

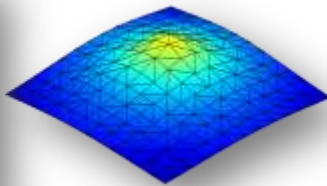


UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA
INGENIERIA ELECTRÓNICA

DESARROLLO DE UNA APLICACIÓN PARALELA EN EL TIEMPO PARA LA SIMULACIÓN Y CONTROL DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES PARABOLICAS

Juan Rodrigo Fleitas Figueredo
Diego Herbin Stalder Diaz

13/12/2010



Orientador
Christian Emilio Schaerer Serra

Contenido

Introducción

- Motivación
- Metodología
- Antecedentes
- Definición del problema
- Objetivos

Problema de Control

- Problema de control Semi-discreto
- Condiciones de Optimalidad
- Método Gradiente Conjugado
- Discretización temporal

Algoritmo Parareal

- Discretización temporal gruesa (Paralelización)
- Condiciones de Optimalidad
- Método Gradiente Conjugado
- Precondicionado

Resultados

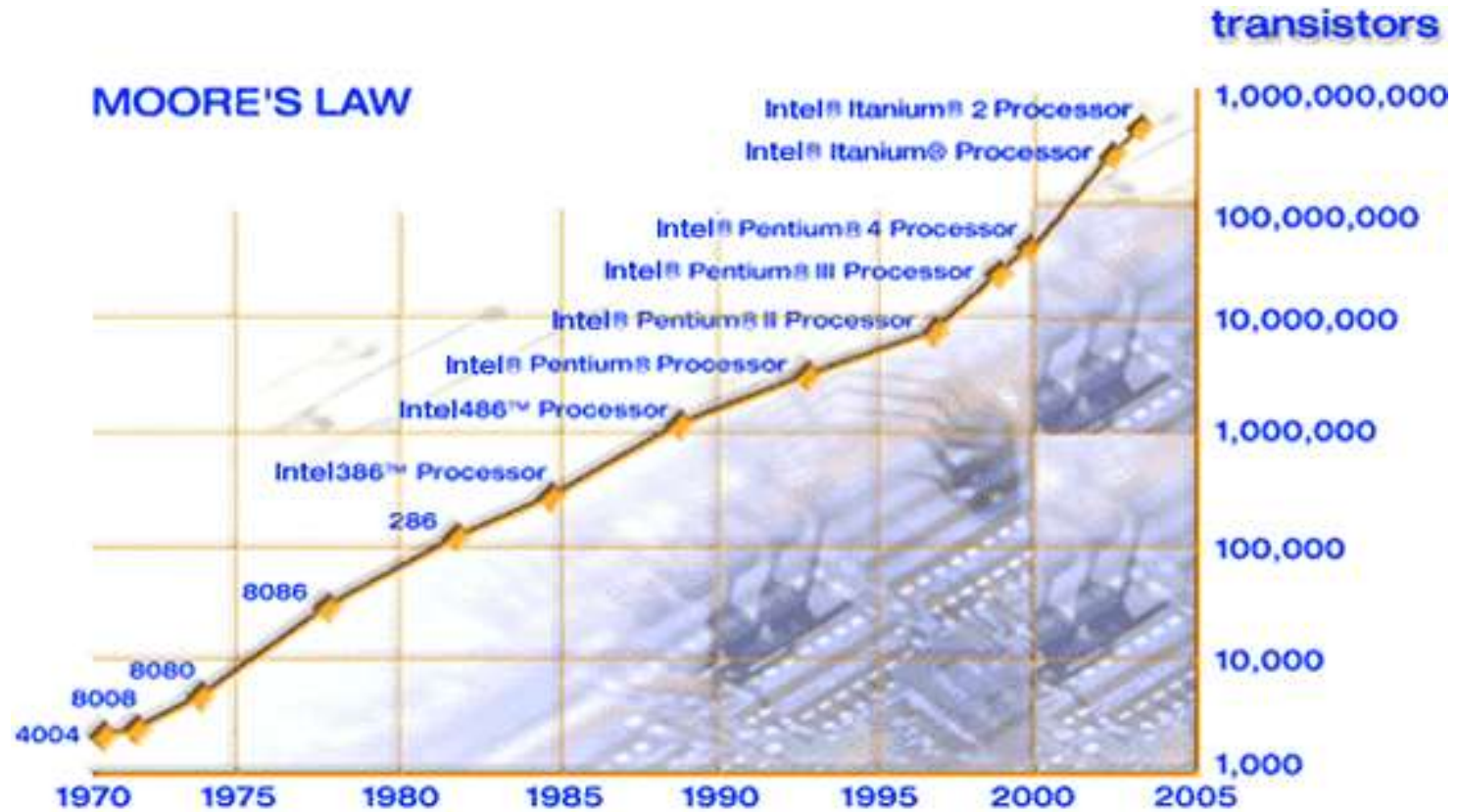
- Gradiente Conjugado
- Gradiente Conjugado Precondicionado

Conclusión



Motivación

Limitaciones físicas y prácticas para incremento de la frecuencia de reloj de los procesadores



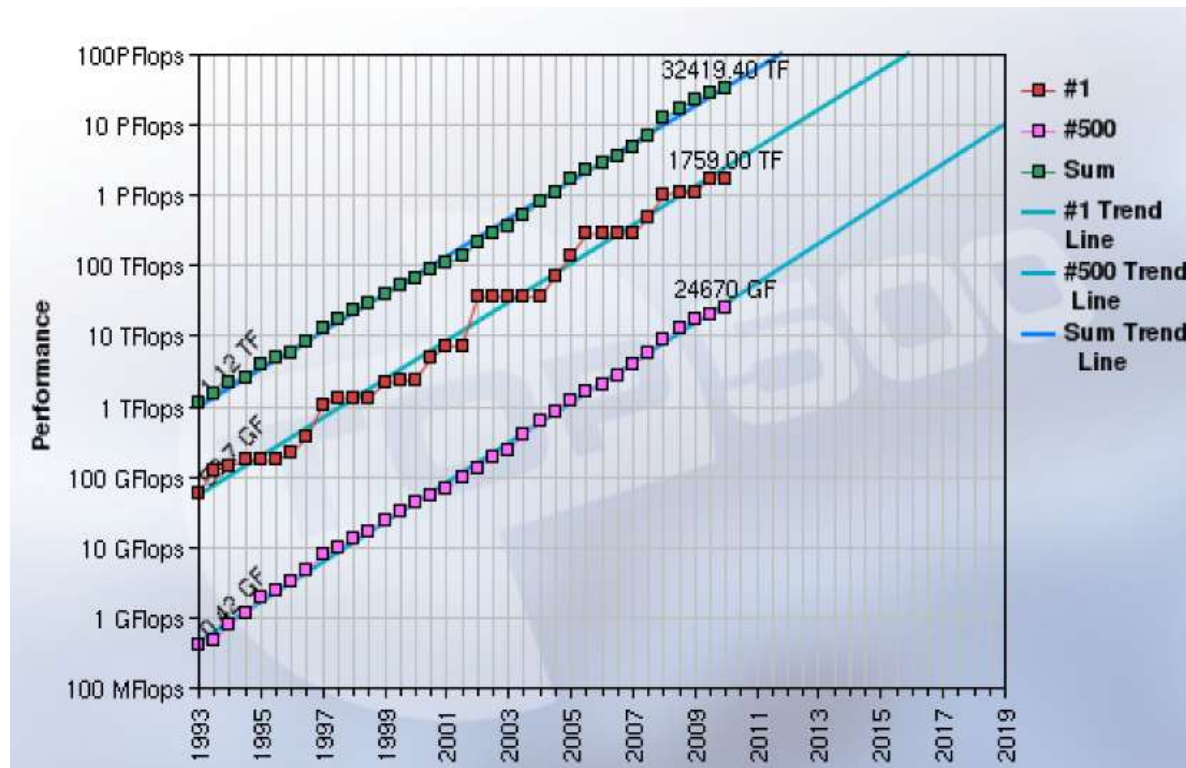
Fuente: <http://www.intel.com>



Motivación

Aumento de la demanda de capacidad de procesamiento

El paradigma de "Prueba y Error", esta siendo reemplazado por el de "Simular y Analizar"



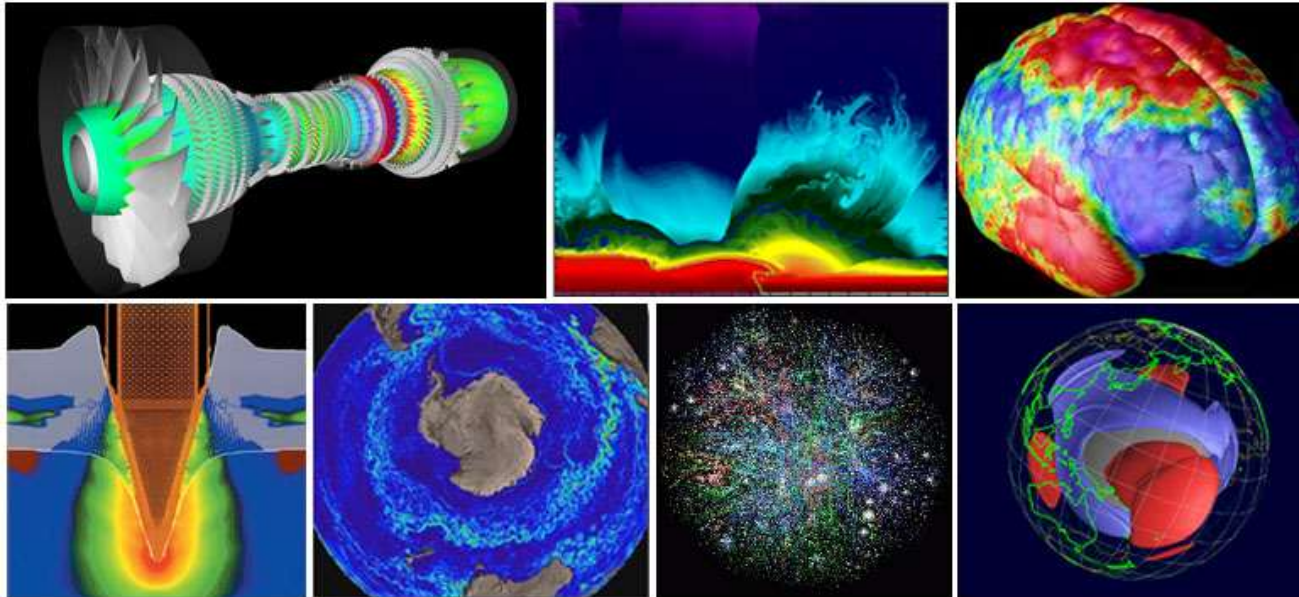
Fuente: http://www.top500.org/lists/2010/06/performance_development

El Laboratorio Nacional de Oak Ridge-USA (Opteron Six Core 2.6 GHz),
224162 Núcleos, 1.75 petaflops



Motivación

Ejemplos de Simulaciones y Cálculos de Gran Escala en las Ciencias y la Ingeniería



Fuente:

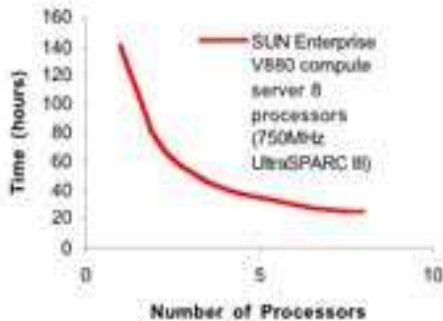
https://computing.llnl.gov/tutorials/parallel_comp/

- ✚ Atmosfera, la Tierra, el Medio Ambiente
- ✚ Biociencias, Biotecnología, Genética
- ✚ Química, Geología, sismología
- ✚ Ingeniería Mecánica
- ✚ Ingeniería Eléctrica, Microelectrónica
- ✚ Imágenes Médicas y Diagnósticos

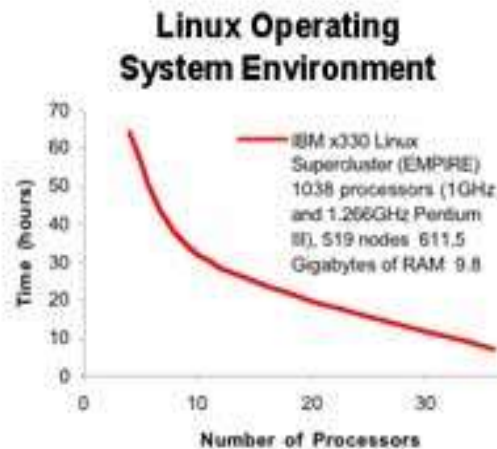


Motivación

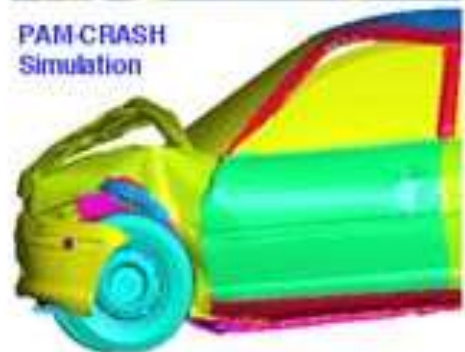
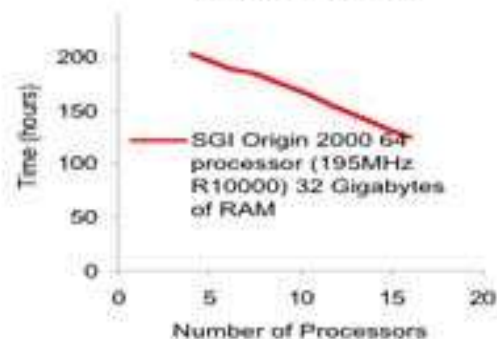
Simulación de Colisión de Automóviles



SUN Operating System Environment



SGI Operating System Environment



Fuente: <http://www.cavs.msstate.edu/projects.php?id=14&rgid=3>



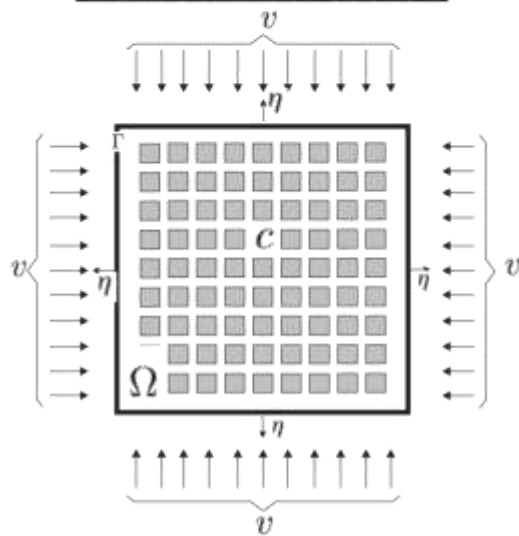
Motivación

Problema con Gran Demanda de Recursos Computacionales

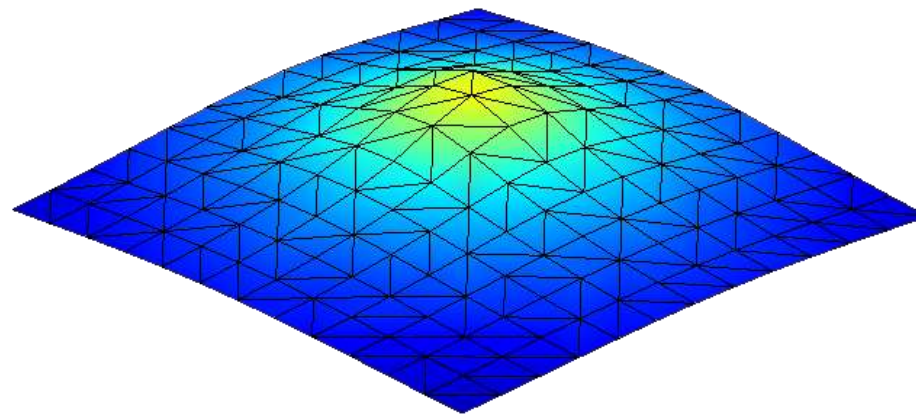


Control óptimo de la temperatura de una placa de circuitos electrónicos, presentado como TFG por Carlos Sauer en 2009

3 x 2600 x 400 = 3120000 ecuaciones.



