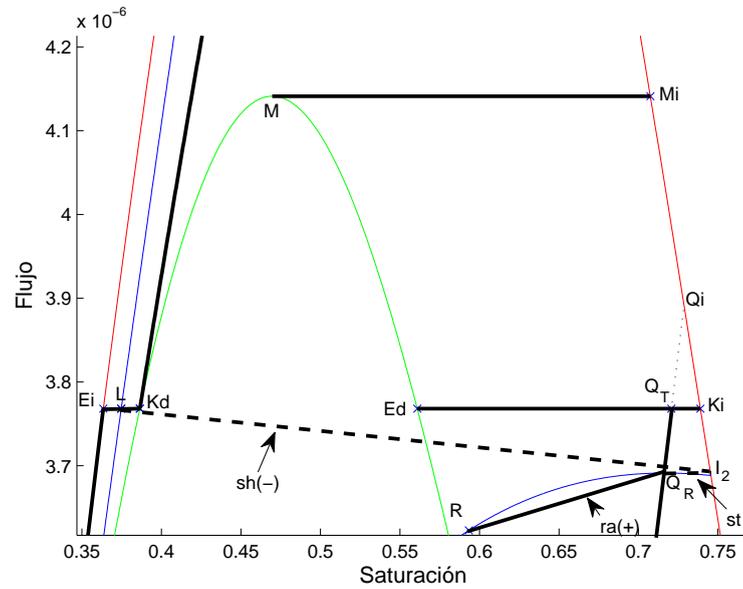


(b) Resultado de la simulación

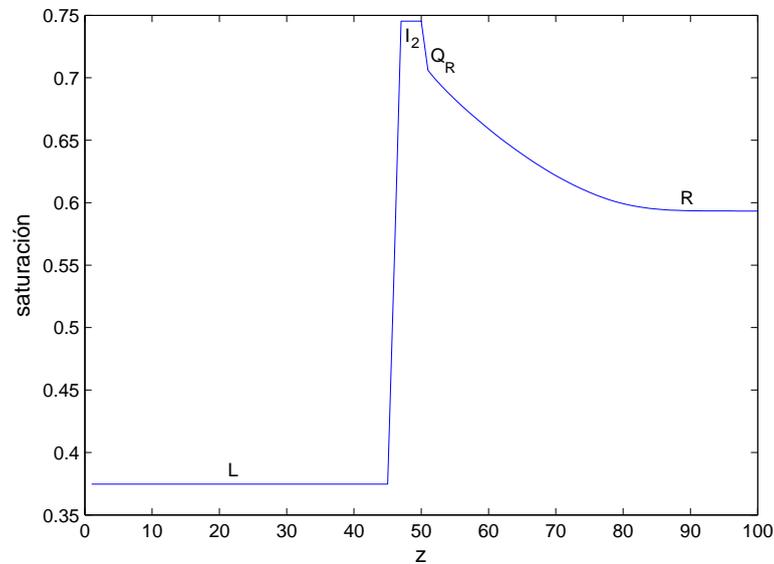
**Figura 7.27:** Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in D1$  y

$R \in R_{D1}^I$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



(a) Solución del problema de Riemann

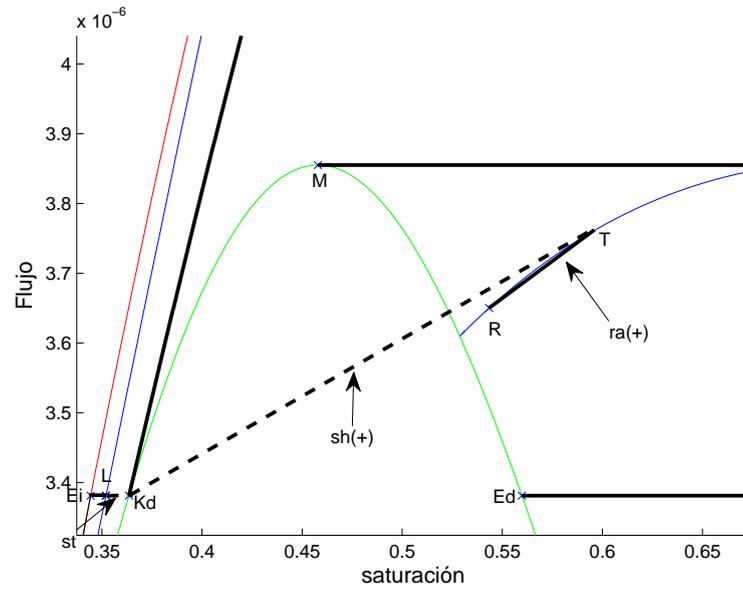


(b) Resultado de la simulación

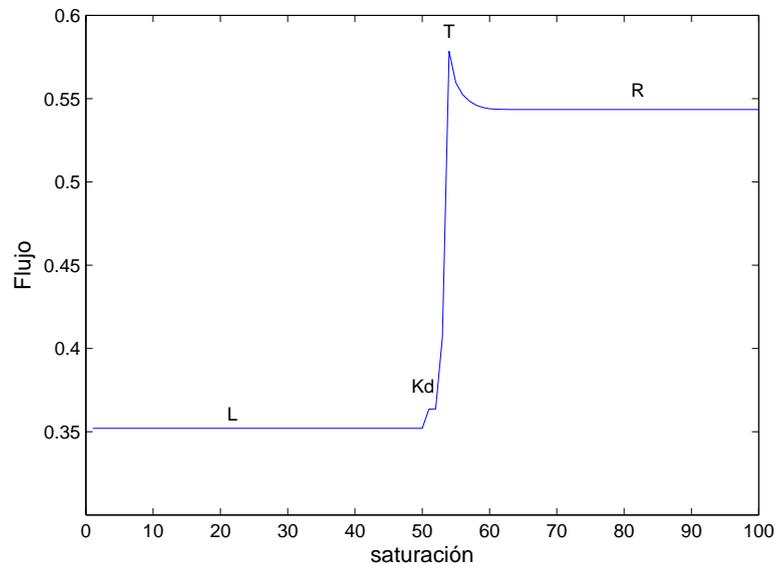
**Figura 7.28:** Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in D1$  y

$R \in R_{D1}^{II}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



(a) Solución del problema de Riemann

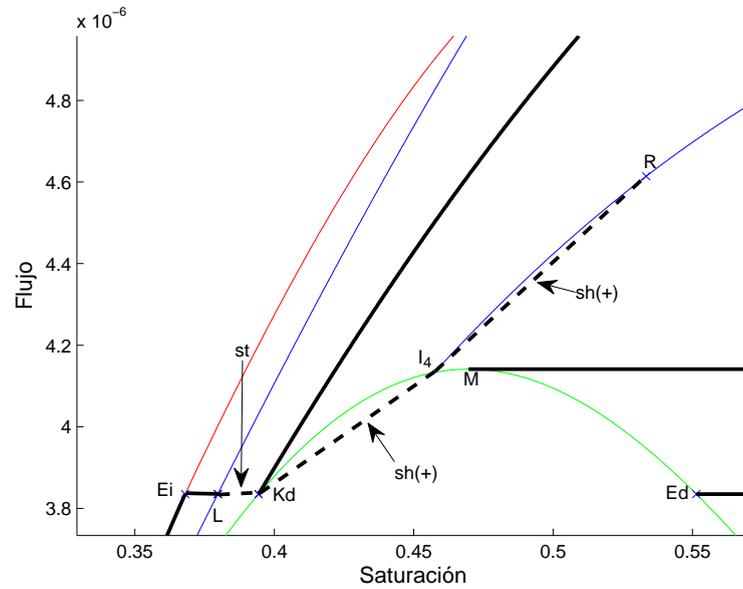


(b) Resultado de la simulación

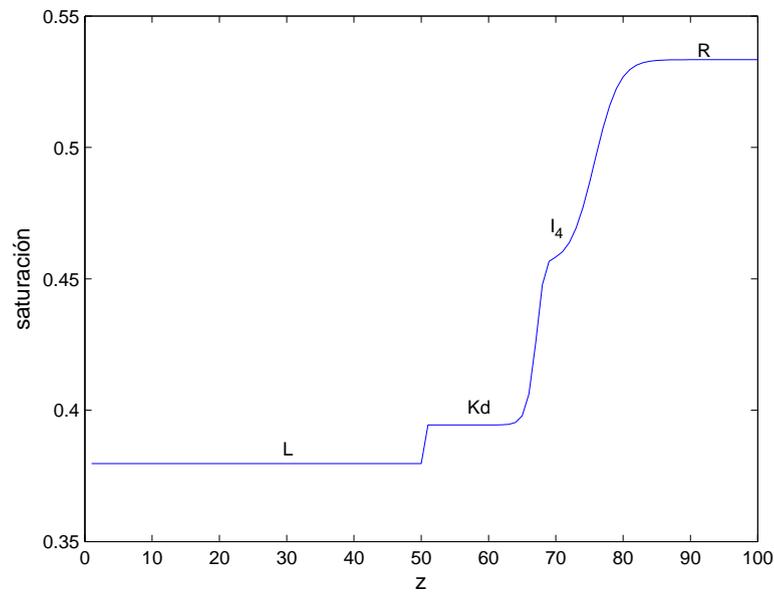
**Figura 7.29:** Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in D1$  y

$R \in R_{D1}^{III}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



(a) Solución del problema de Riemann

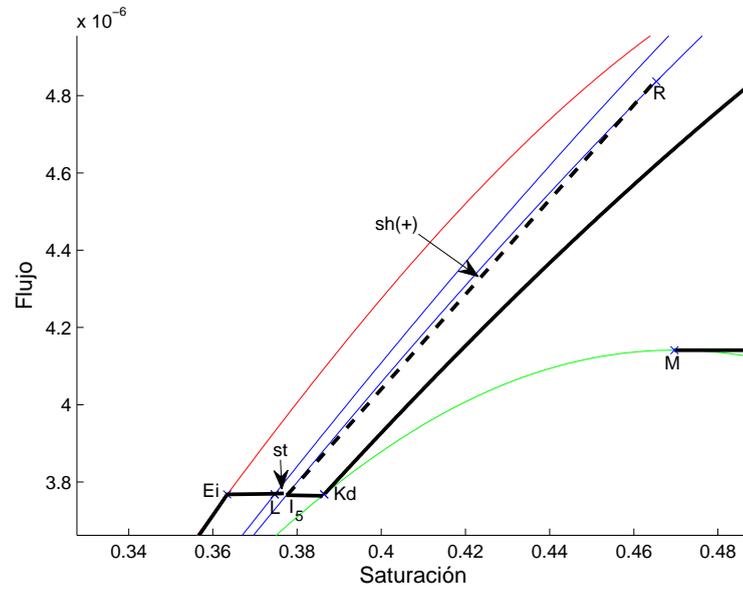


(b) Resultado de la simulación

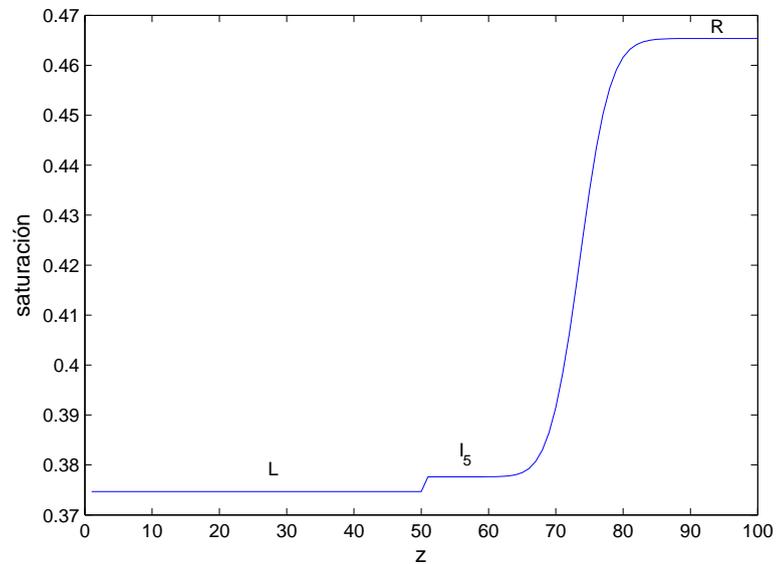
**Figura 7.30:** Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in D1$  y

$R \in R_{D1}^{IV}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



(a) Solución del problema de Riemann

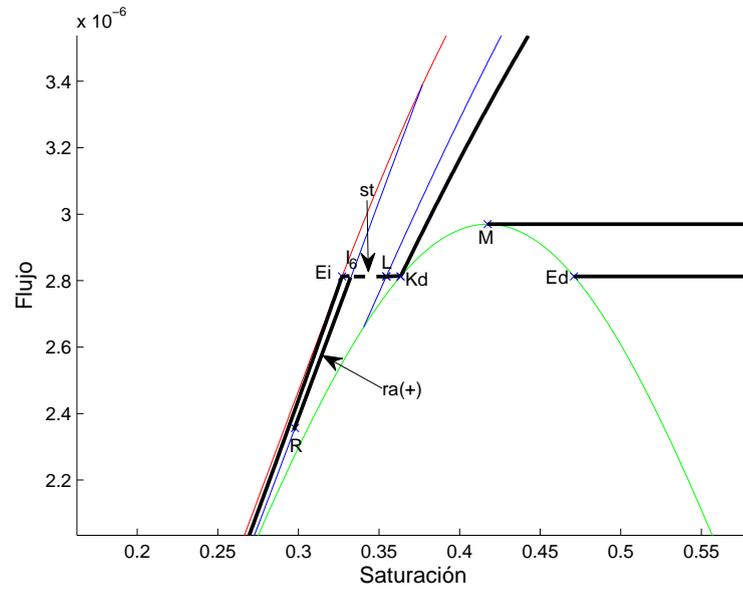


(b) Resultado de la simulación

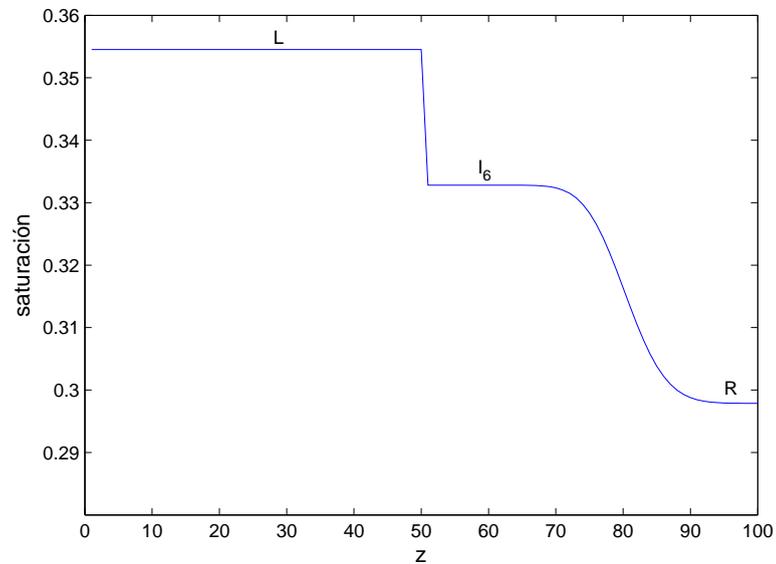
**Figura 7.31:** Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in D1$  y

$R \in R_{D1}^V$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



(a) Solución del problema de Riemann

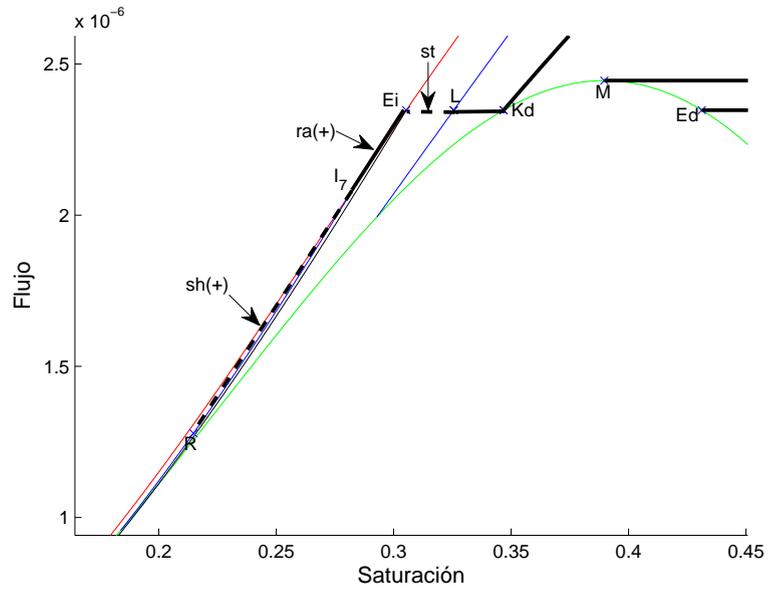


(b) Resultado de la simulación

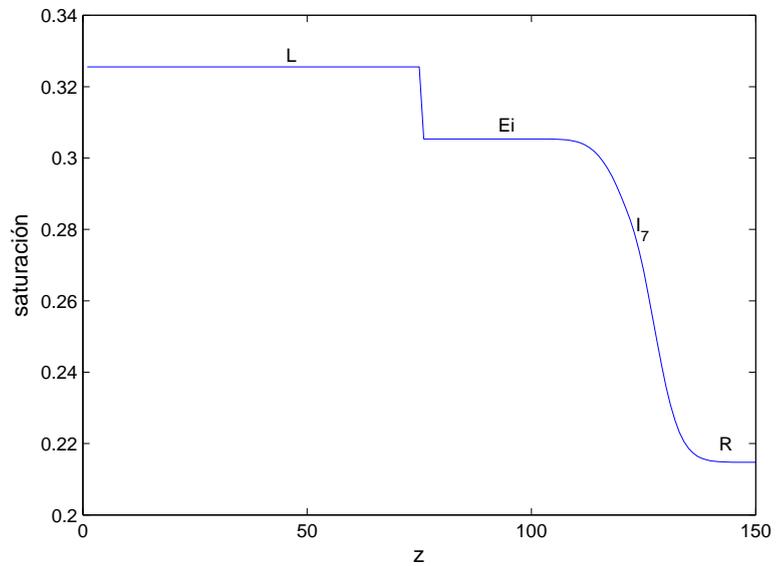
**Figura 7.32:** Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in D1$  y

$R \in R_{D1}^{VI}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



(a) Solución del problema de Riemann

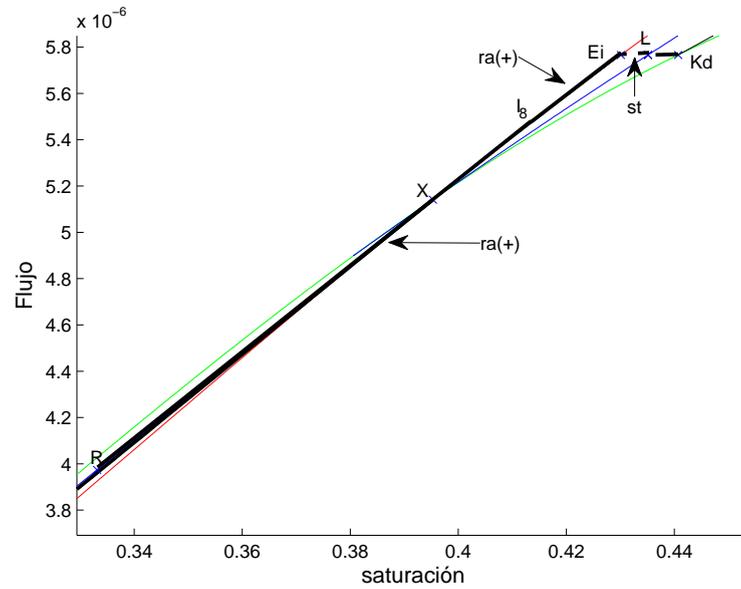


(b) Resultado de la simulación

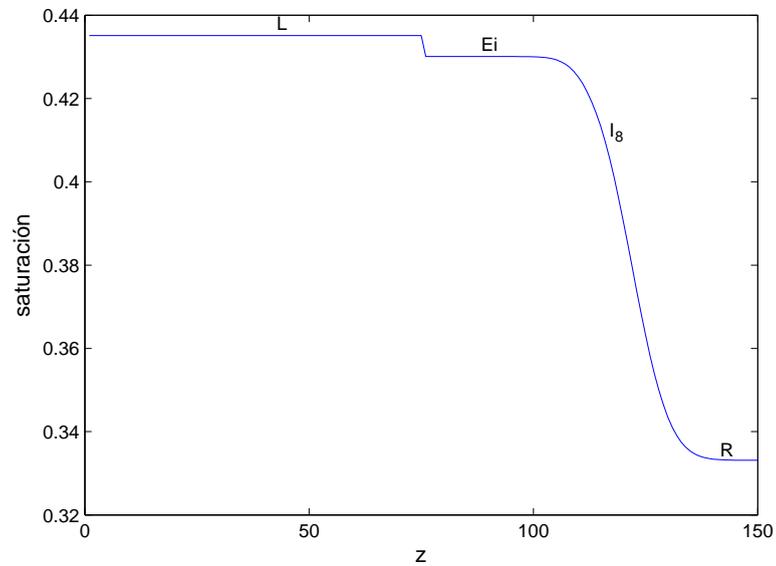
**Figura 7.33:** Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in D1$  y