Modelo Físico

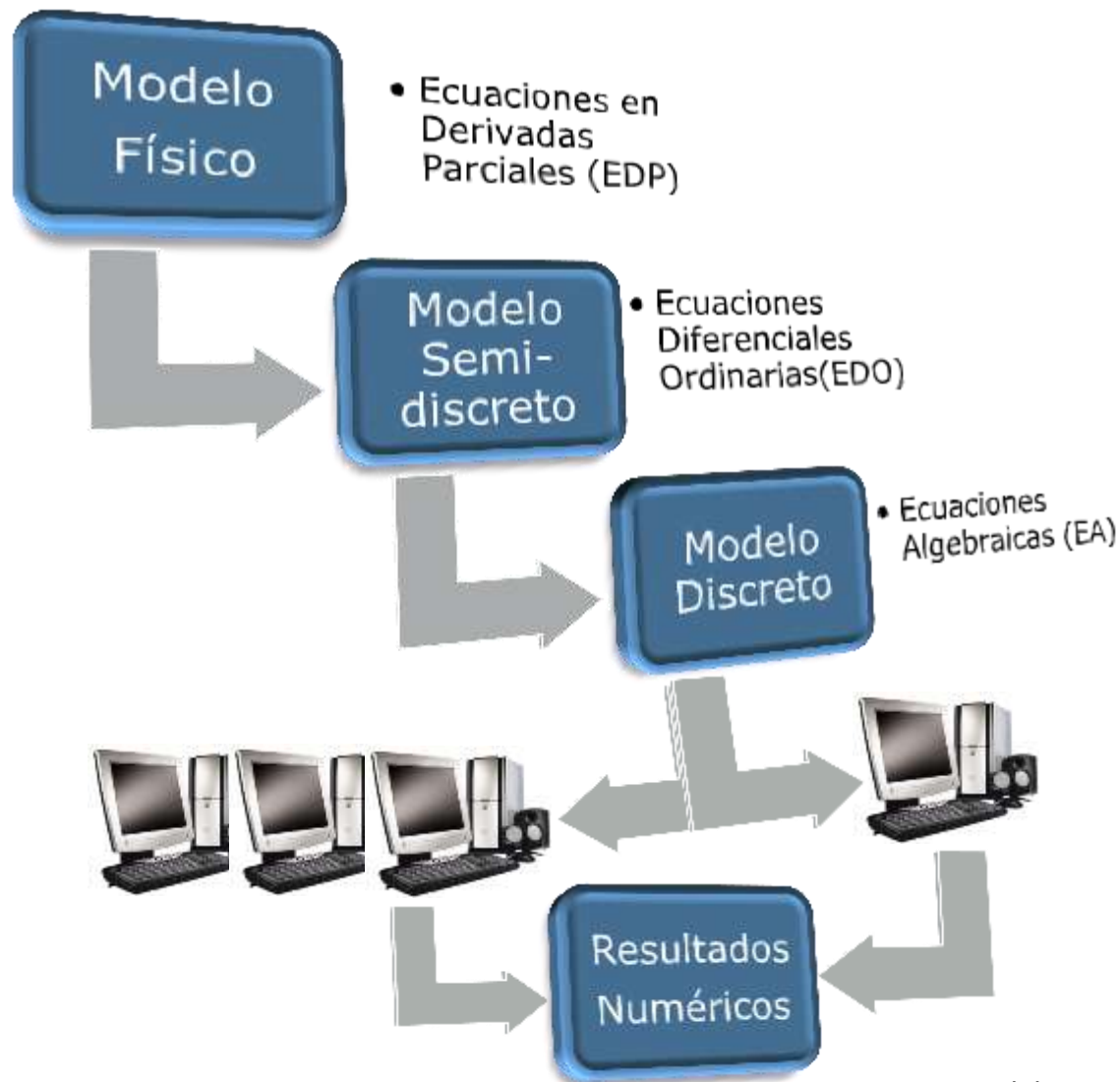


Distribución de Temperatura

Fuente: Elaboración Propia



Metodología



Fuente: Elaboración Propia



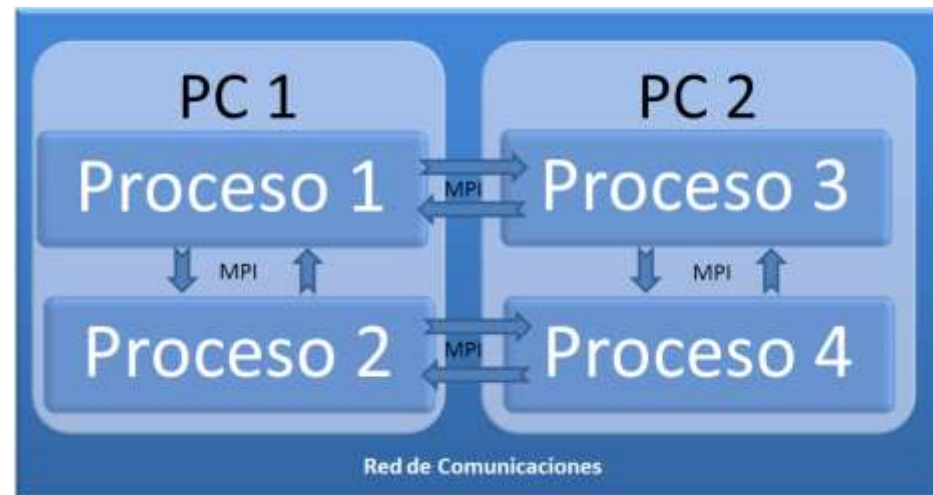
Metodología

Arquitectura Computacional distribuida

- ✚ Memoria Compartida (Shared).
- ✚ Memoria Distribuida (Distributed).
- ✚ Híbrido (Shared/Distributed).

Modelos de Programación

- ✚ Memoria compartida.
- ✚ Datos paralelos.
- ✚ Pasos de mensajes.
- ✚ Híbridos.



Funcionamiento del MPI

Fuente: Elaboración Propia



Antecedentes

- 2002** Maday, Turinici; A parareal in time procedure for the control of partial differential equations. Numerical Analysis.
- 2007** Schaerer, Mathew, Sarkis; Block iterative algorithms for the solution of parabolic optimal control problems.
- 2009** Carlos Sauer; TFG: Circuitos Electrónicos 2D: Simulación, Control y Refrigeración.
- 2010** Carlos Galeano, Mauricio Poletti; TFG: Simulación 3D del Transitorio Térmico de Circuitos Electrónicos y Control no Lineal de Temperatura por medio de Métodos Variacionales.



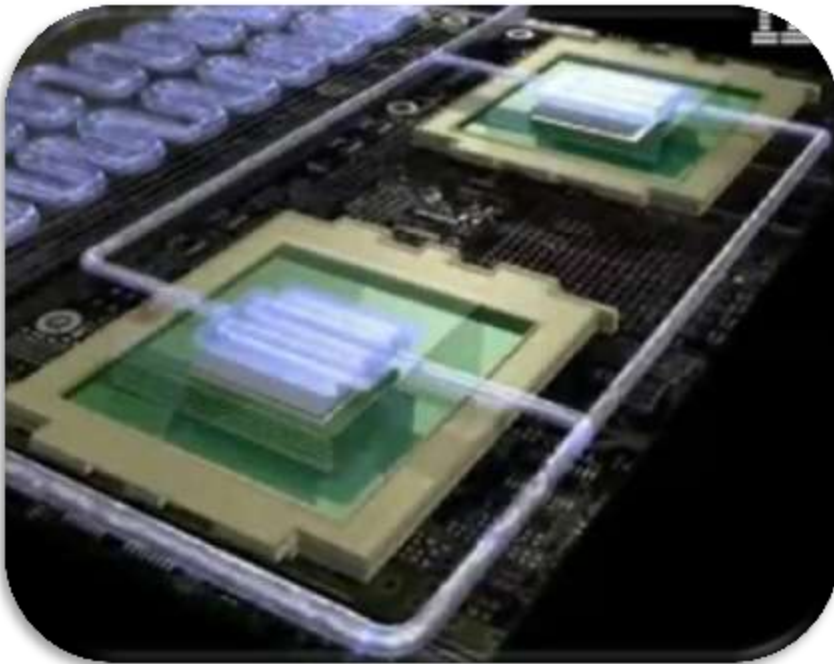
Definición del problema



Fuente: new.cnet.com



Fuente: www.visulalightbox.com



Fuente: www.ibm.com



Fuente: www.asus.com

El Cobre disipa 372,1-385,2 W/(K.m)
y el Aluminio 209,3 W/(K.m).



Definición del problema

Fuente: Elaboración propia.

Ley de Fourier

$$\vec{q} = -\lambda \nabla z$$

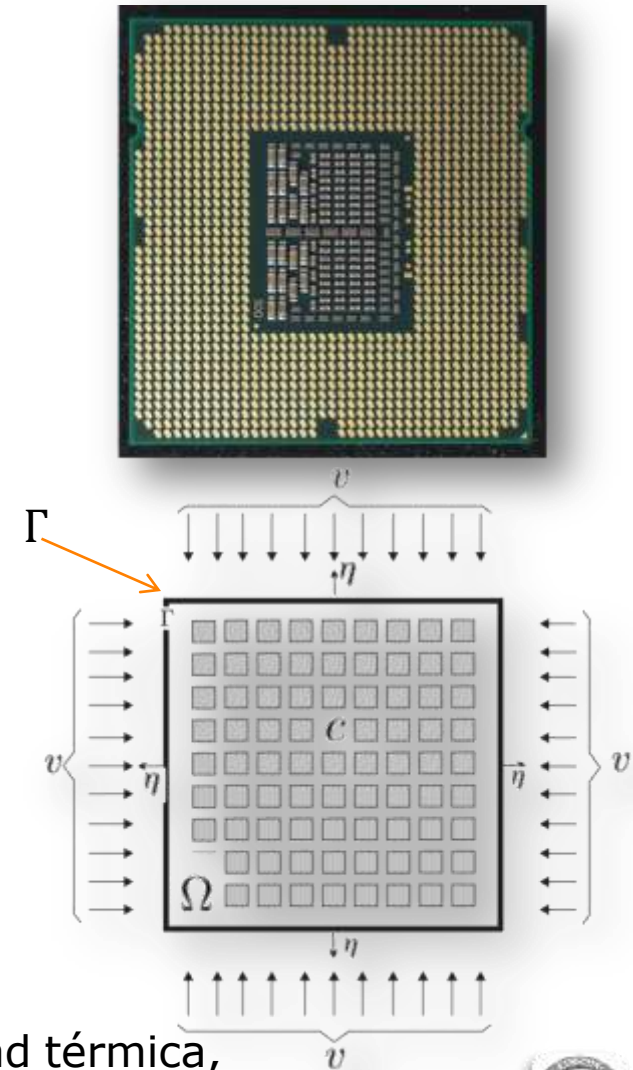
Conservación de la energía

$$\int_{\Omega} \rho c_p \frac{dz}{dt} dt = \int_{\partial\Omega} \vec{q} \cdot d\vec{\Gamma} + \int_{\Omega} c d\Omega$$

Condiciones de frontera

$$\frac{\partial z}{\partial \eta} = v \text{ en } \Gamma$$

ρ =densidad, c_p =calor específico, λ =conductividad térmica,
 c = flujo de calor generado por los transistores, z =temperatura.



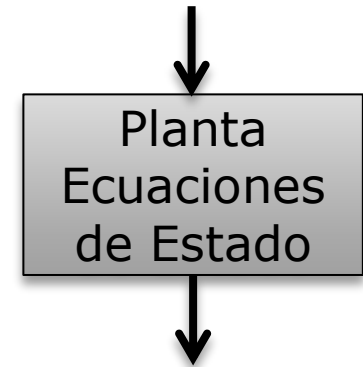
Definición del problema

Modelo Físico (de planta)

$$\begin{cases} \rho c_p \frac{dz}{dt} = \lambda \Delta z + c, \text{ en } \Omega \times [t_o, t_f], \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} = v, \text{ en } \Gamma \times [t_o, t_f], \\ z(t_o, \Omega) = z_o. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{z} = A(v, c) \\ z(t_o, \Omega) = z_o. \end{cases}$$

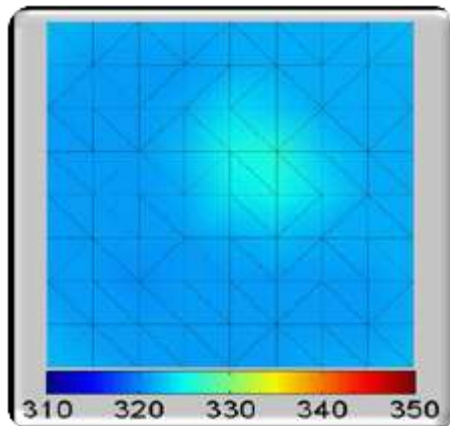
donde Δ es el operador laplaciano

v, z_o, c (entradas)

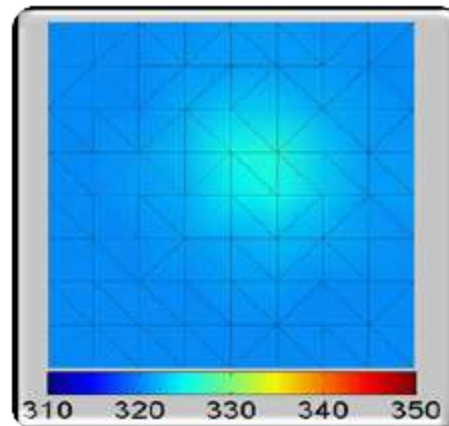


Z (temperatura)

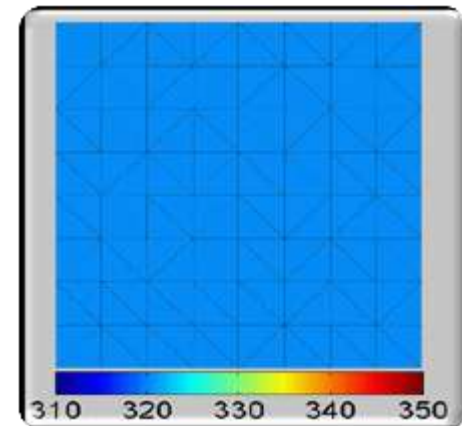
Flujo entrante $v=100\text{W/m}$



Malla abierta $v=0$

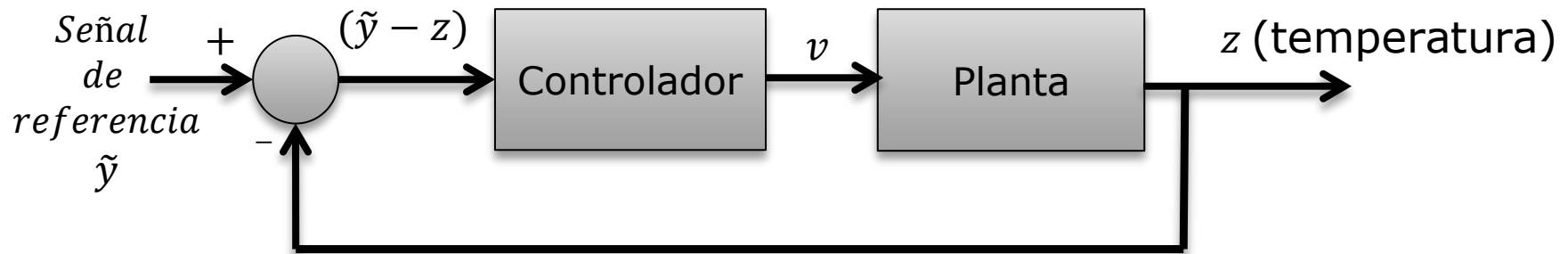


Flujo Saliente $v=-100\text{W/m}$



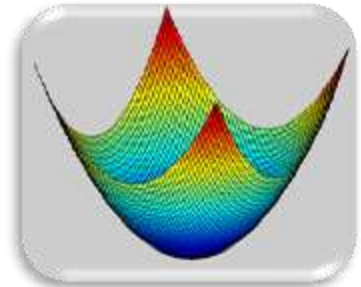
Definición del problema

Problema de control



Fuente: Elaboración propia.

Funcional de costo



$$J(z, v) = \frac{1}{2} \mathbf{r} \|v\|_{L^2(\Gamma \times [t_o, t_f])}^2 + \frac{1}{2} \mathbf{q} \|z - \tilde{y}\|_{L^2(\Omega \times [t_o, t_f])}^2 + \frac{1}{2} \mathbf{s} \|z(t_f) - \tilde{y}\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Costo = Gasto de energía en el control + Error + Error(t_f)



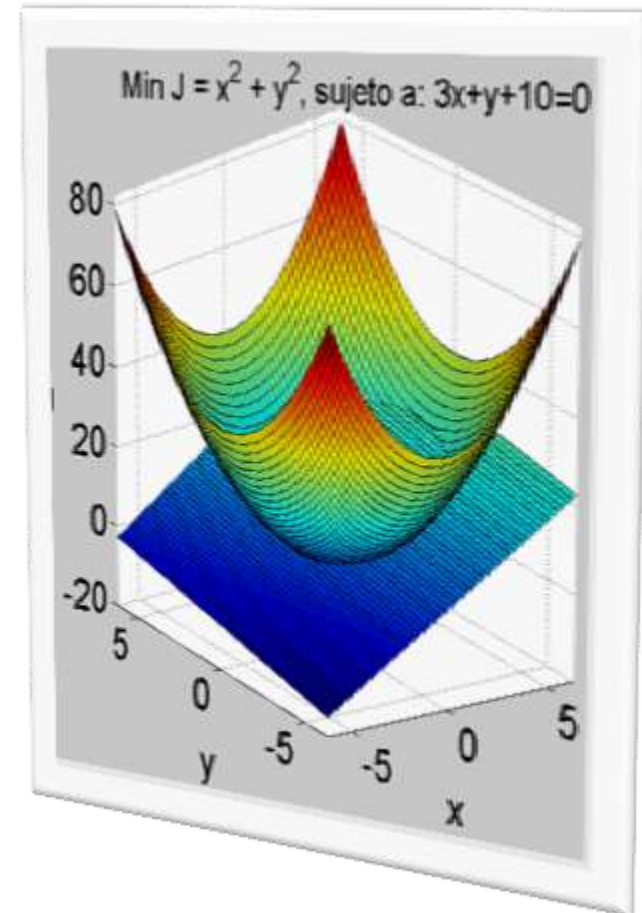
Definición del problema

Problema de control óptimo

Minimizar $J(z, v)$

$$\text{sujeto a: } \begin{cases} \dot{z} = A(v, c) \\ z(t_o, \Omega) = z_o. \end{cases}$$

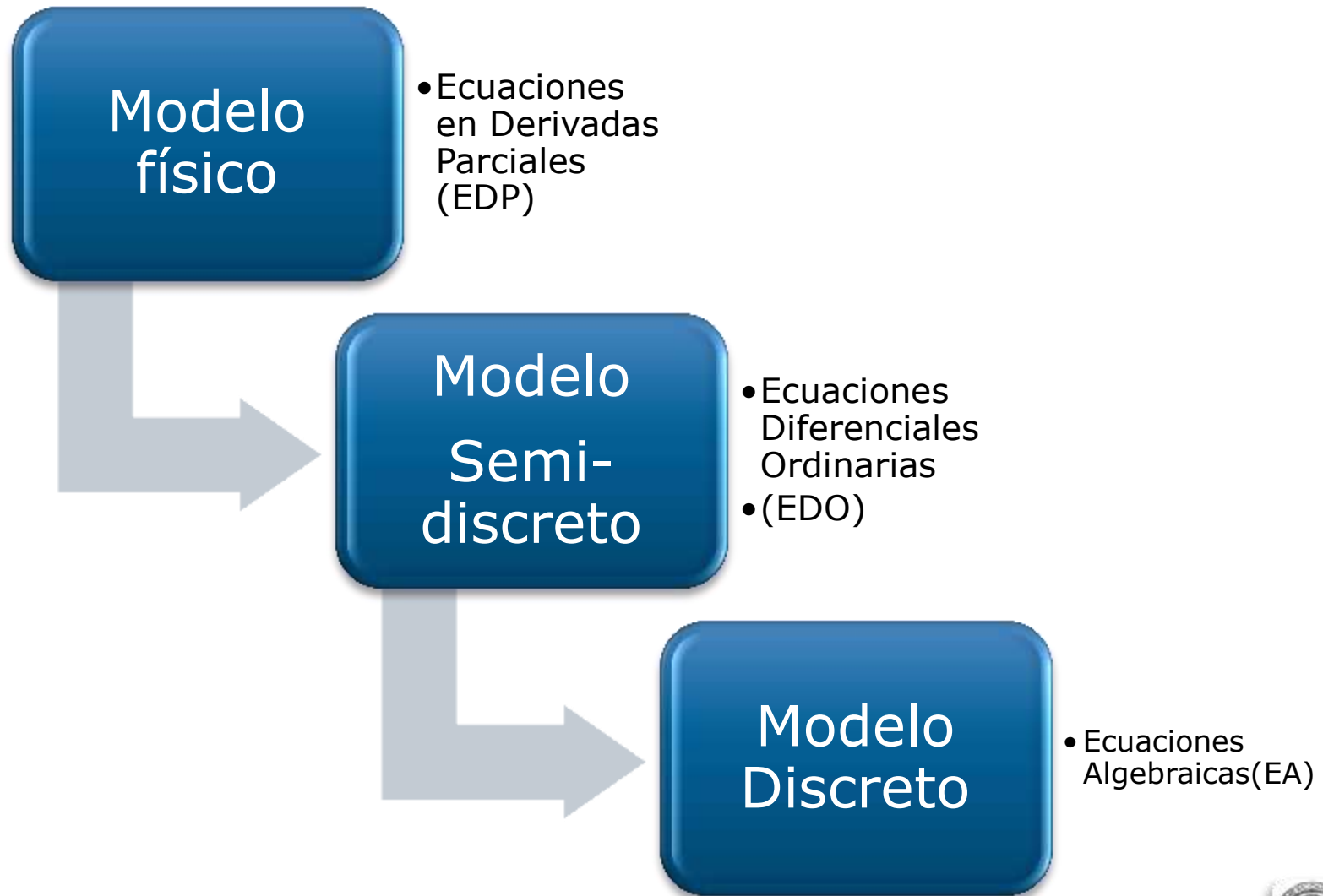
$$\forall z \in \Omega \times [t_o, t_f]$$



Fuente: Elaboración propia.



Definición del problema



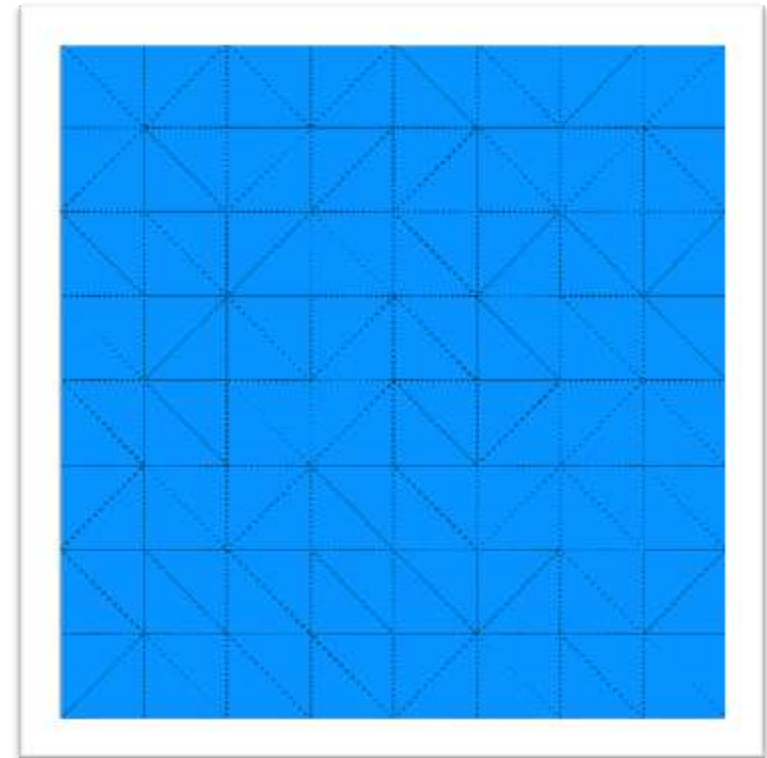
Definición del problema

Discretización espacial

$$z(t, \Omega) \approx \sum_{k=1}^{\hat{q}} z_k(t) \eta_k(\Omega)$$

$$v(t, \Gamma) \approx \sum_{k=1}^{\hat{p}} z_k(t) \varphi_k(\Omega)$$

Método de Galerkin



Malla estructurada 9x9, $\hat{q}=81$
Elementos, $\hat{p}=32$ Elementos
sobre la frontera.

Fuente: Elaboración propia.



Definición del problema

Modelo Semi-discreto

$$\text{Minimizar } \mathcal{J}_h(\underline{z}, \underline{v}) = \frac{1}{2} \mathbf{r} \|\underline{v}\|_{R_h \times [t_o, t_f]}^2 + \frac{1}{2} \mathbf{q} \|\underline{z} - \tilde{\mathbf{y}}\|_{M_h \times [t_o, t_f]}^2 + \frac{1}{2} \mathbf{s} \|\underline{z}(t_f) - \tilde{\mathbf{y}}\|_{M_h}^2,$$

$$\text{sujeto a: } \begin{cases} M_h \dot{\underline{z}} = A_h \underline{z} + B_h \underline{v} + c_h, \text{ en } [t_o, t_f], \\ \underline{z}(t_o) = \underline{z}_o^h, \end{cases} \quad \begin{array}{l} \hat{q} \text{ elementos de dominio espacial} \\ \hat{p} \text{ elementos sobre la frontera} \end{array}$$

$$\text{donde } M_h, A_h \in \mathbb{R}^{\hat{q} \times \hat{q}}, R_h \in \mathbb{R}^{\hat{p} \times \hat{p}}, B_h \in \mathbb{R}^{\hat{q} \times \hat{p}}, c_h \in \mathbb{R}^{\hat{q}}$$



$$\text{Minimizar } \mathcal{J}_h(\underline{z}, \underline{v})$$

$$\text{sujeto a: } \begin{cases} \dot{\underline{z}} = \mathcal{A}_h(\underline{v}, c_h), \\ \underline{z}(t_o) = \underline{z}_o^h, \end{cases}$$



Definición del problema

Disminución del Costo computacional.

División el dominio temporal.

Resolución del problema en forma paralela

Velocidad de convergencia



Objetivos

Objetivo General

Desarrollar una aplicación, paralela en el tiempo que permita la simulación y control de ecuaciones diferenciales parciales parabólicas.

Objetivos Específicos

- Formular el problema de control óptimo para la ecuación de conducción de calor.
- Discretizar el dominio espacial mediante el método de Galerkin.
- Discretizar el dominio temporal utilizando la formulación variacional propuesta por J. L. Lions.
- Desarrollar un algoritmo que permita resolver el sistema de ecuaciones resultante en forma paralela.
- Implementar el algoritmo.



Contenido

Introducción

- Motivación
- Metodología
- Antecedentes
- Definición del problema
- Objetivos

Problema de Control

- Problema de control Semi-discreto
- Condiciones de Optimalidad
- Método Gradiente Conjugado
- Discretización temporal

Algoritmo Parareal

- Discretización temporal gruesa (Paralelización)
- Condiciones de Optimalidad
- Método Gradiente Conjugado
- Precondicionado

Resultados

- Gradiente Conjugado
- Gradiente Conjugado Precondicionado

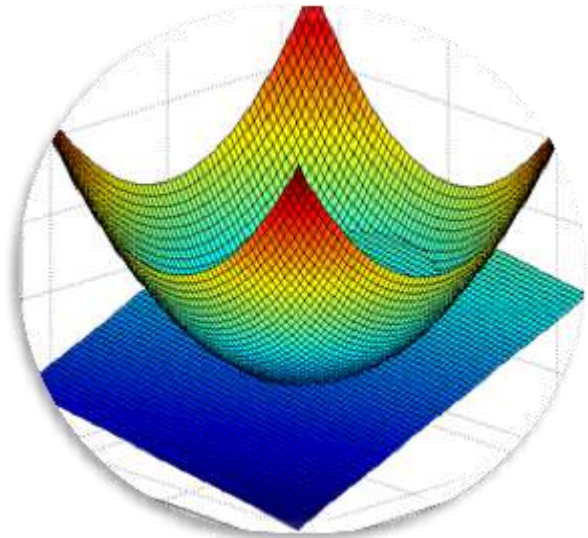
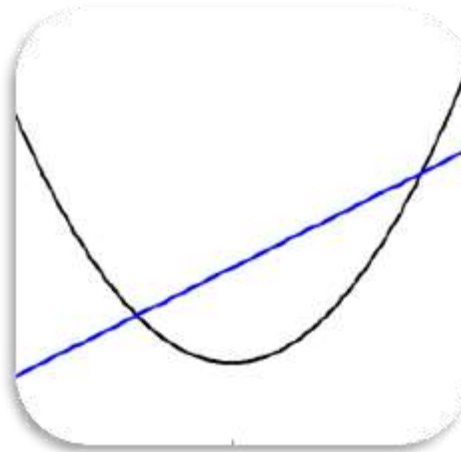
Conclusión



Problema de control Semi-discreto

Minimizar $\mathcal{J}_h(\underline{z}, \underline{v})$

sujeto a: $\begin{cases} \dot{\underline{z}} = \mathcal{A}_h(\underline{v}, c_h), \\ \underline{z}(t_o) = z_o^h, \end{cases}$



Fuente: Elaboración propia.