$R \in R_{D1}^{VII}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



(a) Solución del problema de Riemann

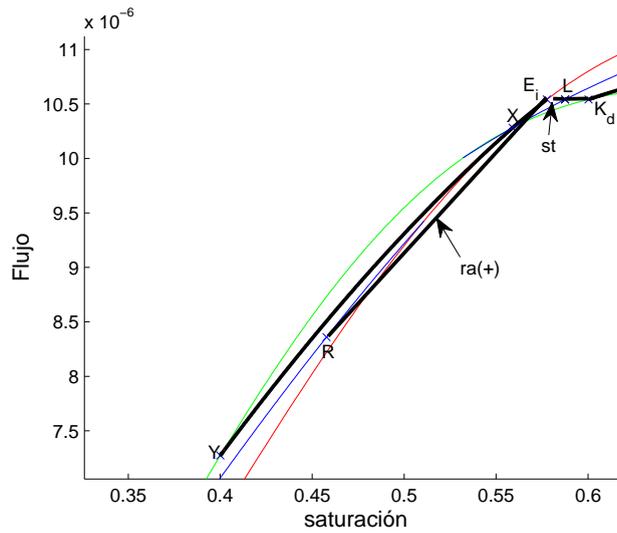


(b) Resultado de la simulación

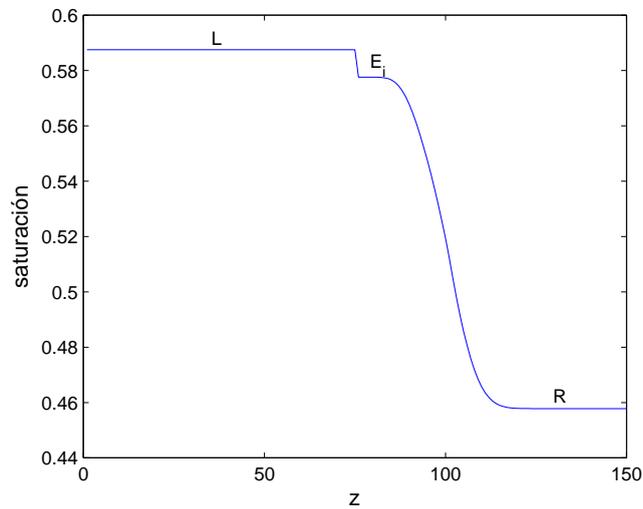
**Figura 7.34:** Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in D1$  y

$R \in R_{D1}^{VIII}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



(a) Solución del problema de Riemann

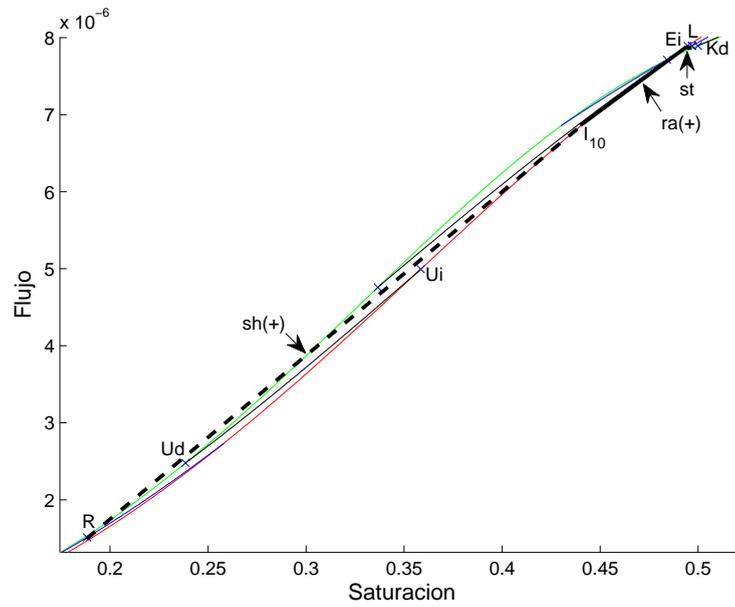


(b) Resultado de la simulación

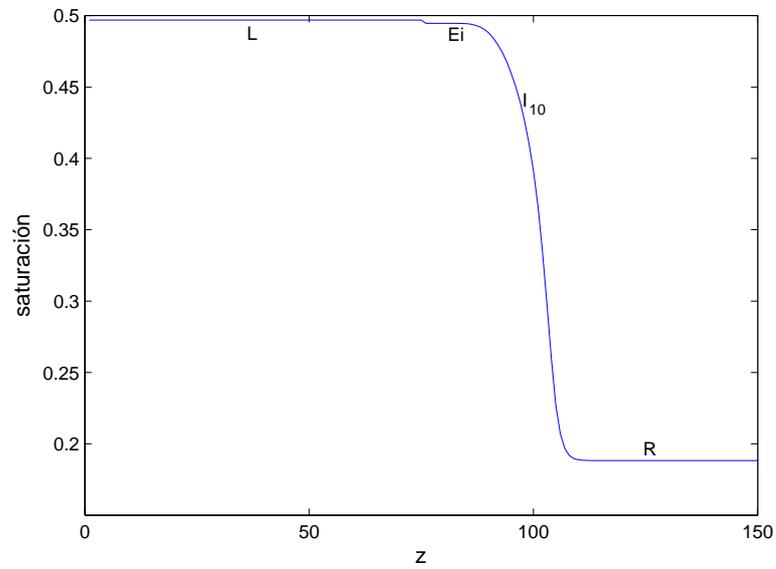
**Figura 7.35:** Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in D1$  y

$R \in R_{D1}^{IX}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



(a) Solución del problema de Riemann

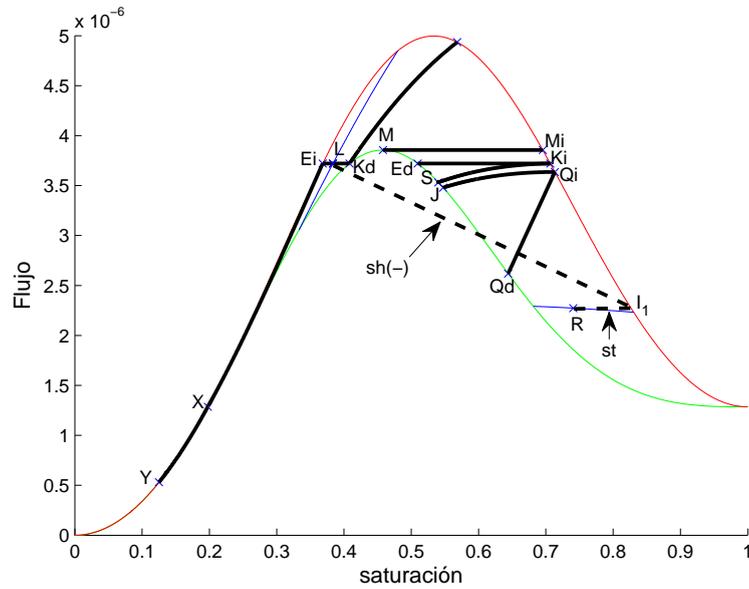


(b) Resultado de la simulación

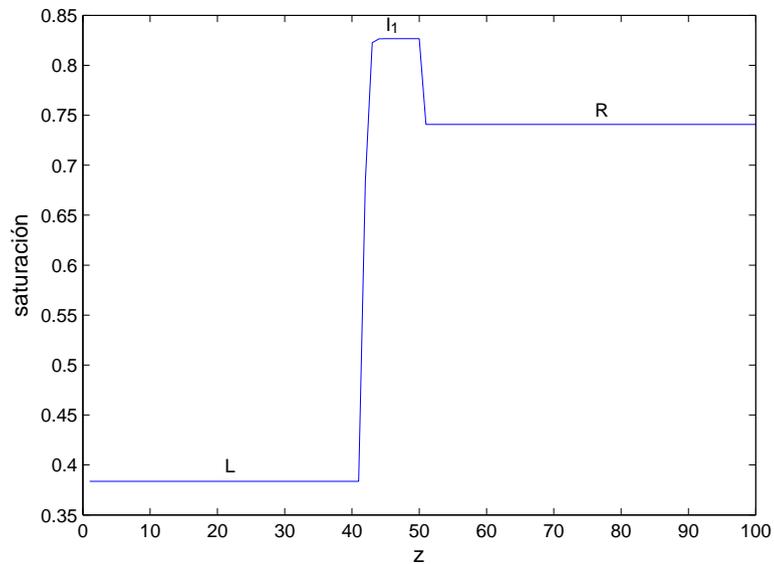
**Figura 7.36:** Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in D1$  y

$R \in R_{D1}^X$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



(a) Solución del problema de Riemann

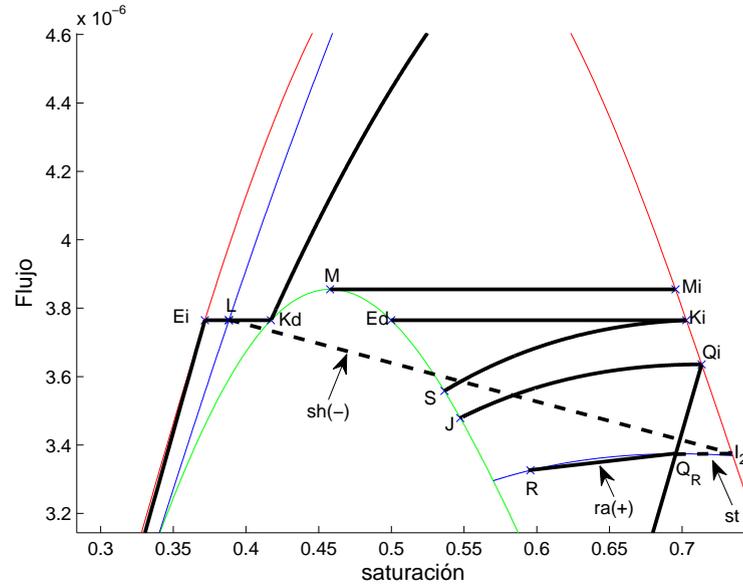


(b) Resultado de la simulación

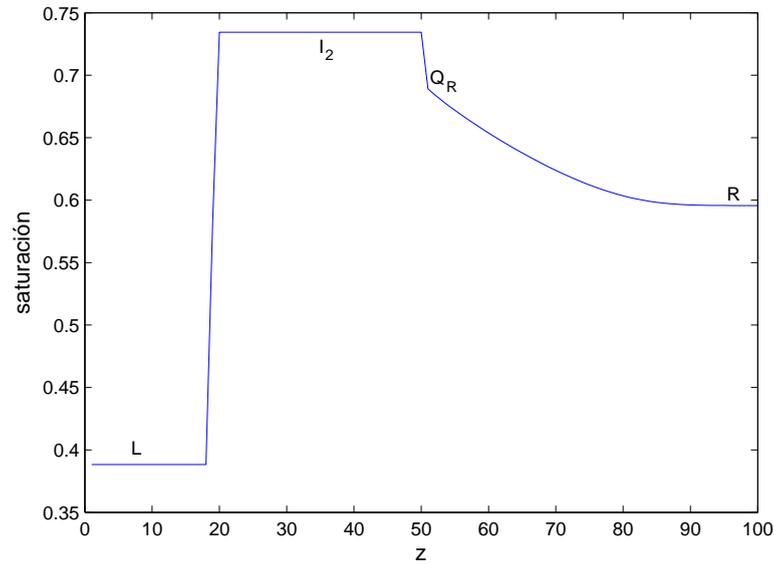
**Figura 7.37:** Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in D_2$  y