Lagrangiano

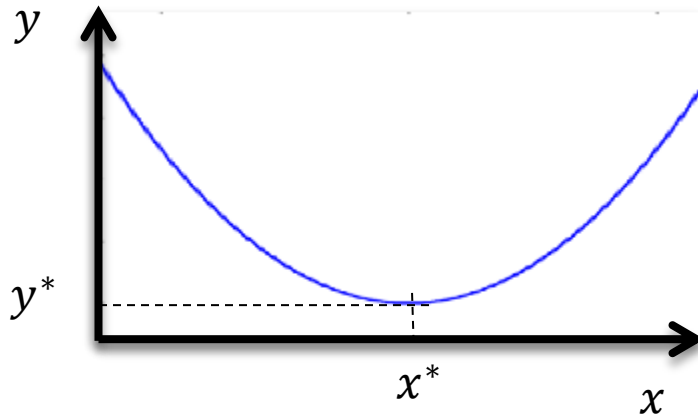
Minimizar $\mathcal{L}_h(\underline{z}, \underline{v}, \underline{p}, \underline{\eta}) = \mathcal{J}_h(\underline{z}, \underline{v}) + \left(\underline{p}, \dot{\underline{z}} - \mathcal{A}_h(z_o^h, \underline{v}, c_h) \right) + (\underline{\eta}, \underline{z}(t_o) - z_o^h),$

donde $\underline{p}$ y $\underline{\eta}$ son los conocidos multiplicadores de Lagrange.



Condiciones de optimalidad

Cálculo Básico



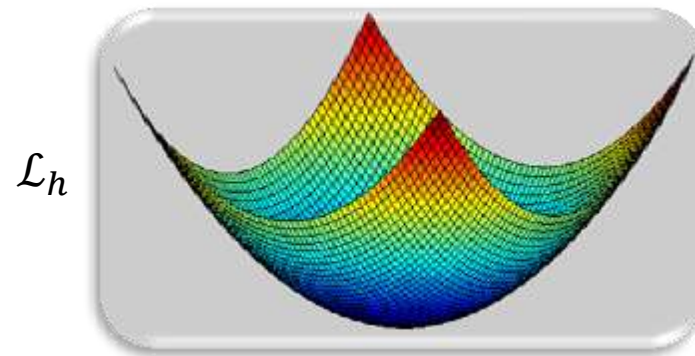
Condición de
1º orden

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x^*} = 0$$

Condición de
2º orden

$$\frac{d^2y}{dx^2} > 0$$

Análisis funcional



$$\nabla \mathcal{L}_h \Big|_{\underline{v}^*, \underline{z}^*} = 0$$

$$\nabla^2 \mathcal{L}_h = H > 0$$

$$\nabla \mathcal{L}_h = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{L}_h}{\partial \underline{p}} & \frac{\partial \mathcal{L}_h}{\partial \eta} & \frac{\partial \mathcal{L}_h}{\partial \underline{z}} & \frac{\partial \mathcal{L}_h}{\partial \underline{v}} \end{bmatrix}$$



Condiciones de optimalidad

Ecuaciones de estado

$$\frac{\partial \mathcal{L}_h}{\partial \underline{p}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} M_h \dot{\underline{z}} = A_h \underline{z} + B_h \underline{v} + c_h, \\ \frac{\partial \mathcal{L}_h}{\partial \eta} = 0 \Rightarrow \underline{z}(t_o) = z_o^h, \end{cases}$$

Ecuaciones de estado adjunto

$$\frac{\partial \mathcal{L}_h}{\partial \underline{z}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} M_h^T \dot{\underline{p}} = -A_h^T \underline{p} + q M_h^T (\underline{z} - \tilde{y}), \\ \underline{p}(t_f) = -s(\underline{z}(t_f) - \tilde{y}), \end{cases}$$

Condición de Euler

$$\frac{\partial \mathcal{L}_h}{\partial \underline{v}} = 0 \Rightarrow R_h \underline{v} - B_h^T \underline{p} = 0$$



Método Gradiente Conjugado

Problema de optimización

$$Hx^* = b \quad x, x^* \in \mathbb{R}^n$$

H es simétrica, y definida positiva

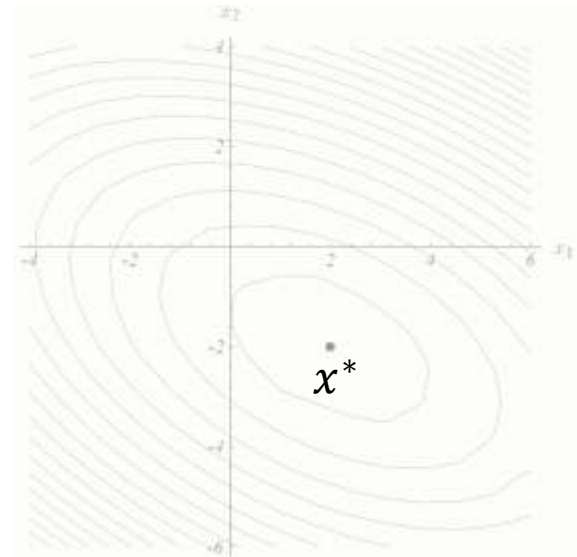
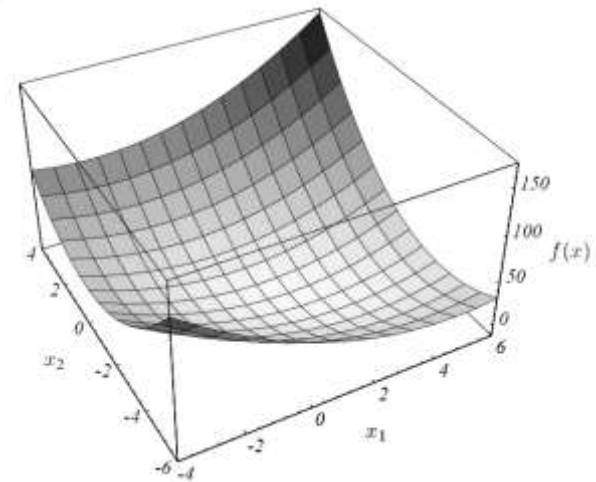
$$\begin{aligned} \text{Minimizar } f(x) &= \frac{1}{2} (x - x^*)^T H (x - x^*) \\ &= \frac{1}{2} x^T H x - b x^T. \end{aligned}$$

Condición de
1º orden

$$\nabla f(x) \Big|_{x^*} = Hx - b = 0.$$

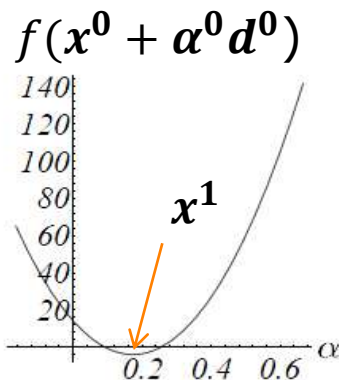
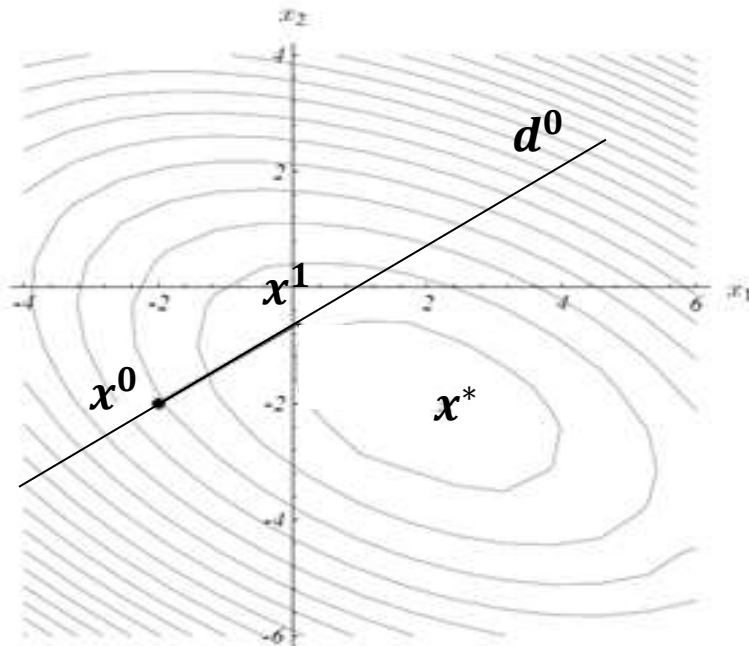
Condición de
2º orden

$$\nabla^2 f(x) = H > 0.$$



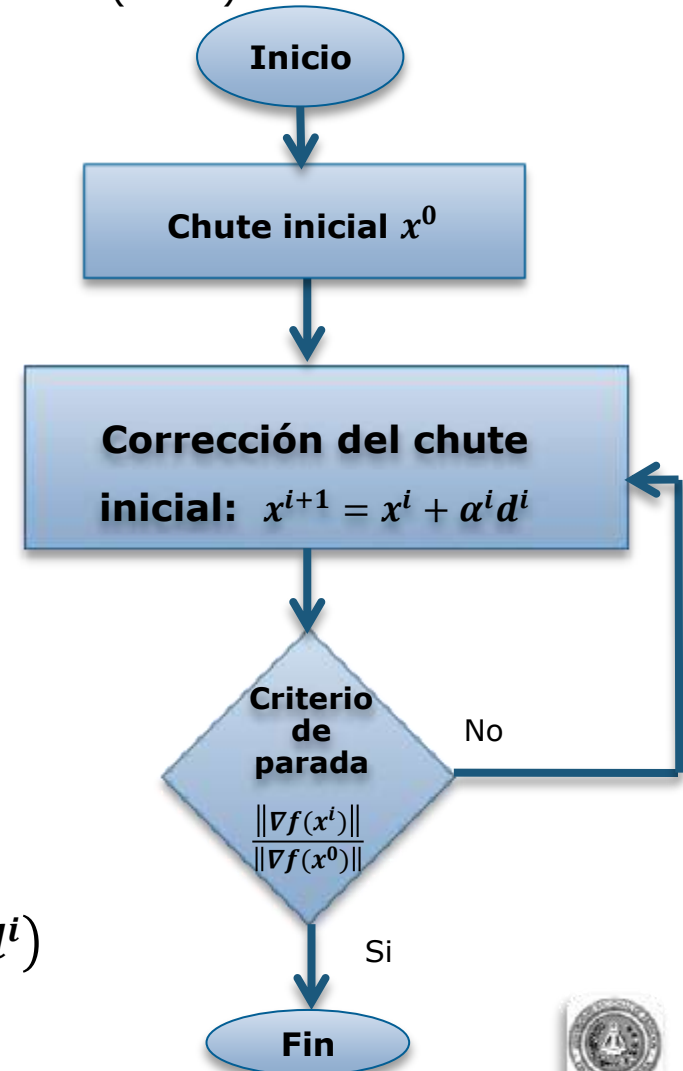
Método Gradiente Conjugado

Método de Máximo descenso Debye, Peter (1909)



$$d^i = -\nabla f(x^i)$$

$$\alpha^i = \min f(x^i + \alpha^i d^i)$$

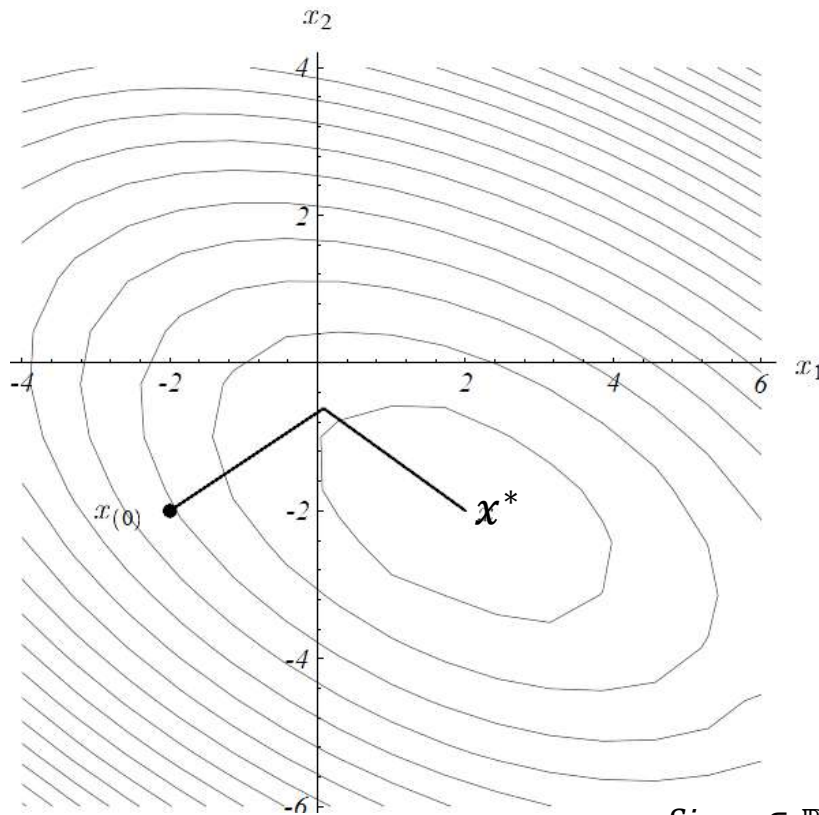


Método Gradiente Conjugado

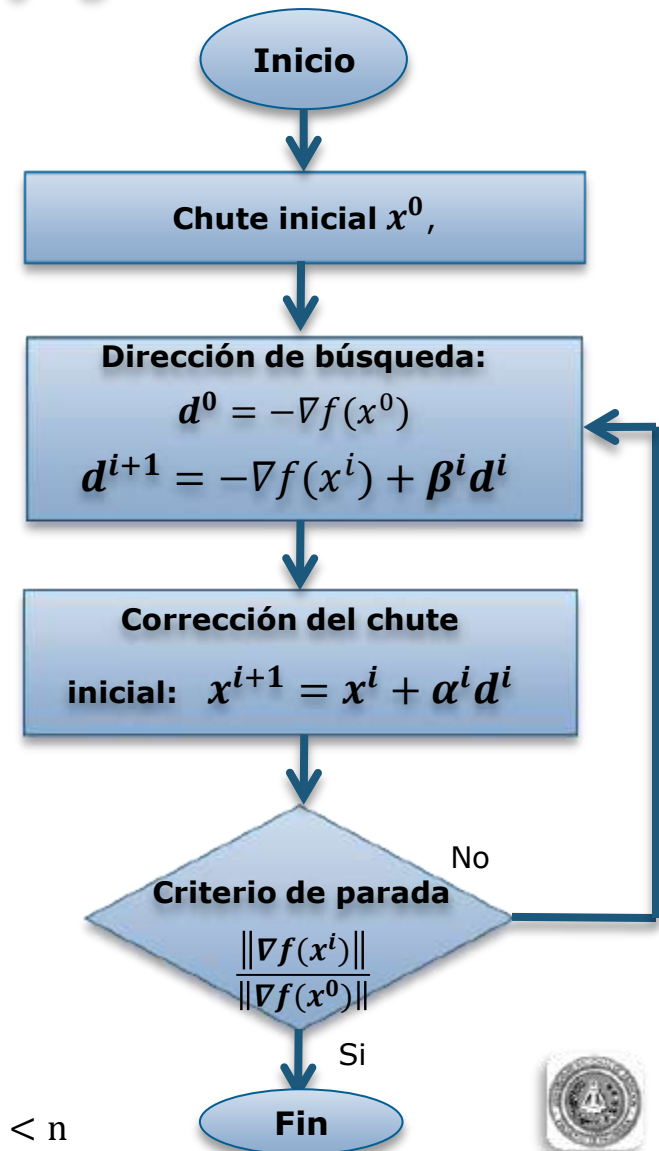
Método Gradiente Conjugado

Hestenes, M. R.; Stiefel, E. (Diciembre 1952)