$R \in R_{D_2}^I$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



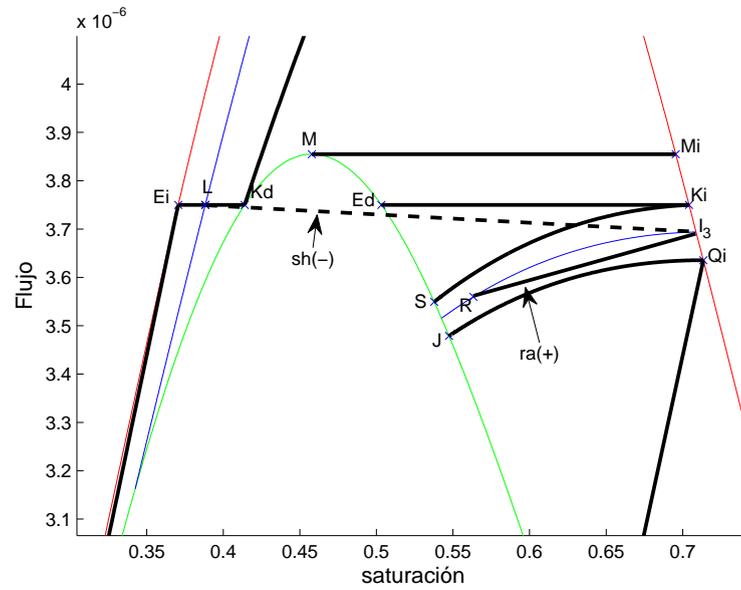
(a) Solución del problema de Riemann



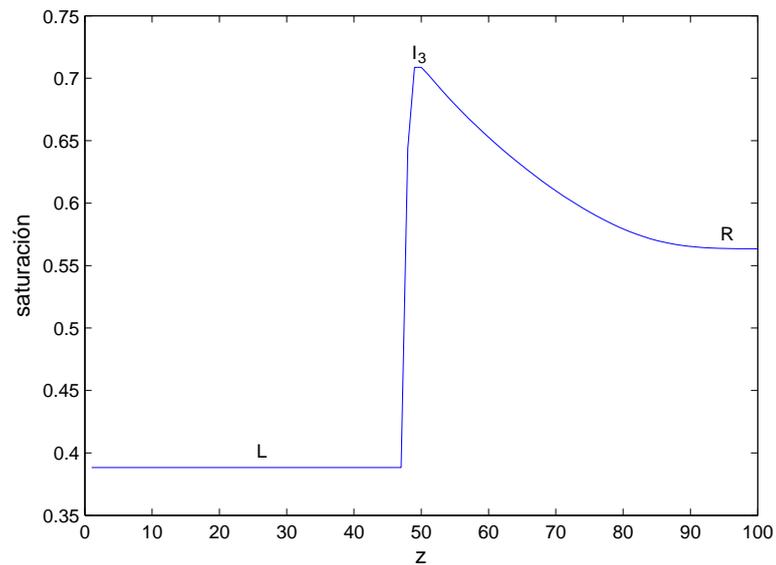
(b) Resultado de la simulación

**Figura 7.38:** Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in D_2$  y  $R \in R_{D_2}^{II}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



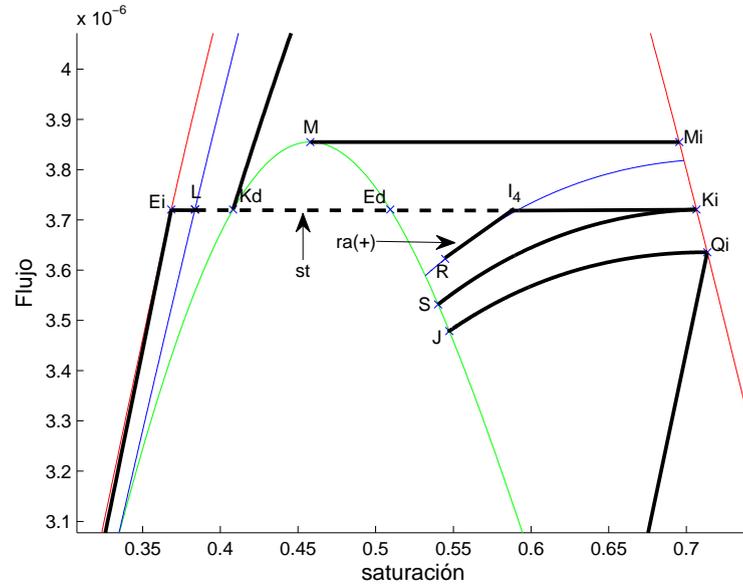
(a) Solución del problema de Riemann



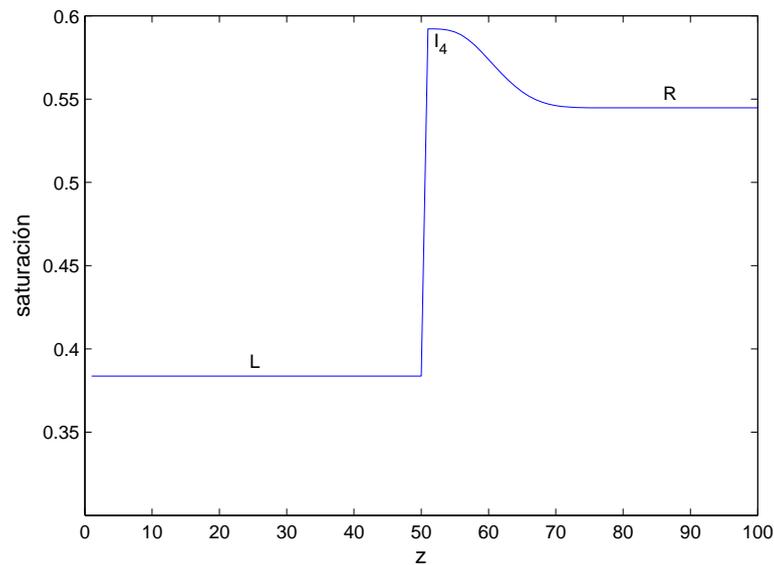
(b) Resultado de la simulación

**Figura 7.39:** Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in D_2$  y  $R \in R_{D_2}^{III}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



(a) Solución del problema de Riemann

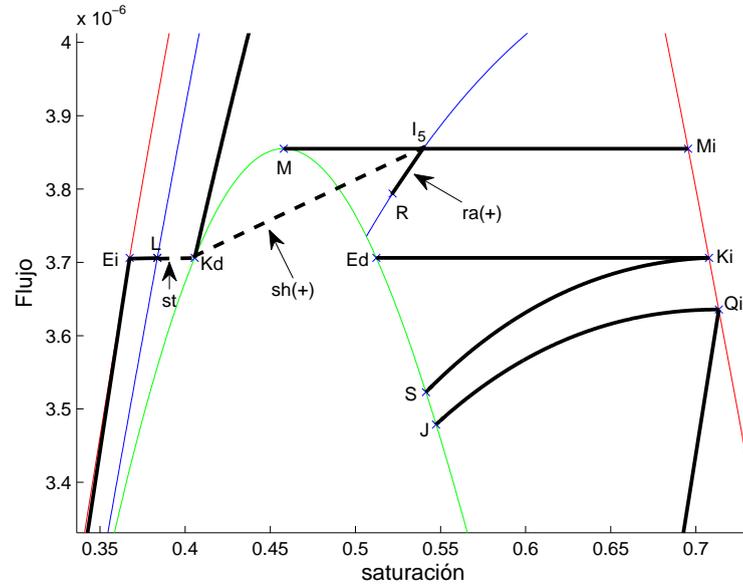


(b) Resultado de la simulación

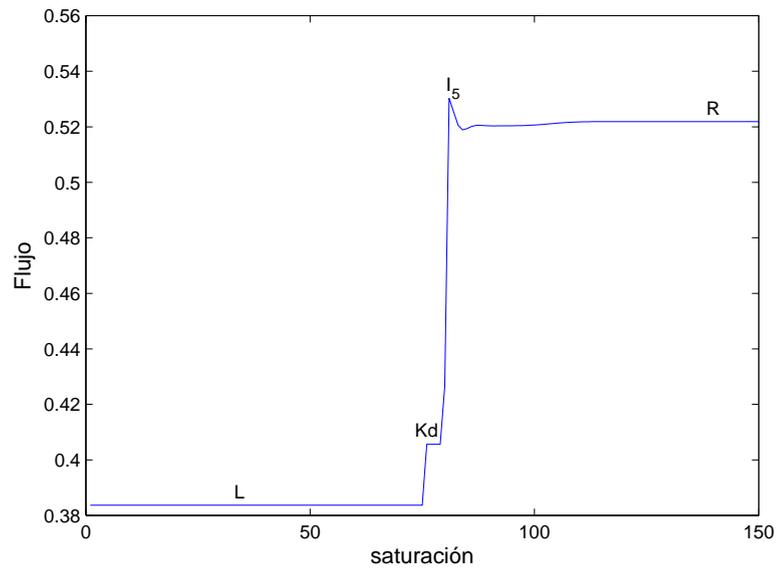
**Figura 7.40:** Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in D_2$  y

$R \in R_{D_2}^{IV}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



(a) Solución del problema de Riemann

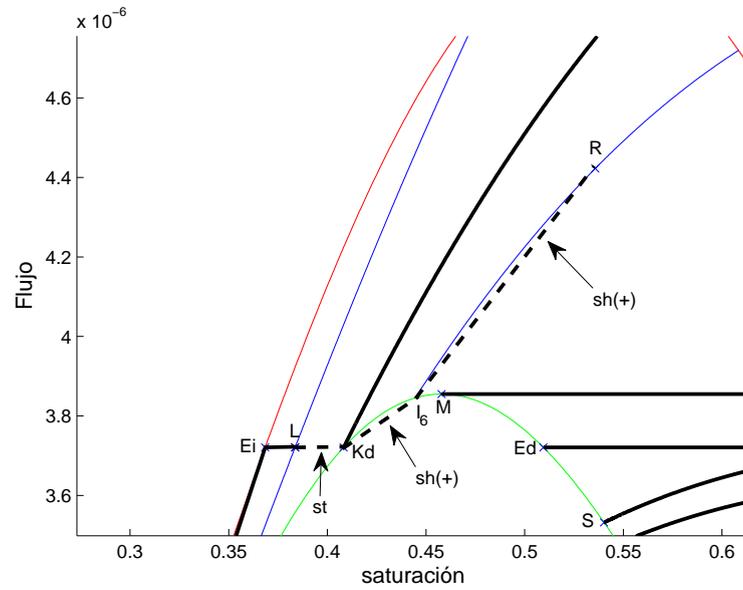


(b) Resultado de la simulación

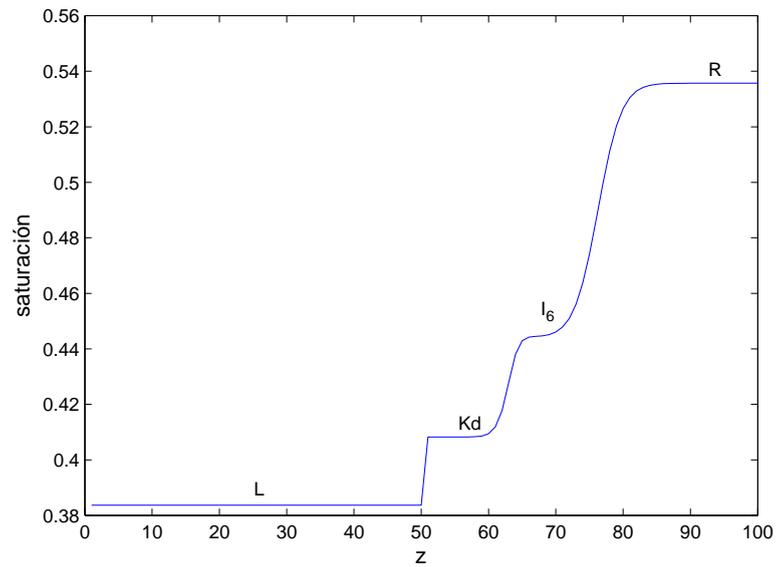
**Figura 7.41:** Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in D_2$  y