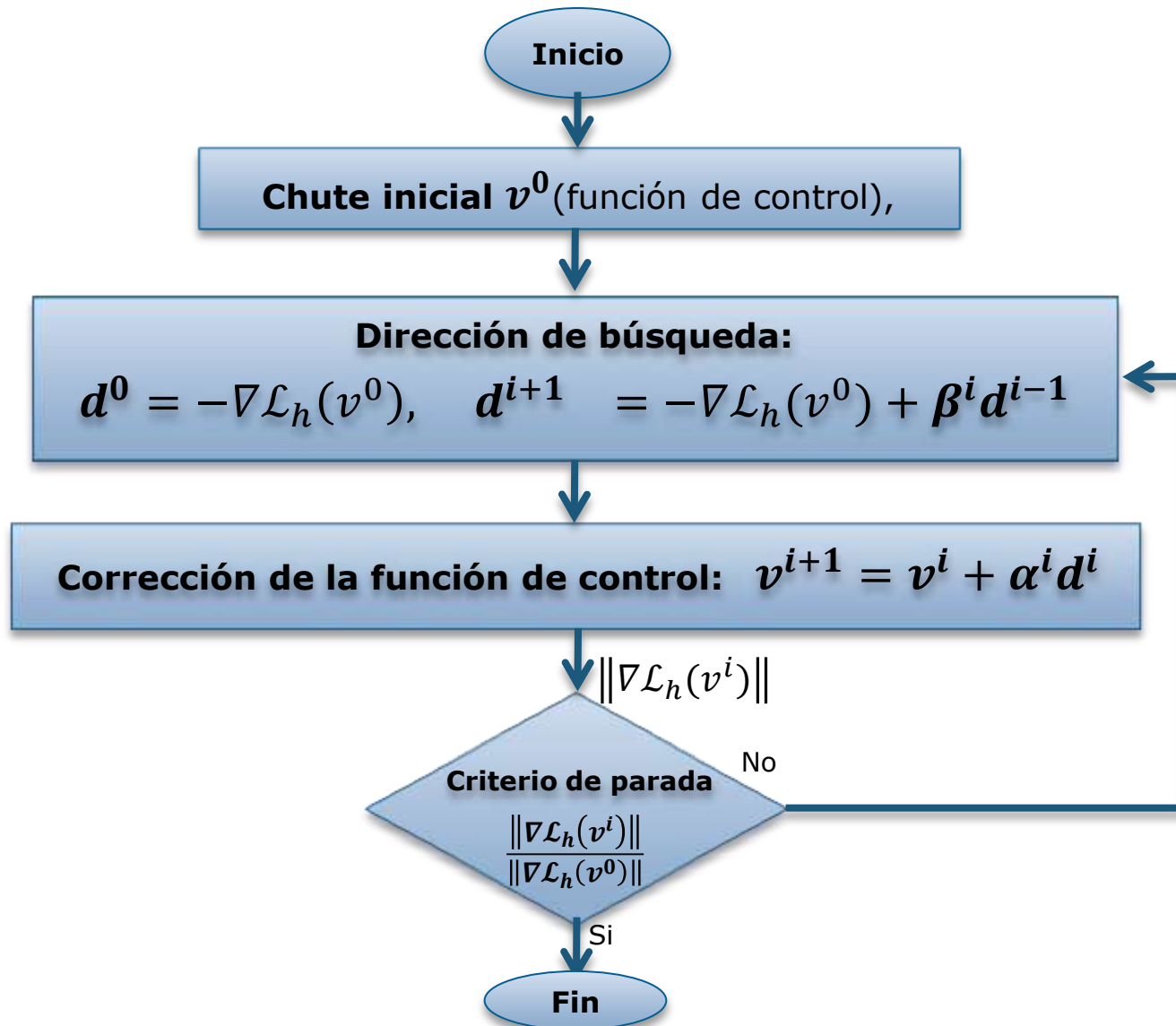
$$\text{Conjugadas} \equiv d^{jT} H d^i = 0, \quad \forall j \neq i \quad \beta^i = \frac{\nabla f(x^i)^T H d^i}{d^{iT} H d^i}$$



Si $x \in \mathbb{R}^n$ converge en $i < n$



Método Gradiente Conjugado



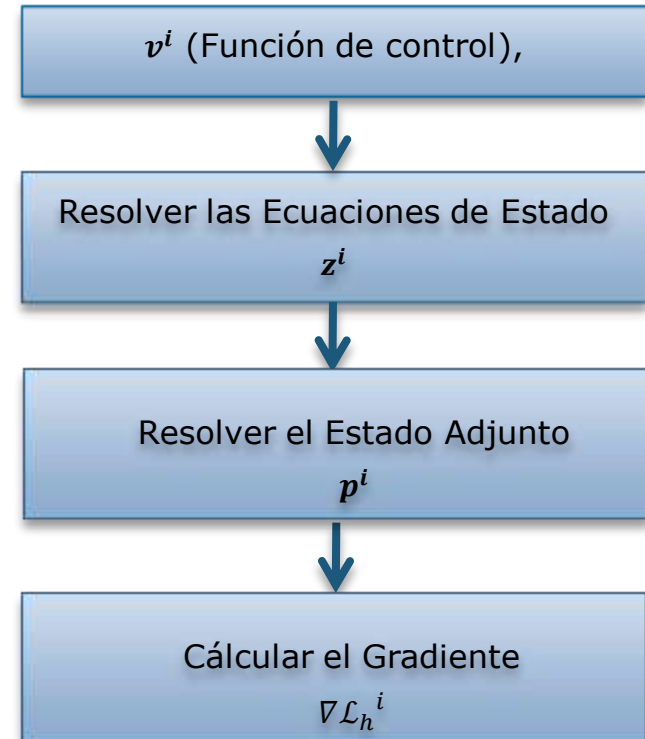
Método Gradiente Conjugado

Gradiente del Lagrangiano

$$\nabla \mathcal{L}_h = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial \mathcal{L}_h}{\partial \underline{p}} \\ \frac{\partial \mathcal{L}_h}{\partial \underline{\eta}} \\ \frac{\partial \mathcal{L}_h}{\partial \underline{z}} \\ \frac{\partial \mathcal{L}_h}{\partial \underline{v}} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuaciones de Estado} \\ \text{Ecuaciones de Estado Adjunto} \\ \text{Condición de Euler} \end{array} \right.$$

$$\nabla \mathcal{L}_h = R_h \underline{v} - B_h^T \underline{p} = \nabla \mathcal{J}_h$$

$\mathcal{J}_h$ es simétrico, cuadrático y definido positivo

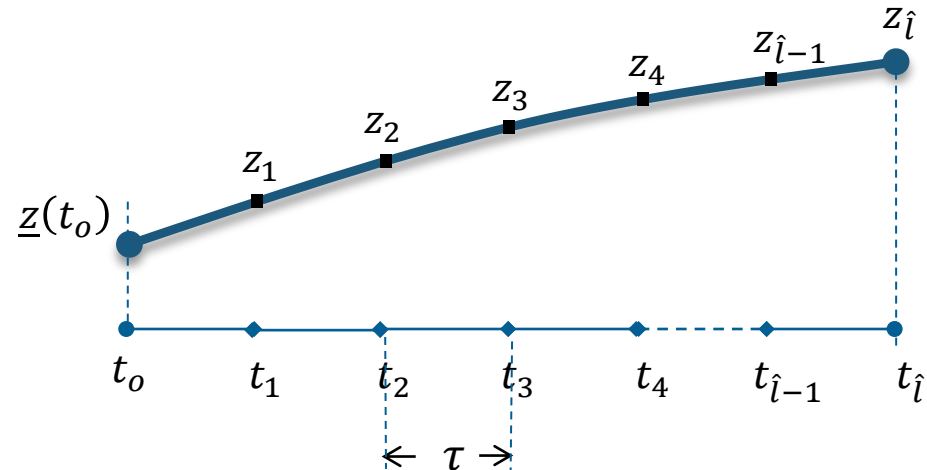


Discretización temporal

Ecuaciones de estado

$$\begin{cases} M_h \dot{\underline{z}} = A_h \underline{z} + B_h \underline{v} + c_h, \\ \underline{z}(t_o) = \underline{z}_o^h, \end{cases}$$

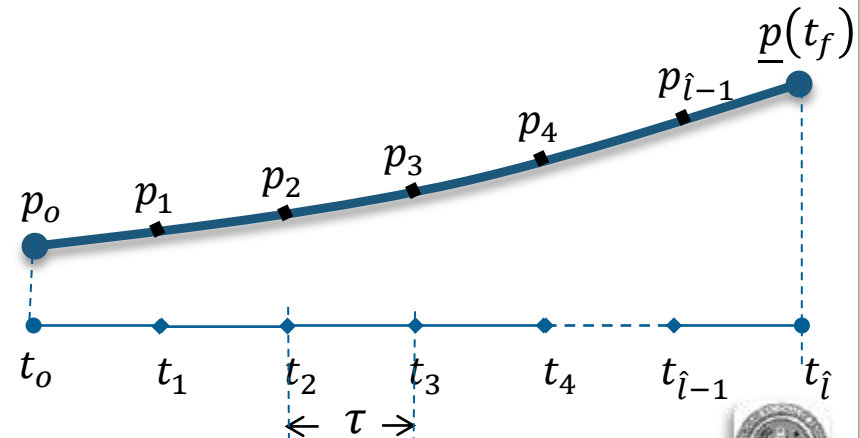
$$\dot{\underline{z}}_{l+1} \approx \frac{z_{l+1} - z_l}{\tau} \quad \text{Backward Euler}$$



Ecuaciones de estado adjunto

$$\begin{cases} M_h^T \dot{\underline{p}} = -A_h^T \underline{p} + q M_h^T (\underline{z} - \tilde{y}), \\ \underline{p}(t_f) = -s(\underline{z}(t_f) - \tilde{y}), \end{cases}$$

$$\dot{\underline{p}}_l \approx \frac{p_{l+1} - p_l}{\tau} \quad \text{Forward Euler}$$



Contenido

Introducción

- Motivación
- Metodología
- Antecedentes
- Definición del problema
- Objetivos

Problema de Control

- Problema de control Semi-discreto
- Condiciones de Optimalidad
- Método Gradiente Conjugado
- Discretización temporal

Algoritmo Parareal

- Discretización temporal gruesa (Paralelización)
- Condiciones de Optimalidad
- Método Gradiente Conjugado
- Precondicionado

Resultados

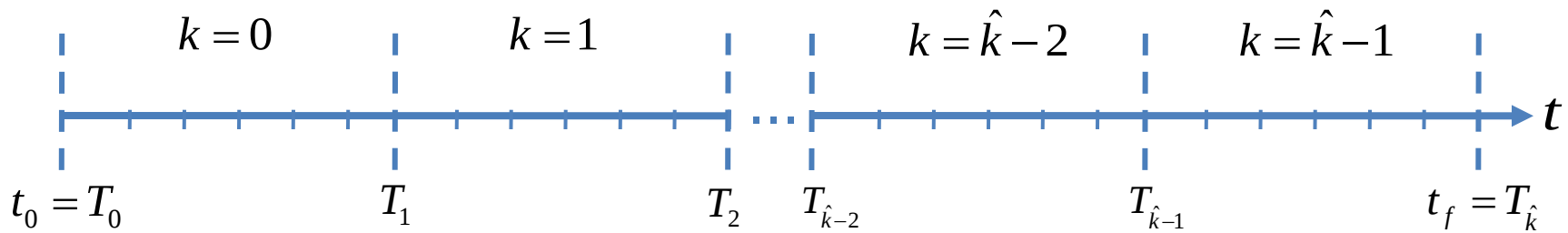
- Gradiente Conjugado
- Gradiente Conjugado Precondicionado

Conclusión



Paralelización

Discretización Temporal Gruesa



Fuente: Elaboración Propia

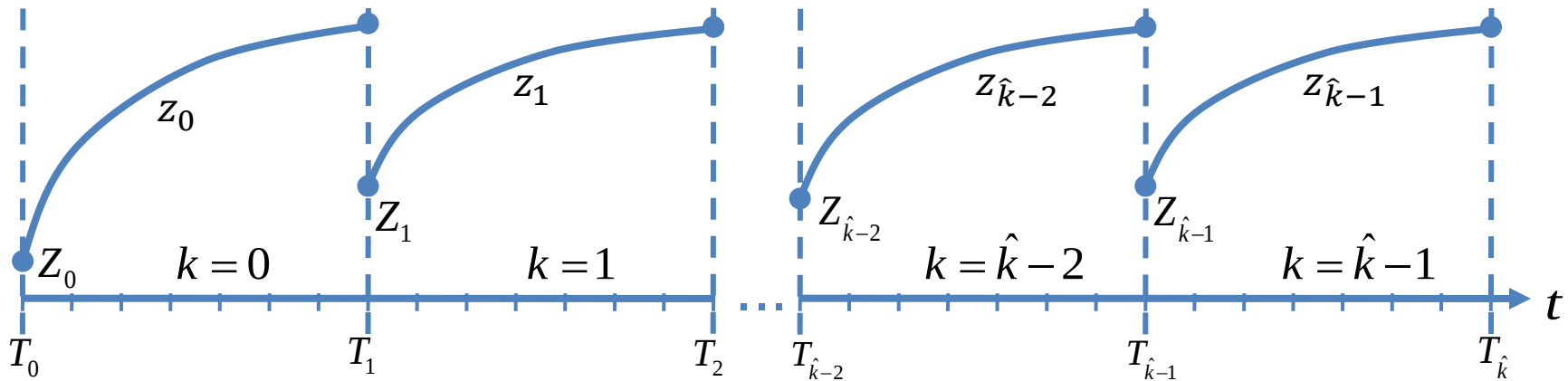
$$t_0 = T_0 < T_1 < \dots < T_k = k\Delta T < T_{k+1} < \dots < T_{\hat{k}}$$

$$\Delta T = \frac{t_f - t_0}{\hat{k}}$$



Paralelización

Discretización Temporal Gruesa



Fuente: Elaboración Propia

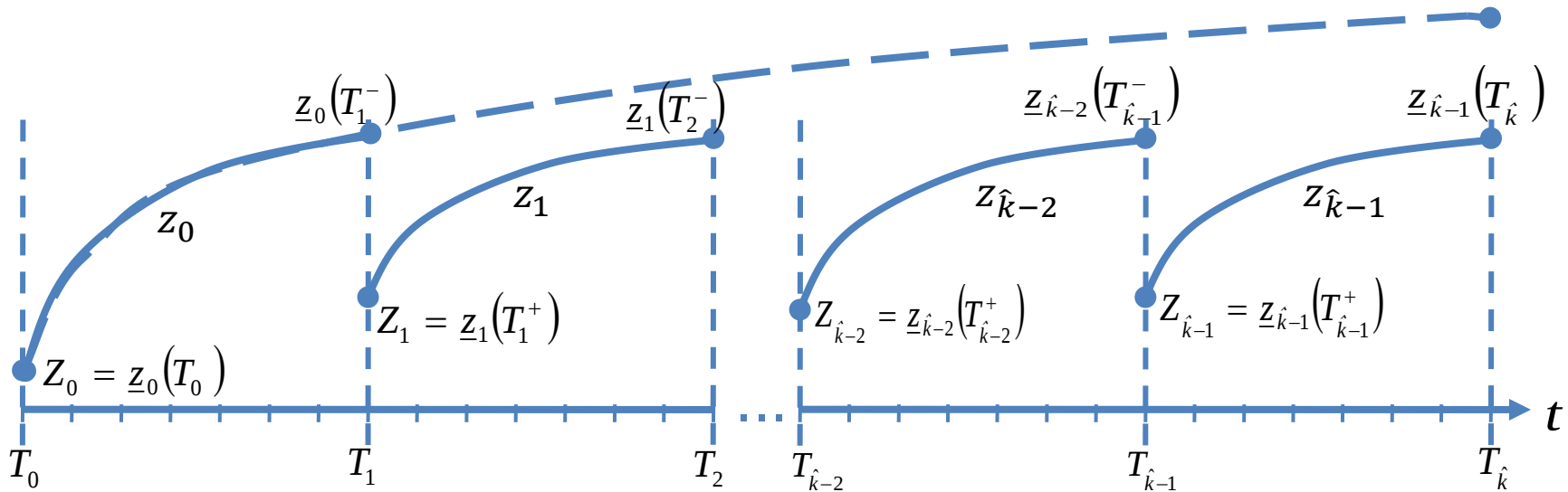
$$\dot{\underline{z}}_k(t) = \mathcal{A}_h(\underline{z}_k, \underline{v}_k, c_h) \quad t \in [T_k, T_{k+1}]$$

$$\underline{Z}_k = \underline{z}_k(T_k^+) \quad \forall k = 0, 1, \dots, \hat{k} - 1$$



Paralelización

Discretización Temporal Gruesa



Fuente: Elaboración Propia

$$\dot{\underline{z}}_k(t) = \mathcal{A}_h(\underline{z}_k, \underline{v}_k, c_h) \quad t \in [T_k, T_{k+1}]$$

$$Z_k = \underline{z}_k(T_k^+) \quad \forall k = 0, 1, \dots, \hat{k} - 1$$

Restricción Adicional

$$\underline{z}_{k-1}(T_k^-) = Z_k \quad \forall k = 1, 2, \dots, \hat{k} - 1$$



Paralelización

Problema de Control Óptimo Distribuido

Minimizar $\mathcal{J}_h(\underline{z}_k, \underline{v}_k)$

$$\text{Sujeto a: } \begin{cases} \dot{\underline{z}}_k(t) = \mathcal{A}_h(\underline{z}_k, \underline{v}_k, c_h) & t \in [T_k, T_{k+1}] \\ \underline{Z}_k = \underline{z}_k(T_k^+) \\ \underline{z}_{k-1}(T_k^-) = \underline{Z}_k \end{cases} \quad \forall k = 0, 1, \dots, \hat{k} - 1$$

Eliminamos la restricción $\underline{z}_{k-1}(T_k^-) = \underline{Z}_k \quad \forall k = 1, 2, \dots, \hat{k} - 1$

mediante el Método de Penalización.

Entonces se modifica el Funcional de Costo quedando como sigue:

$$\mathcal{J}_h^\varepsilon(\underline{z}_k, \underline{v}_k, \underline{Z}_k) = \mathcal{J}_h(\underline{z}_k, \underline{v}_k) + \frac{1}{2\varepsilon\Delta T} \sum_{k=1}^{\hat{k}} \|\underline{z}_{k-1}(T_k^-) - \underline{Z}_k\|_{M_h}^2$$



Paralelización

Problema de Control Óptimo Distribuido

$$\text{Minimizar} \quad J_h^\varepsilon(\underline{z}_k, \underline{v}_k, Z_k) = J_h(\underline{z}_k, \underline{v}_k) + \frac{1}{2\varepsilon\Delta T} \sum_{k=1}^{\hat{k}} \|\underline{z}_{k-1}(T_k^-) - Z_k\|_{M_h}^2$$

$$\text{Sujeto a:} \quad \begin{cases} \dot{\underline{z}}_k(t) = \mathcal{A}_h(\underline{z}_k, \underline{v}_k, c_h) & t \in [T_k, T_{k+1}] \\ Z_k = \underline{z}_k(T_k^+) & \forall k = 0, 1, \dots, \hat{k} - 1 \end{cases}$$

Problema de Control Óptimo (Secuencial)

$$\text{Minimizar} \quad J_h(\underline{z}, \underline{v})$$

$$\text{Sujeto a:} \quad \begin{cases} \dot{\underline{z}}(t) = \mathcal{A}_h(\underline{z}, \underline{v}, c_h) & t \in [t_0, t_f] \\ \underline{z}(t_0) = z_0 \end{cases}$$



Paralelización

Problema de Control Óptimo Distribuido

$$\text{Minimizar} \quad \mathcal{J}_h^\varepsilon(\underline{z}_k, \underline{v}_k, Z_k) = \mathcal{J}_h(\underline{z}_k, \underline{v}_k) + \frac{1}{2\varepsilon\Delta T} \sum_{k=1}^{\hat{k}} \|\underline{z}_{k-1}(T_k^-) - Z_k\|_{M_h}^2$$

$$\text{Sujeto a:} \quad \begin{cases} \dot{\underline{z}}_k(t) = \mathcal{A}_h(\underline{z}_k, \underline{v}_k, c_h) & t \in [T_k, T_{k+1}] \\ Z_k = \underline{z}_k(T_k^+) & \forall k = 0, 1, \dots, \hat{k} - 1 \end{cases}$$

Convertimos en un Problema de Minimización irrestricta

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_h^\varepsilon(\underline{z}_k, \underline{v}_k, Z_k, \underline{p}_k, \eta_k) &= \mathcal{J}_h^\varepsilon(\underline{z}_k, \underline{v}_k, Z_k) + \sum_{k=0}^{\hat{k}-1} \left(\underline{p}_k, \dot{\underline{z}}_k(t) - \mathcal{A}_h(\underline{z}_k, \underline{v}_k, c_h) \right) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\hat{k}-1} \left(\eta_k, Z_k - \underline{z}_k(T_k^+) \right) \end{aligned}$$



Condiciones de Optimalidad

Ecuaciones de Estado

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_h^\varepsilon}{\partial \underline{p}_k} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}_h^\varepsilon}{\partial \eta_k} = 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} M_h \dot{\underline{z}}_k = A_h \underline{z}_k + B_h \underline{v}_k + c_h & t \in [T_k, T_{k+1}] \\ \underline{z}_k = \underline{z}_k(T_k^+) \end{cases}$$

Estado Adjunto

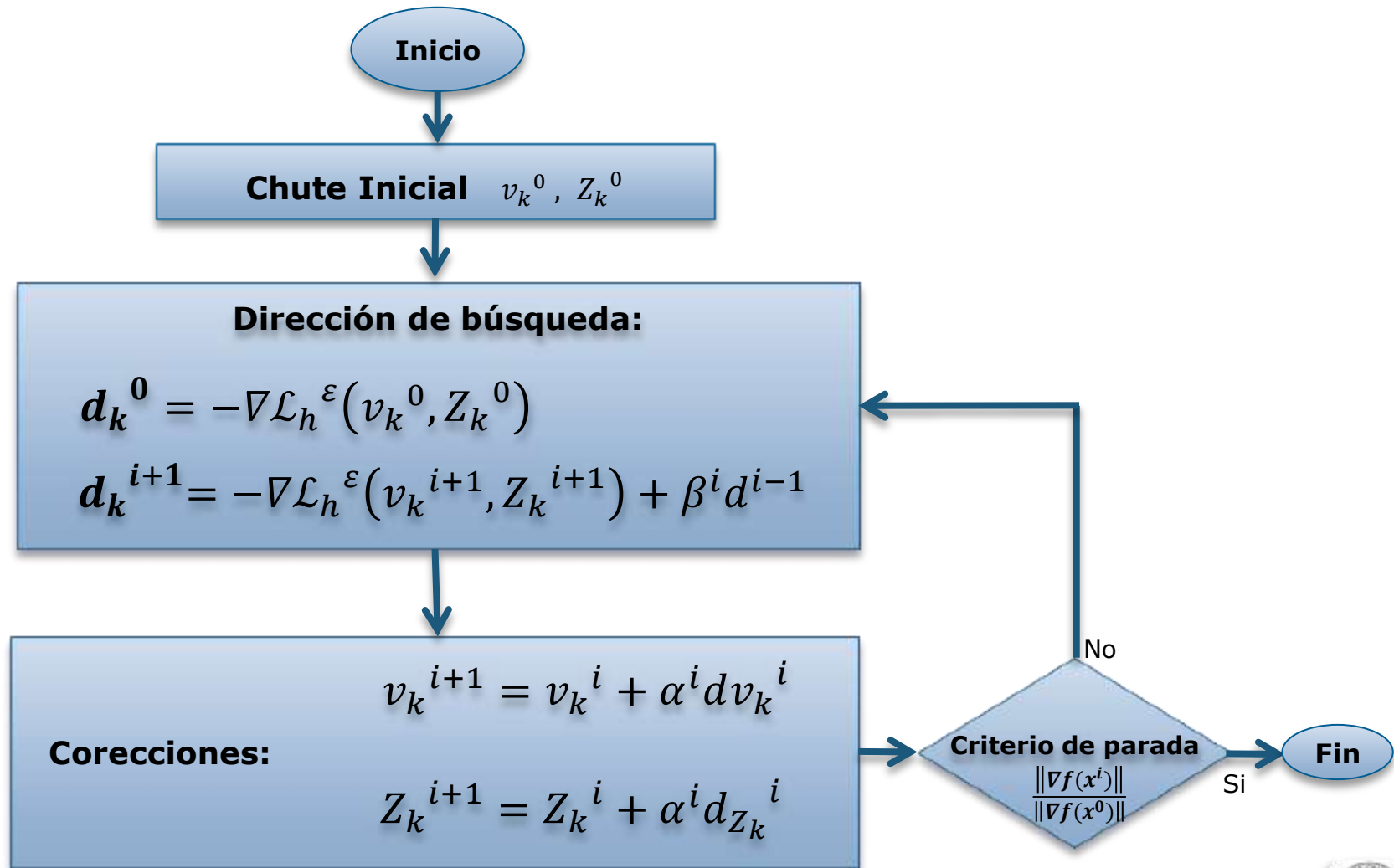
$$\frac{\partial \mathcal{L}_h^\varepsilon}{\partial \underline{z}_k} = 0 \Rightarrow \begin{cases} M_h \dot{\underline{p}}_k = -A_h \underline{z}_k + q M_h (\underline{z}_k - \tilde{y}_k) & t \in [T_k, T_{k+1}] \\ \underline{p}_k(T_{k+1}^-) = \begin{cases} -\frac{1}{\varepsilon \Delta T} (\underline{z}_k(T_{k+1}^-) - \underline{z}_{k+1}) & \forall k = 0, 1, \dots, \hat{k} - 2 \\ -s(\underline{z}_{\hat{k}-1}(T_{\hat{k}}) - \tilde{y}_{\hat{k}-1}(T_{\hat{k}})) & k = \hat{k} - 1 \end{cases} \end{cases}$$

Condiciones de Euler

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_h^\varepsilon}{\partial \underline{v}_k} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}_h^\varepsilon}{\partial \underline{z}_k} = 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} r R_h \underline{v}_k - B_h^T \underline{p}_k = 0 & t \in [T_k, T_{k+1}] \\ \underline{p}_k(T_k^+) + \frac{1}{\varepsilon \Delta T} (\underline{z}_{k-1}(T_k^-) - \underline{z}_k) = 0 \end{cases}$$