$R \in R_{D_2}^V$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



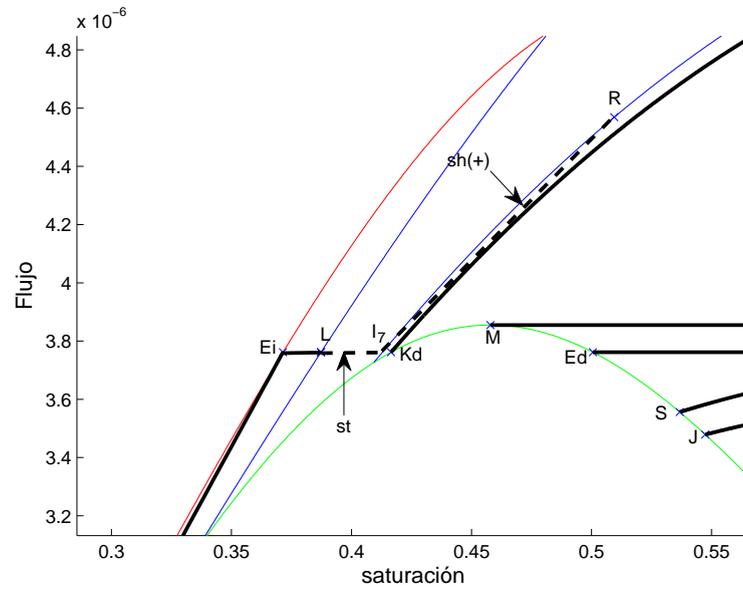
(a) Solución del problema de Riemann



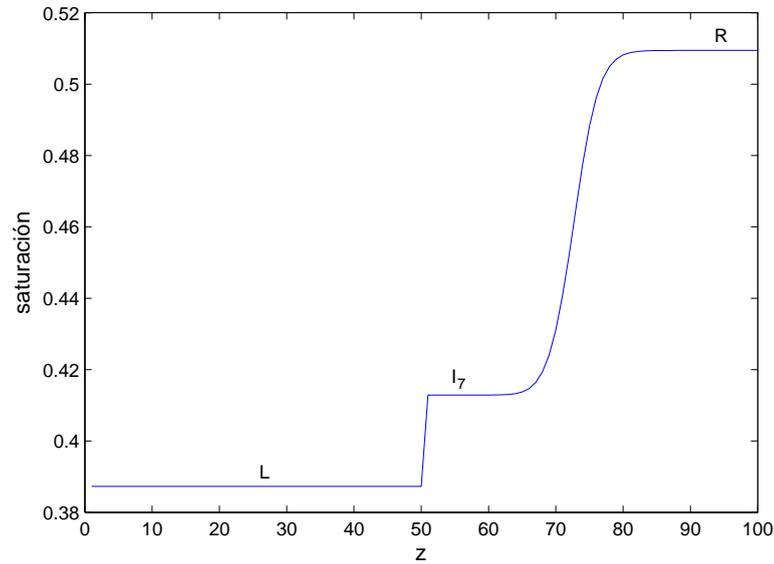
(b) Resultado de la simulación

**Figura 7.42:** Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in D_2$  y  $R \in R_{D_2}^{VI}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



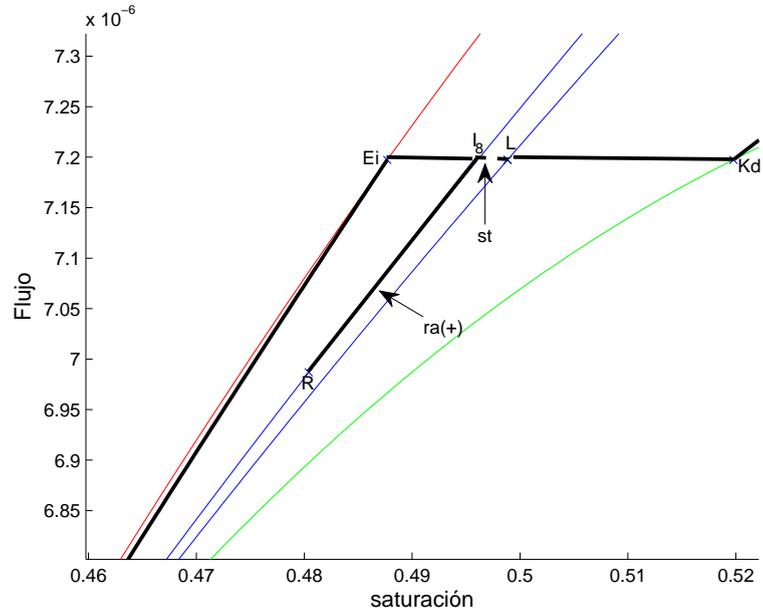
(a) Solución del problema de Riemann



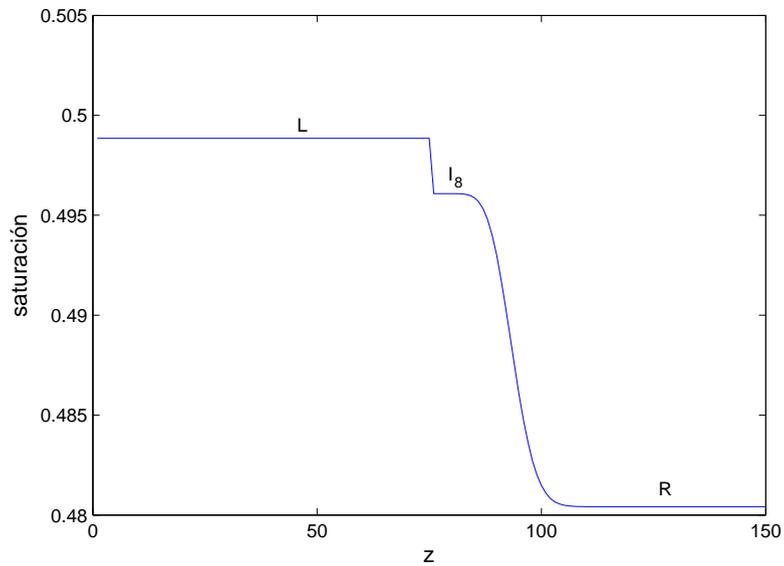
(b) Resultado de la simulación

**Figura 7.43:** Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in D_2$  y  $R \in R_{D_2}^{VII}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



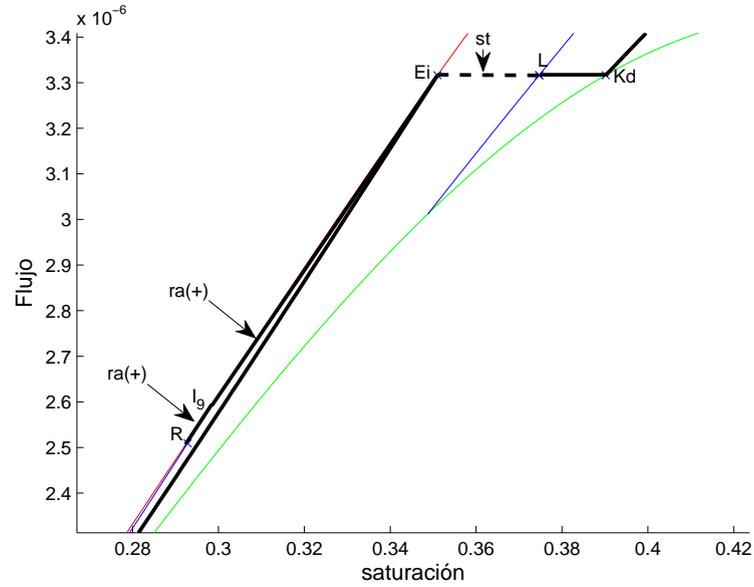
(a) Solución del problema de Riemann



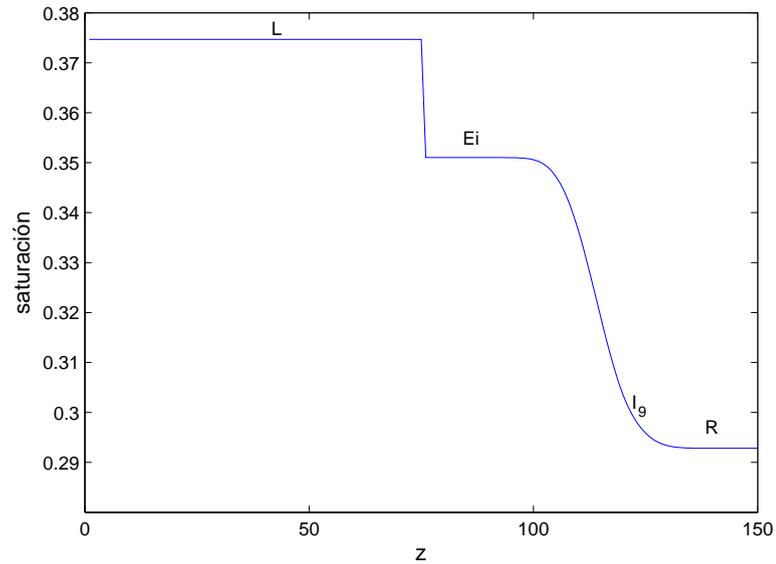
(b) Resultado de la simulación

**Figura 7.44:** Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in D_2$  y  $R \in R_{D_2}^{VIII}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