Método Gradiente Conjugado



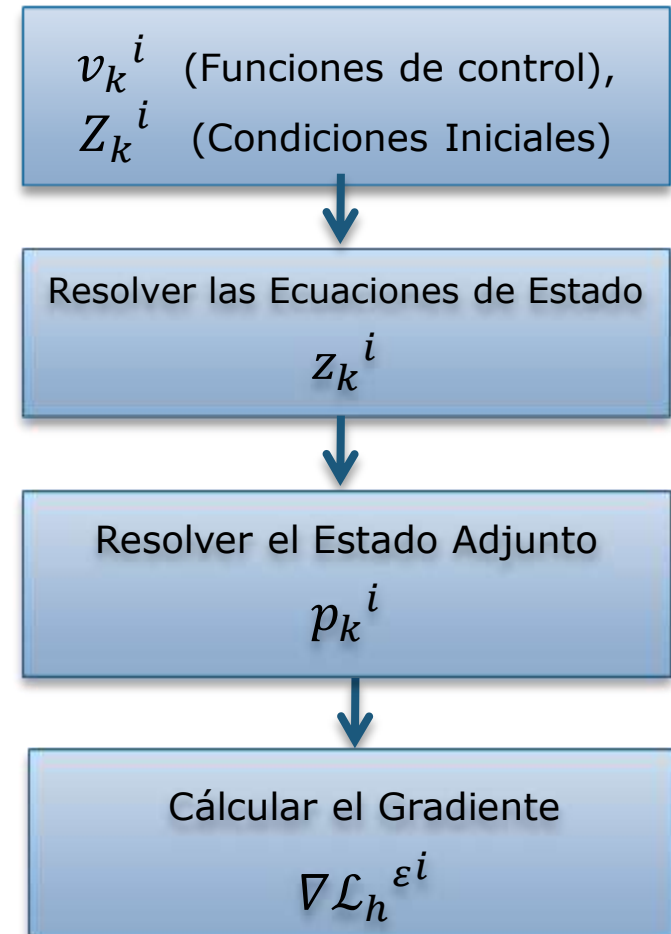
Método Gradiente Conjugado

Gradiente del Lagrangiano

$$\nabla \mathcal{L}_h^\varepsilon = \left[\begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{L}_h^\varepsilon}{\partial \underline{p}_k} \\ \frac{\partial \mathcal{L}_h^\varepsilon}{\partial \underline{\eta}_k} \\ \frac{\partial \mathcal{L}_h^\varepsilon}{\partial \underline{z}_k} \\ \frac{\partial \mathcal{L}_h^\varepsilon}{\partial \underline{v}_k} \\ \frac{\partial \mathcal{L}_h^\varepsilon}{\partial \underline{Z}_k} \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{Ecuaciones de Estado} \\ \text{Ecuaciones de Estado Adjunto} \\ \text{Condiciones de Euler} \end{array}$$

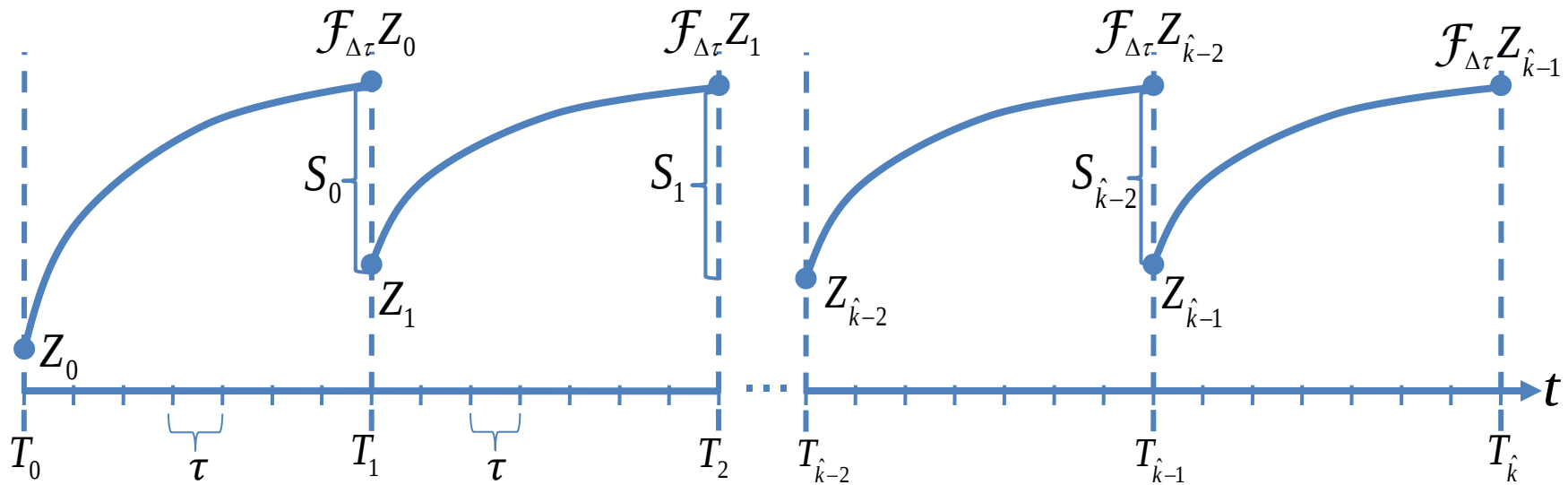
$$\nabla \mathcal{L}_h^\varepsilon = \nabla \mathcal{J}_h^\varepsilon = \left[\begin{array}{c} rR_h \underline{v}_k - B_h^T \underline{p}_k \\ -M_h \underline{p}_k(T_k^+) + M_h \underline{p}_{k-1}(T_k^-) \end{array} \right]$$

$\mathcal{J}_h$ es simétrico, cuadrático y definido positivo



Precondicionador

Cálculo de la Temperatura en forma paralela – Malla Fina



Fuente: Elaboración Propia

Los Saltos podemos expresar matricialmente como sigue:

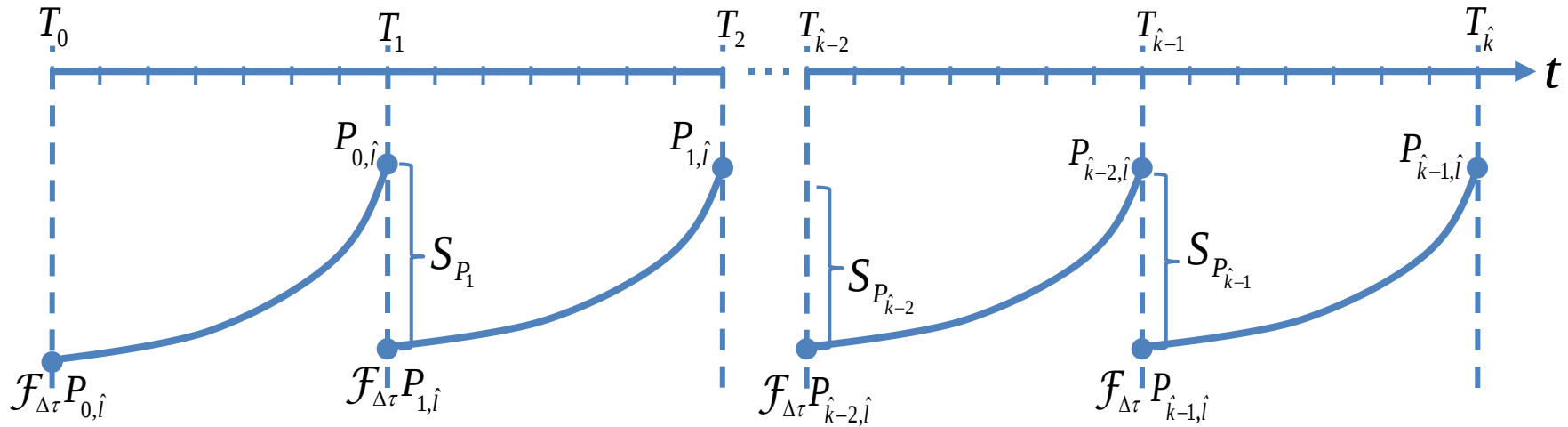
$$\begin{bmatrix} I & & & \\ -\mathcal{F}_{\Delta\tau} & I & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -\mathcal{F}_{\Delta\tau} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_{\hat{k}-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} S_0 + \mathcal{F}_{\Delta\tau}Z_0 \\ S_1 \\ \vdots \\ S_{\hat{k}-2} \end{bmatrix} = 0$$

$$CZ - S = 0$$



Precondicionador

Solución del Estado Adjunto en Paralelo – Malla Fina



Fuente: Elaboración Propia

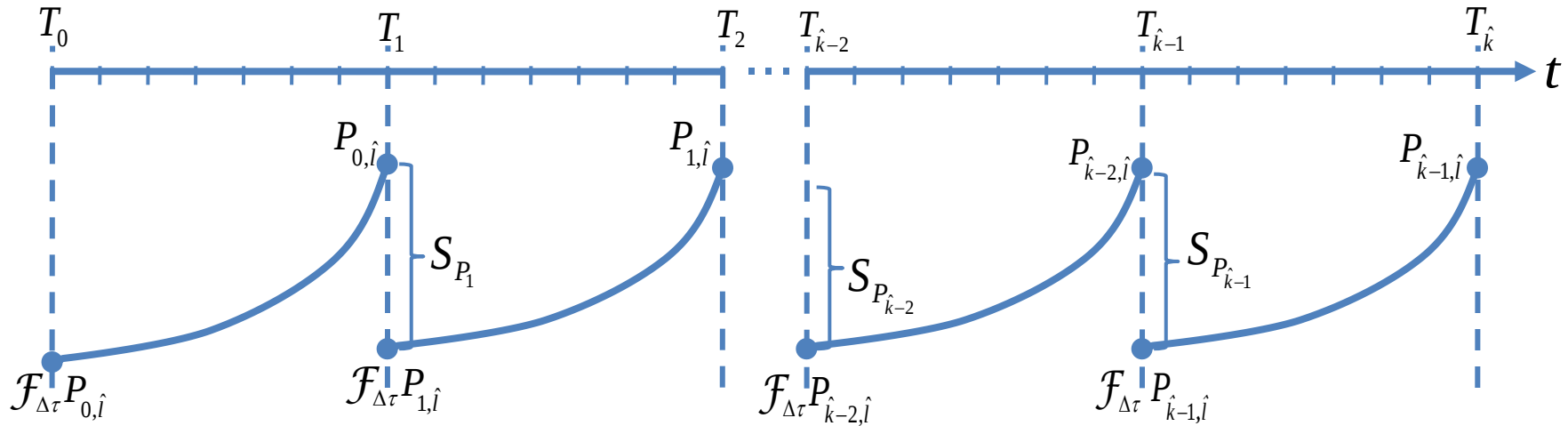
$$P_{k, \hat{l}} = \underline{p}_{k-1}(T_k^-) = -\frac{1}{\varepsilon \Delta T} (z_{k-1}(T_k^-) - Z_k)$$

$$\nabla_Z \mathcal{J}_h^\varepsilon = M_h \left(\underline{p}_{k-1}(T_k^-) - \underline{p}_k(T_k^+) \right)$$



Precondicionador

Solución del Estado Adjunto en Paralelo – Malla Fina



Fuente: Elaboración Propia

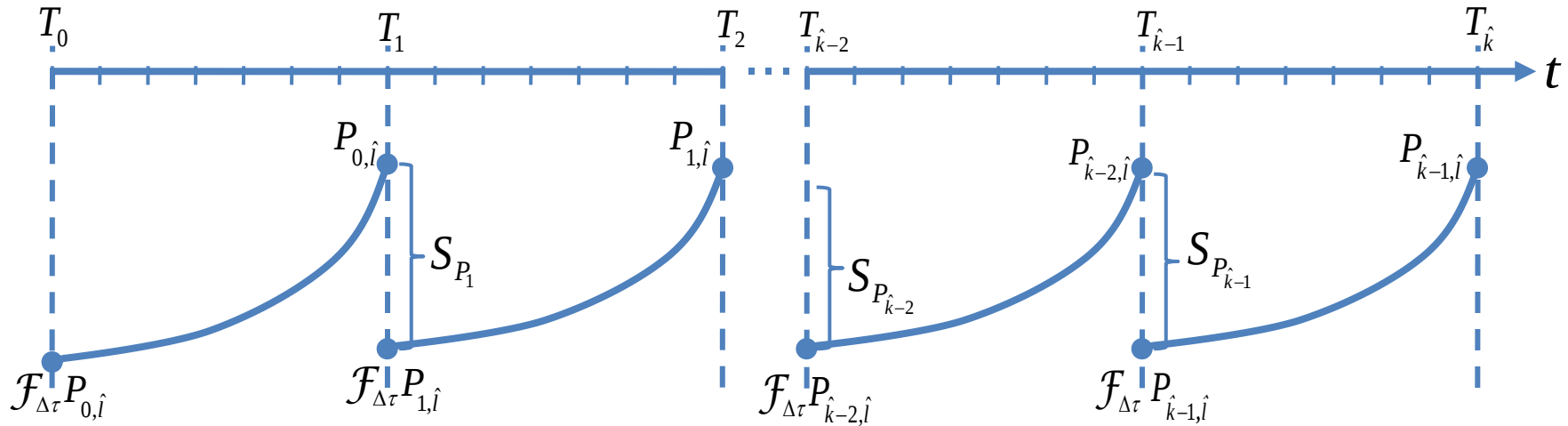
Los Saltos en el Adjunto podemos expresar matricialmente como sigue:

$$\nabla_Z \mathcal{J}_h^\varepsilon = \mathbf{C}^T \mathbf{K} \underbrace{\begin{bmatrix} z_{0,l} - Z_1 \\ z_{1,l} - Z_2 \\ \vdots \\ z_{\hat{k}-2,l} - Z_{\hat{k}-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{CZ} - \mathbf{S}} - \underbrace{\begin{bmatrix} M_h S_{p_1} \\ M_h S_{p_2} \\ \vdots \\ M_h \left(S_{p_{\hat{k}-1}} + \mathcal{F}_{\Delta\tau}^T p_{\hat{k}-1,l} \right) \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}_p}$$



Precondicionador

Solución del Estado Adjunto en Paralelo – Malla Fina



Fuente: Elaboración Propia

Donde:
$$K = \begin{bmatrix} \frac{1}{\varepsilon \Delta T} M_h & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\varepsilon \Delta T} M_h \end{bmatrix}$$

$$\nabla_Z J_h^\varepsilon = C^T K C Z - (C^T K S + S_p) = C^T K C Z - F$$

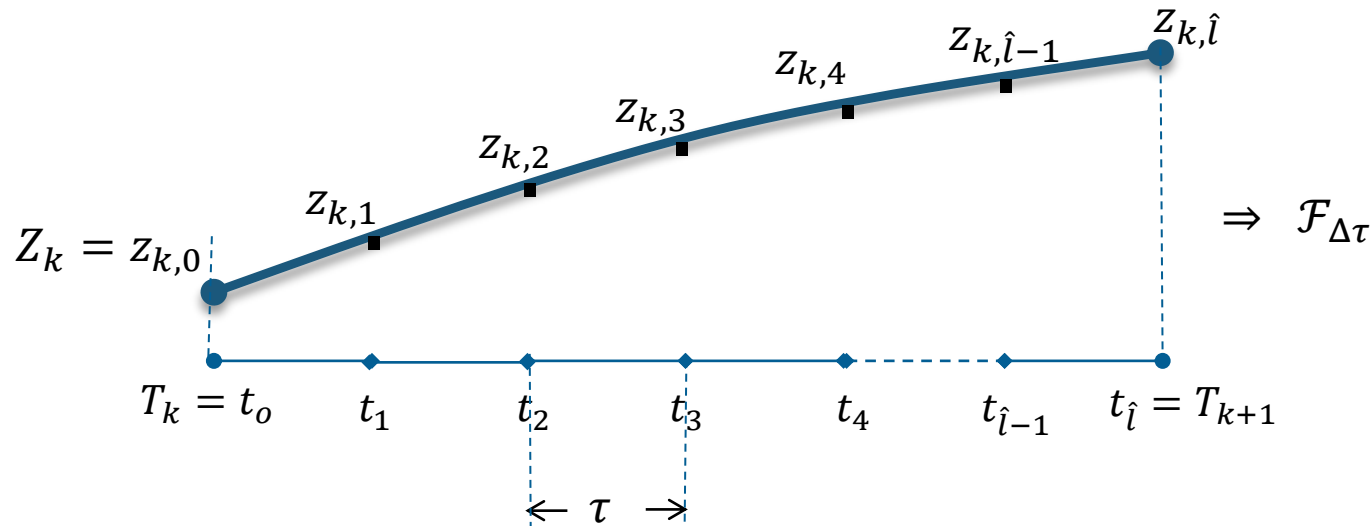


Precondicionador

En la Solución Óptima se debe cumplir que: $\nabla_Z \mathcal{J}_h^\varepsilon = 0$