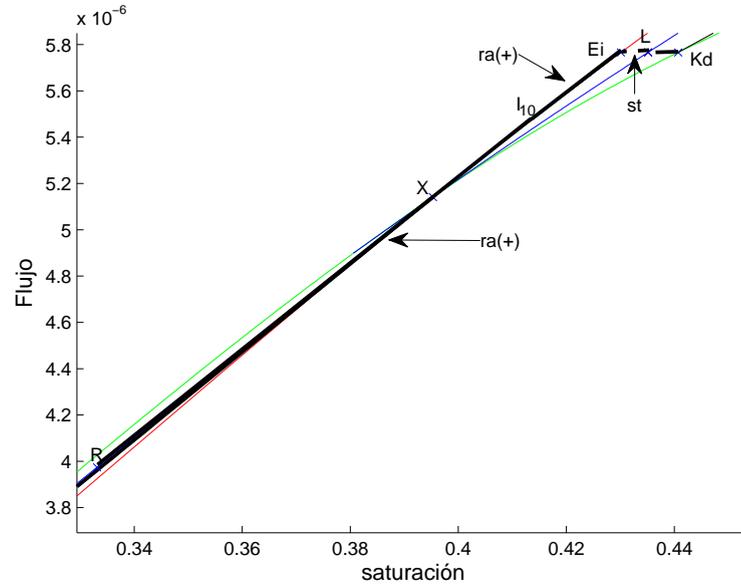
(a) Solución del problema de Riemann



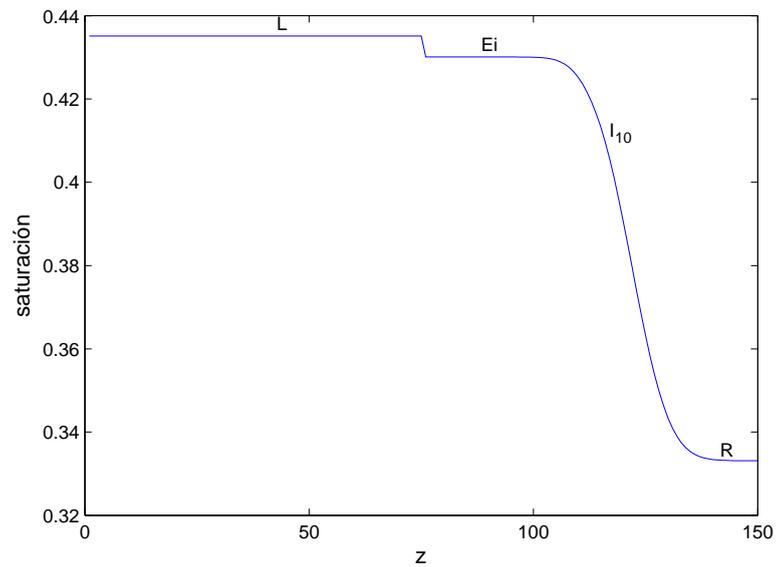
(b) Resultado de la simulación

**Figura 7.45:** Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in D_2$  y  $R \in R_{D_2}^X$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



(a) Solución del problema de Riemann

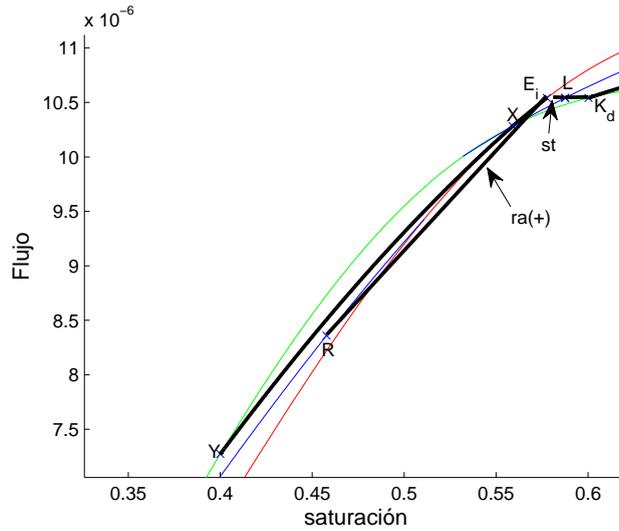


(b) Resultado de la simulación

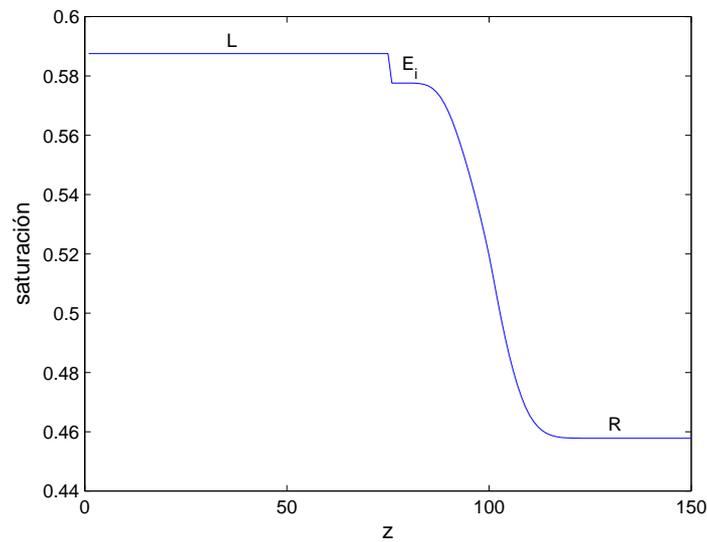
**Figura 7.46:** Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in D_2$  y

$R \in R_{D_2}^X$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



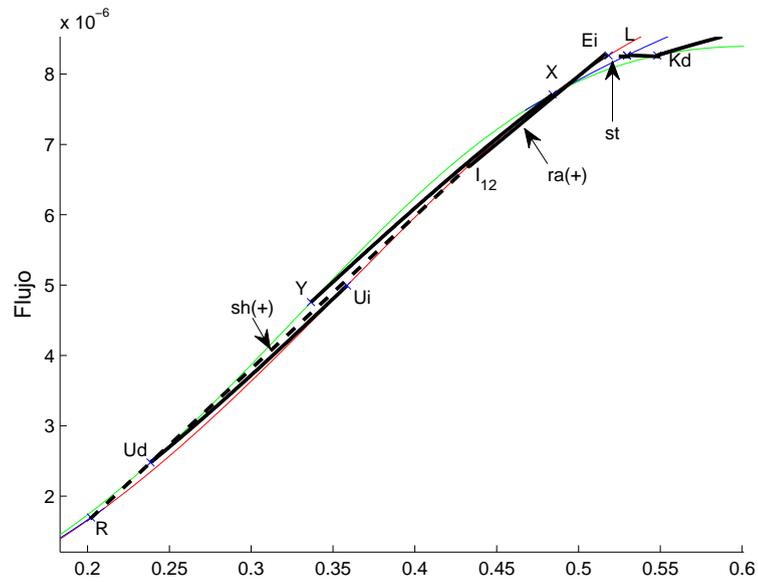
(a) Solución del problema de Riemann



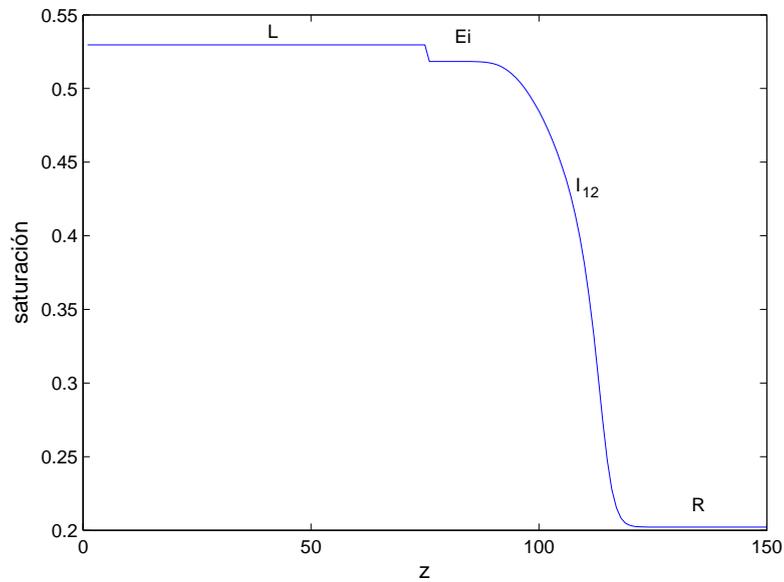
(b) Resultado de la simulación

**Figura 7.47:** Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in D_2$  y  $R \in R_{D_2}^{XI}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



(a) Solución del problema de Riemann

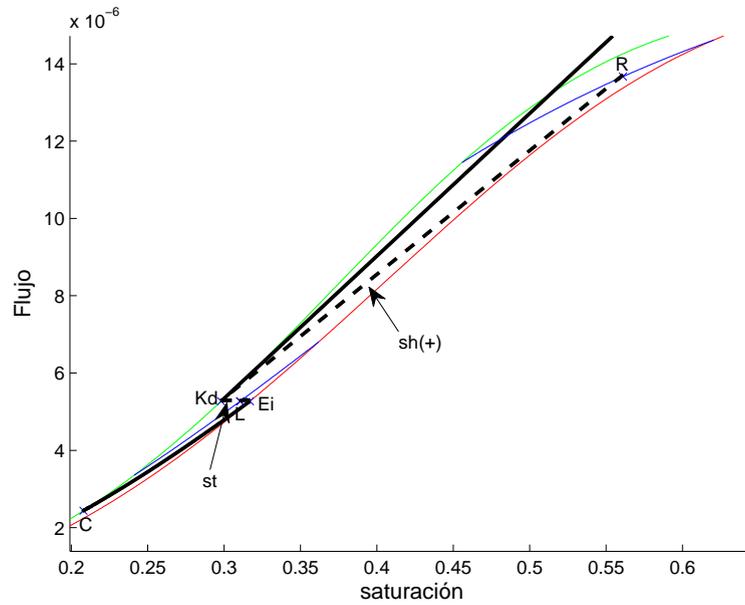


(b) Resultado de la simulación

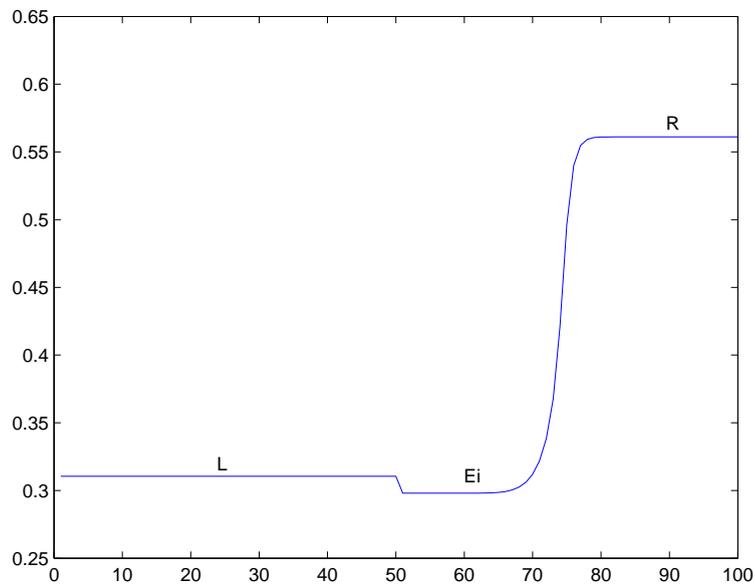
**Figura 7.48:** Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in D_2$  y

$R \in R_{D_2}^{XII}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



(a) Solución del problema de Riemann

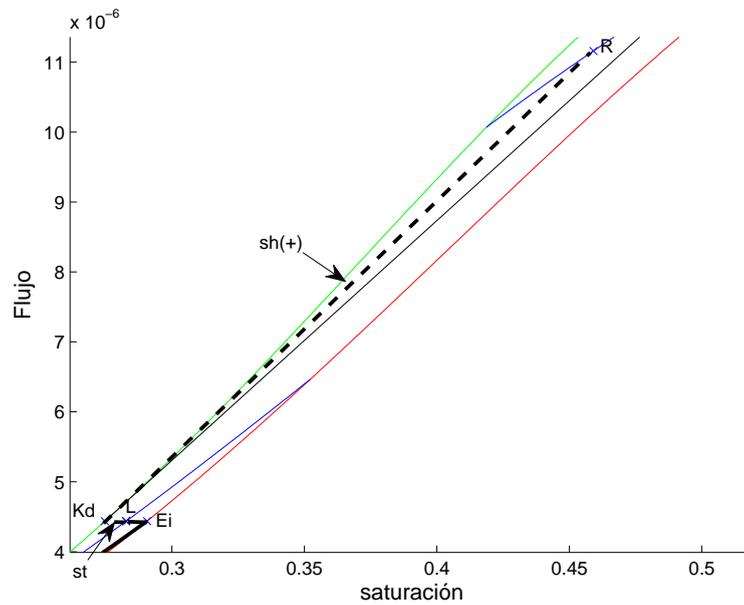


(b) Resultado de la simulación

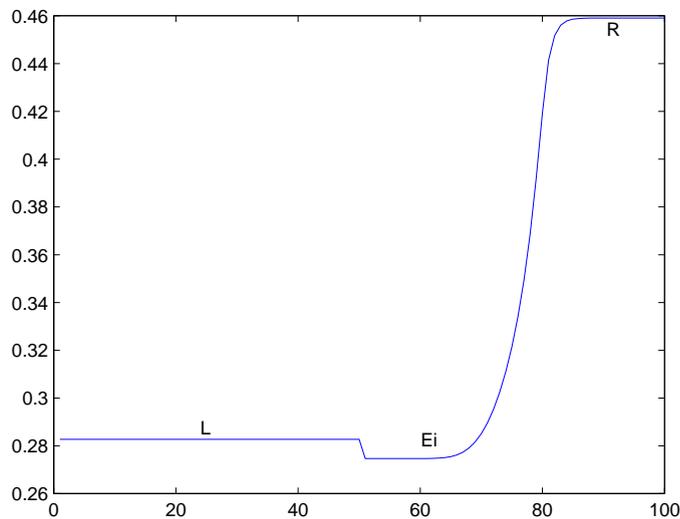
**Figura 7.49:** Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in E$  y

$R \in R_E^I$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



(a) Solución del problema de Riemann

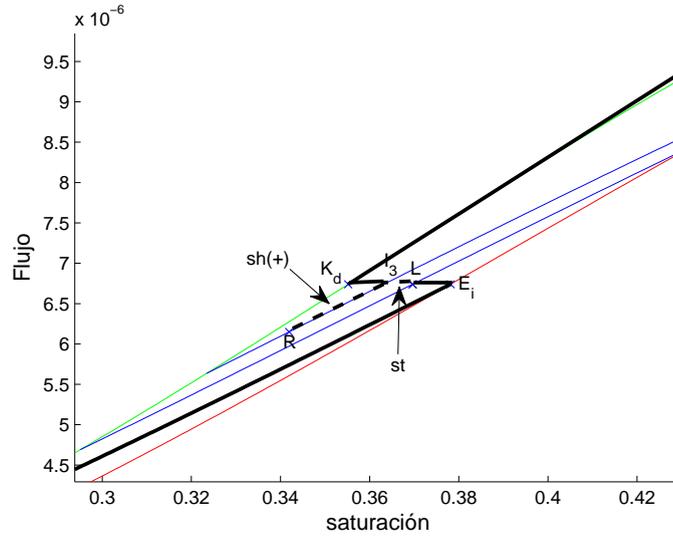


(b) Resultado de la simulación

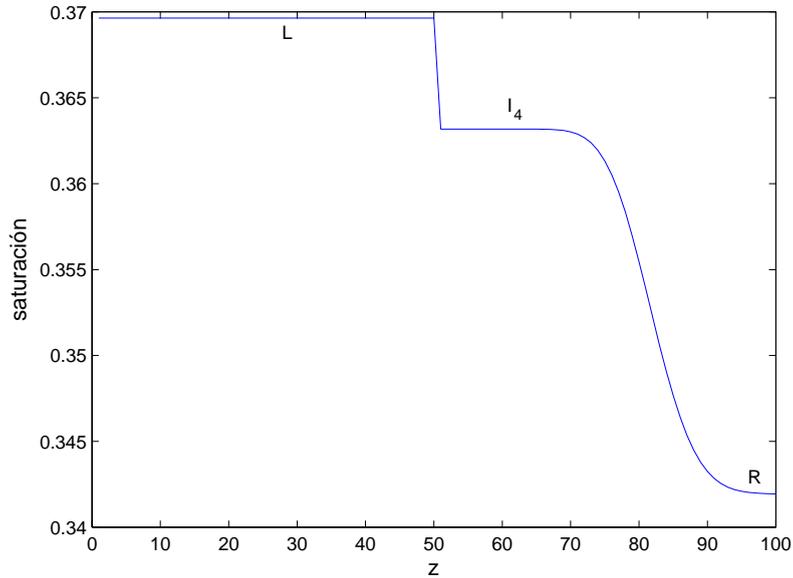
**Figura 7.50:** Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in E$  y

$R \in R_E^{II}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



(a) Solución del problema de Riemann

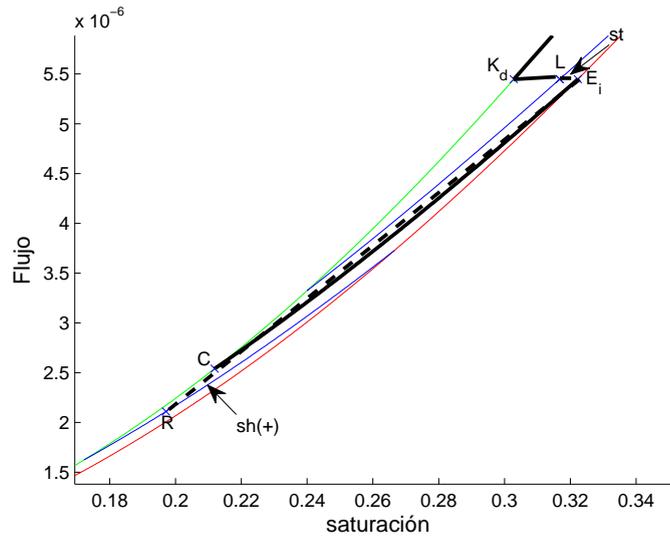


(b) Resultado de la simulación

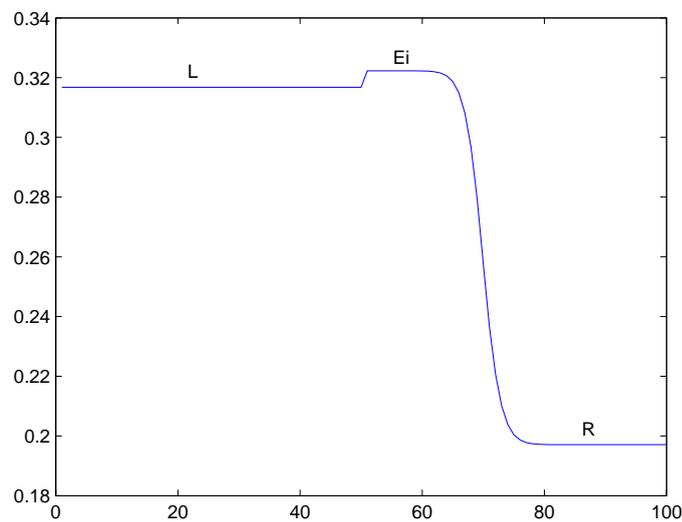
**Figura 7.51:** Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in E$  y

$R \in R_E^{III}$ . Fuente: Elaboración propia.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



(a) Solución del problema de Riemann



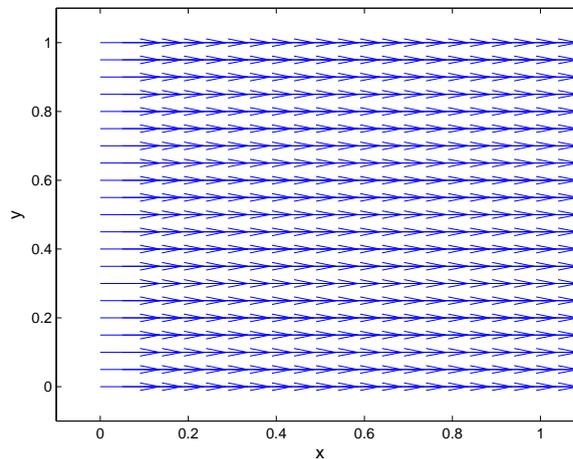
(b) Resultado de la simulación

**Figura 7.52:** Solución del Problema de Riemann y resultado de la simulación para  $L \in E$  y

$R \in R_E^{IV}$ . Fuente: Elaboración propia.

## 7.2. Resultados para 2D

Dado que no se cuenta con datos de experimentos de laboratorio para contrastar con los resultados en 2D, para validar los resultados del simulador en los casos 2D, las simulaciones llevadas a cabo se hicieron tomando la aceleración gravitacional  $g = 0$  y las velocidades constantes, horizontales y paralelas entre sí en toda la malla; así se llevo al caso equivalente 1D (velocidades en una sola dirección).

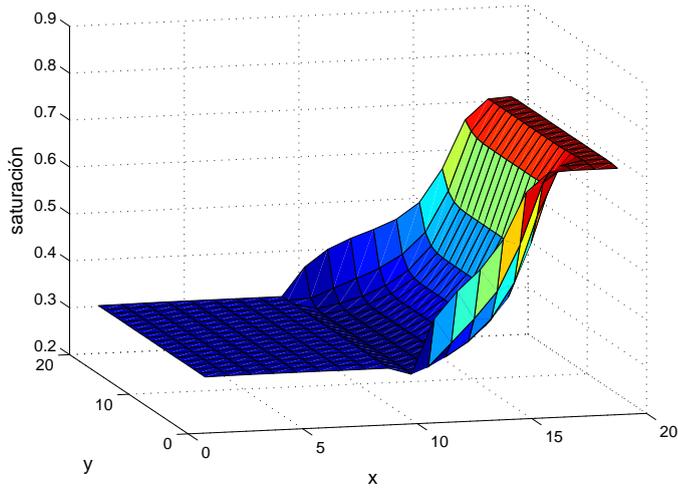


**Figura 7.53:** Campo de Velocidades utilizado en la simulación 2D. Fuente: Elaboración propia.

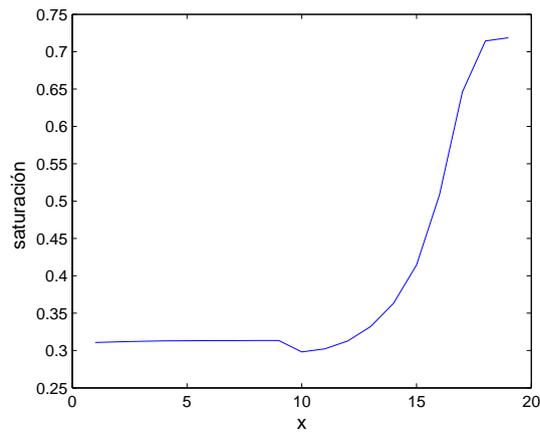
Cada perfil resultante al cortar la superficie de la Figura 7.54 con un plano vertical (plano saturación-x) representa un caso 1D (por ejemplo el perfil de la Figura 7.55). Este resultado corresponde a una solución teórica 1D de onda estacionaria-onda de choque positiva, como ocurre en los casos cuando  $g = 0$ .

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

---



**Figura 7.54:** Simulación 2D. Saturaciones en toda la malla en un instante de tiempo. Fuente: Elaboración propia.



**Figura 7.55:** Saturaciones en el medio de la malla en un instante de tiempo. Fuente: Elaboración propia.

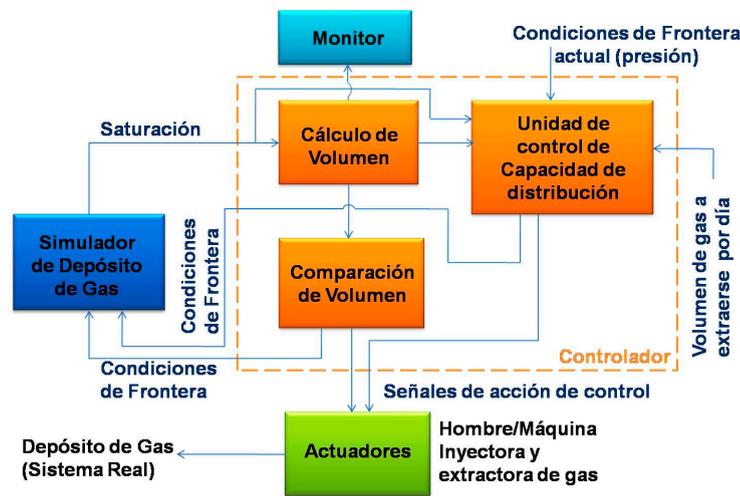
## **CAPITULO 8**

### **ESQUEMA DE UN SISTEMA DE CONTROL DE ALMACENAMIENTO DE GAS NATURAL**

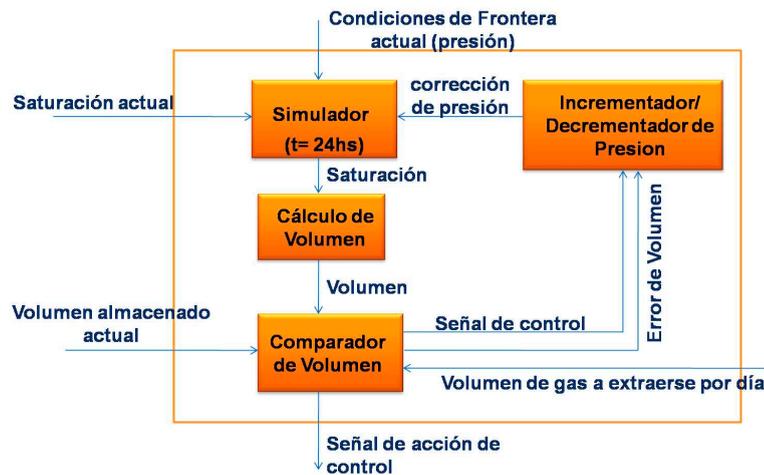
En el esquema de control de la Figura 8.1 podemos ver que el simulador actúa como una planta virtual. El controlador monitorea el volumen de gas a partir del perfil de saturación (el volumen almacenado puede calcularse a partir del perfil de saturación, la porosidad). El controlador determina si el volumen en el reservorio está dentro del rango (mínimo, máximo) o si la presión en la entrada es la adecuada para extraer el volumen de gas necesario por día (capacidad de distribución), y determina acciones de control de acuerdo a la condición del reservorio, las cuales van a los actuadores y estos ejecutan la acción de control sobre el sistema real. Al mismo tiempo se envían al simulador señales de control equivalentes (condiciones de frontera) a una determinada acción de control.

En la Figura 8.2 se puede apreciar el esquema de la Unidad de Control de Distribución. Esta unidad recibe como parámetro de control el volumen de gas a extraer por día. Entradas adicionales son las condiciones físicas en la boca de extracción (presión, etc.), la saturación y el volumen actual del gas dentro del depósito. Esta unidad contiene al simulador como uno de sus componentes internos. El simulador realiza una simulación para conocer el perfil de saturación luego de 24 horas de extracción con las condiciones de frontera actuales. A partir del perfil de saturación resultante y la porosidad se calcula el volumen de gas en el interior del depósito luego

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**



**Figura 8.1:** Esquema de un sistema de control de un depósito de gas natural. Fuente: Elaboración propia.



**Figura 8.2:** Esquema de la Unidad de Control de Distribución. Fuente: Elaboración propia.

de 24 horas (bloque Cálculo de Volumen), luego se calcula la diferencia entre el volumen actual y el volumen después de 24 horas para obtener el volumen extraído en un día y esta diferencia se compara con el volumen de gas a extraer por día deseado (bloque Comparador de Volumen). Si esta diferencia no coincide con el volumen que se desea extraer, se envía el error de volumen

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

---

al bloque corrector de presión y este modifica el valor de la presión en el simulador con el propósito de acercarse al volumen de gas extraído. Una vez que se obtienen las condiciones que permiten extraer el volumen de gas deseado por día, se envía una señal de acción de control para cambiar las condiciones físicas actuales a las condiciones necesarias para la extracción deseada. Durante el proceso del cálculo de las condiciones deseadas se considera que los procesos de extracción o inyección se detienen.

## **CAPITULO 9**

### **CONCLUSIONES**

- De acuerdo a los resultados de las simulaciones, se pudo comprobar que los resultados numéricos concordaban con los resultados teóricos previstos, por tanto, el esquema numérico, el método de determinación de las soluciones de Riemann y asignación de flujos en las fronteras, y el algoritmo del simulador funcionan correctamente para los casos 1D y 2D.
- Se pudo observar en las simulaciones que se necesita un procesador con gran capacidad de procesamiento, especialmente en los casos 2D, para que la simulación no lleve demasiado tiempo. Los tiempos de simulación obtenidos justifican la implementación del simulador en un lenguaje de programación compilado como lenguaje C en vez de MATLAB, ya que este último es un lenguaje de programación interpretado y por tanto más lento a la hora de ejecutar el algoritmo.
- El simulador bien puede utilizarse para diseñar un controlador de volumen de gas de un depósito de almacenamiento de gas natural subterráneo, ya que puede ser utilizado como observador de estado, o bien puede utilizarse para realizar un control predictivo o adaptativo.

## **TRABAJOS FUTUROS SUGERIDOS**

Como trabajos futuros posibles se sugieren:

- La extensión la simulación a tres dimensiones.
- La inclusión de más fases.
- La mejora del tiempo de cómputo implementando el simulador en un lenguaje de programación compilado (lenguaje C).
- La implementación de un esquema de control para el sistema (sistema de control en lazo cerrado).

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Braun E.M. and Holland R.F., *Relative permeability hysteresis: laboratory measurements and a conceptual model*, SPE Reservoir Engineering, No. 28615, pp. 222–228, 1995.
- [2] Colonna J., Brissaud F., and Millet J.L., *Evolution of capillarity and relative permeability hysteresis*, Transactions volume 253, SPE No. 2941, 1972.
- [3] Furati K.M., *Effects of relative permeability history dependence on two-phase flow in porous media*, Transport in Porous Media, Vol. 28, pp. 181–203, 1997.
- [4] Kjosavik A., Ringen J.K. and Skjaeveland S.M., *Relative permeability correlation for mixed-wet reservoirs*, SPEJ, March, pp 49-58, 2002.
- [5] Plorh B., Marchesin D., Bedrikovetsky P., Krause P., *Modeling hysteresis in porous media flow via relaxation*, Computational Geosciences, Vol. 5, No 3, pp. 225-256, 2001.
- [6] Schaerer C.E., Sarkis M., Marchesin D. and Bedrikovetsky P., *Counterflow segregation problem with hysteretic permeability*, SIAM Journal of Applied Mathematics-SIAP, Vol. 66, No 5, pp 1512–1532, 2006.
- [7] Moura D., Schaerer C.E., *Histerese na Permeabilidade Relativa para o Armazenamento de Gás em Aquífero*, IMPA, Rio de Janeiro, Brazil, 2007.

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

---

- [8] K. Aziz and A. Settari, *Petroleum Reservoir Simulation*, Applied Science, London, 1979.
- [9] J. E. Killough, *Reservoir simulation with history-dependent saturation functions*, SPE J., 1976, pp. 37-48 (paper 5106-PA).
- [10] Z. Chen, *Reservoir Simulation: Mathematical Techniques in Oil Recovery*, SIAM, Calgary, Alberta, 2007.
- [11] W. W. Owens and D. L. Archer, *The effect of rock wettability on oil-water relative permeability relationships*, J. Petroleum Tech. AIME, 1971, pp. 873-878 (paper 3034-PA).
- [12] H. B. Medeiros, D. Marchesin, and P. L. Paes Leme, *Hysteresis in two-phase flow: A simple mathematical model*, Comput. Appl. Math., 17 (1998), pp. 81-99.
- [13] Godunov S.K., *A finite difference method for the numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics*, Mat. Sb., Vol. 47, pp 271–290, 1959.
- [14] Oleinik O.A., *Uniqueness and stability of the generalized solution of the Cauchy problem form a quasilinear equeation*, Uspekhi Mat. Nauk. 14, pp 165–170, 1959. English translation in Amer. Math. Soc. Trans. Ser., No 2, 33, pp. 285-290, 1964.
- [15] LeVeque Randall J., *Numerical Methods for Conservation Laws*, Second Edition, Switzerland, 1992.
- [16] IEEE spectrum: The mysterious memristor, <http://spectrum.ieee.org/semiconductors/design/the-mysterious-memristor>
- [17] IEEE spectrum: How we found the memristor, <http://spectrum.ieee.org/semiconductors/processors/how-we-found-the-missing-memristor>

**SIMULACION DE FLUJO BIFASICO CICLICO EN UN MEDIO POROSO HOMOGENEO**

---

- [18] Kopfová J., *Hysteresis in biological models*, Journal of Physics: Conference Series, Volume 55, Issue 1, pp. 130-134, 2006.
- [19] H. Alicia Kim, James A. Tencate, and Robert A. Guyer, *Hysteretic Elastic Systems*, POMA, Volume 10, pp. 045008, 2010.
- [20] Mayergoz Isaak D., *Mathematical Models of Hysteresis and their Applications: Second Edition (Electromagnetism)*, Academic Press, 2003.
- [21] R. V. Lapshin, *Analytical model for the approximation of hysteresis loop and its application to the scanning tunneling microscope*, Review of Scientific Instruments API USA 66(9), pp 4718–4730, 1995.
- [22] Canese R., *La recuperación de la soberanía hidroeléctrica del Paraguay*, Sexta Edición, 2011.
- [23] Vice Ministerio de Minas y Energía del MOPC, <http://www.ssme.gov.py/>.
- [24] Seminario Internacional Soberanía y Petróleo organizado por el Vice Ministerio de Minas y Energías del MOPC y Petropar, Asunción, 2011.