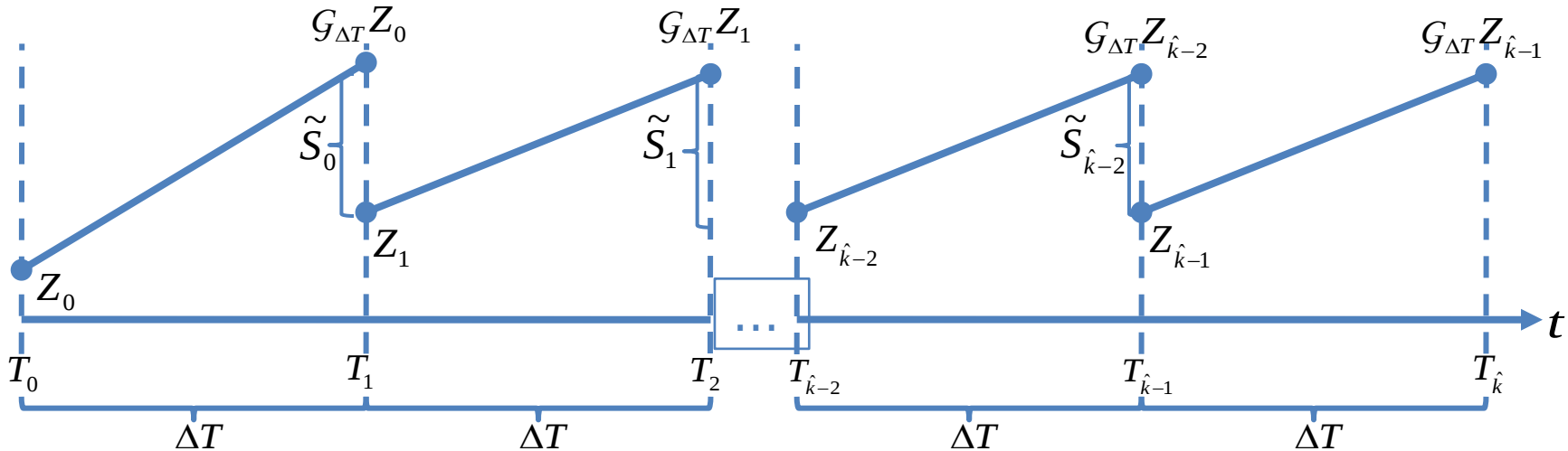
Entonces para hallar $\mathbf{Z}$ debemos resolver la siguiente ecuación:

$$\mathbf{C}^T \mathbf{K} \mathbf{C} \mathbf{Z} = \mathbf{F}$$



Precondicionador

Cálculo de la Temperatura – Malla Gruesa



Fuente: Elaboración Propia

Los Saltos podemos expresar matricialmente como sigue:

$$\begin{bmatrix} I & & & \\ -G_{\Delta T} & I & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -G_{\Delta T} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_{\hat{k}-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{S}_0 \\ \tilde{S}_1 \\ \vdots \\ \tilde{S}_{\hat{k}-2} \end{bmatrix} \quad \text{donde } \mathcal{F}_{\Delta\tau} \approx G_{\Delta T}$$

$$\tilde{\mathcal{C}}\mathbf{Z} = \tilde{\mathbf{S}}$$



Precondicionador

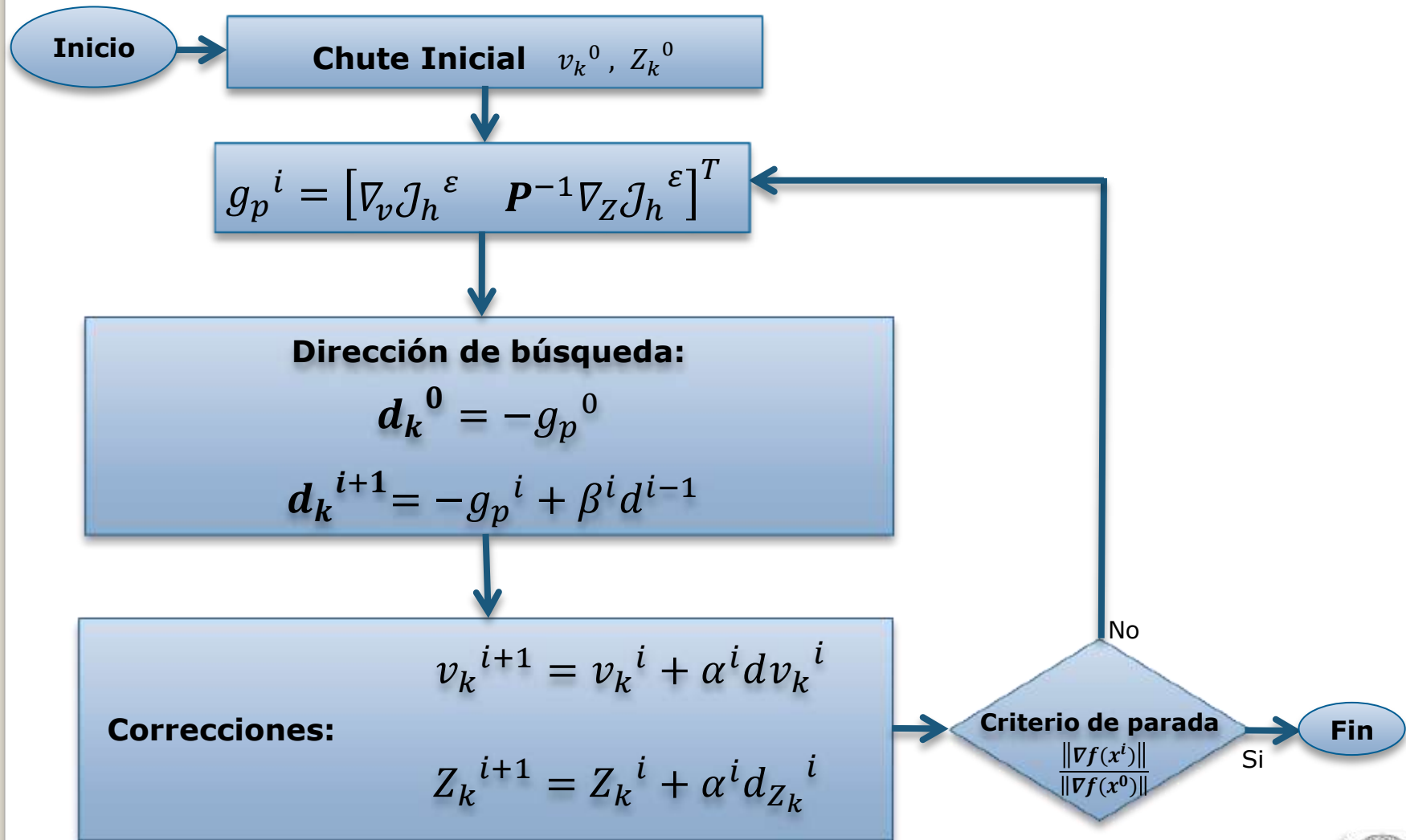
Para acelerar la convergencia del CG se propone el siguiente preconditionador:

$$P = \tilde{C}^T K \tilde{C}$$

El preconditionador P es conocido como algoritmo parareal.



Método Gradiente Conjugado Precondicionado



Contenido

Introducción

- Motivación
- Metodología
- Antecedentes
- Definición del problema
- Objetivos

Problema de Control

- Problema de control Semi-discreto
- Condiciones de Optimalidad
- Método Gradiente Conjugado
- Discretización temporal

Algoritmo Parareal

- Discretización temporal gruesa (Paralelización)
- Condiciones de Optimalidad
- Método Gradiente Conjugado
- Precondicionado

Resultados

- Gradiente Conjugado
- Gradiente Conjugado Precondicionado

Conclusión



Resultados Numéricos

Algunos parámetros importantes

Placa cuadrada 5 cm.

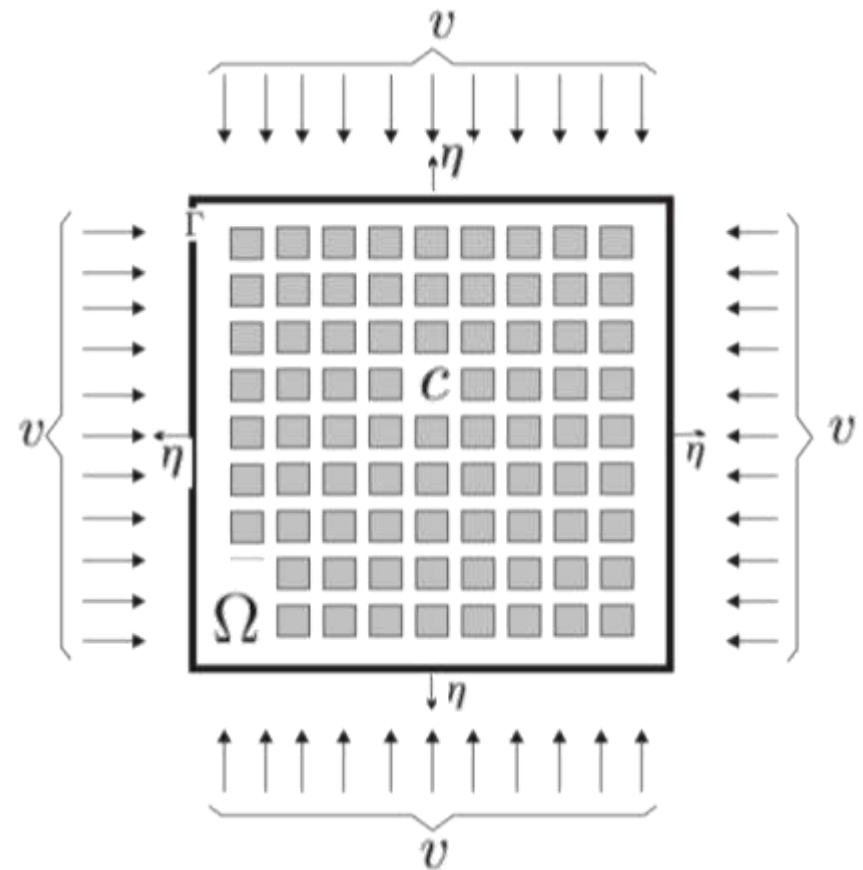
$$\lambda = 1 \left[\frac{W}{mK} \right] \quad y \quad \rho c_p = 10^4 \left[\frac{J}{m^2 K} \right]$$

Generador de calor de 2 cm lado:

$$c = 4 \cdot 10^5 \left[\frac{W}{m^2} \right]$$

Temperatura inicial de 320 [K].

Temperatura deseada de 300 [K].



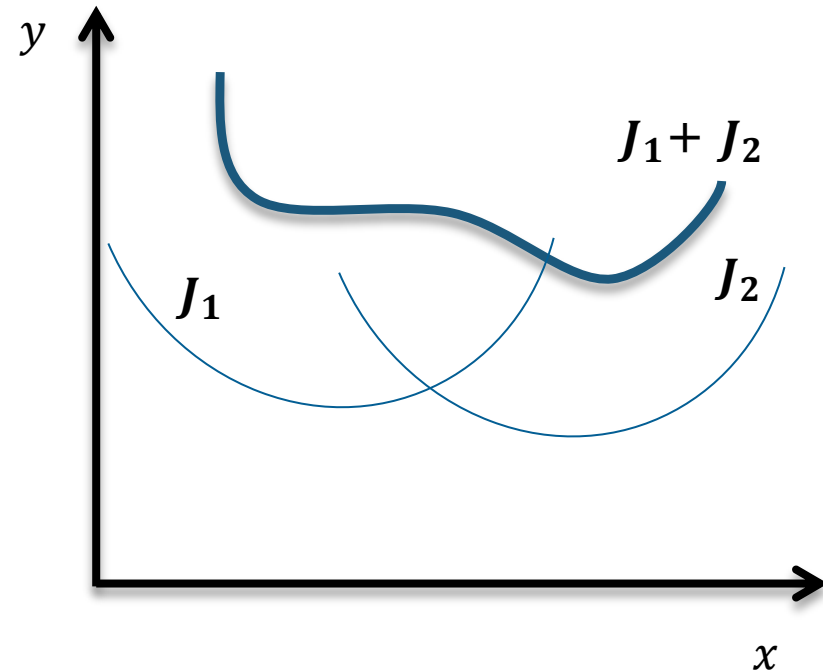
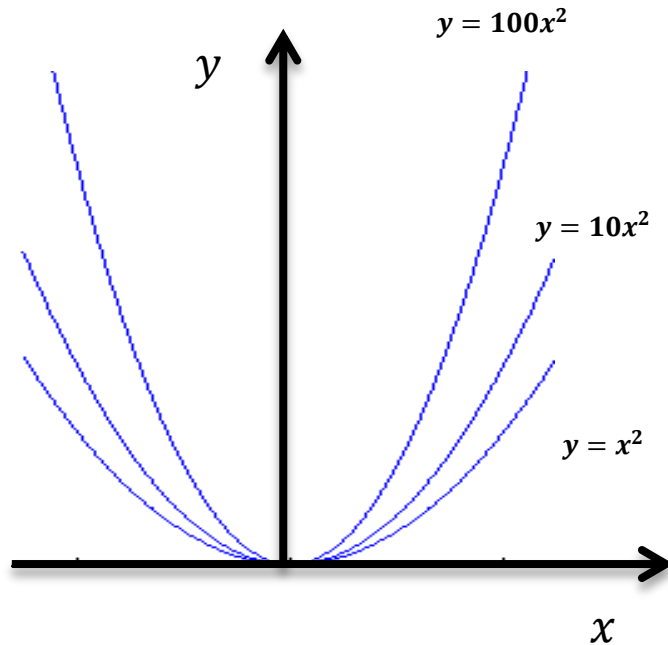
Fuente: Elaboración Propia





Resultados Numéricos

Ajuste del controlador



$$\mathcal{J}(z, v) = \frac{1}{2} \mathbf{r} \|v\|^2_{\Gamma \times [t_o, t_f]} + \frac{1}{2} \mathbf{q} \|z - \tilde{y}\|^2_{\Omega \times [t_o, t_f]} + \frac{1}{2} \mathbf{s} \|z(t_f) - \tilde{y}\|^2_{\Omega}$$

Costo=Gasto de energía en el control + Error + Error(t_f)



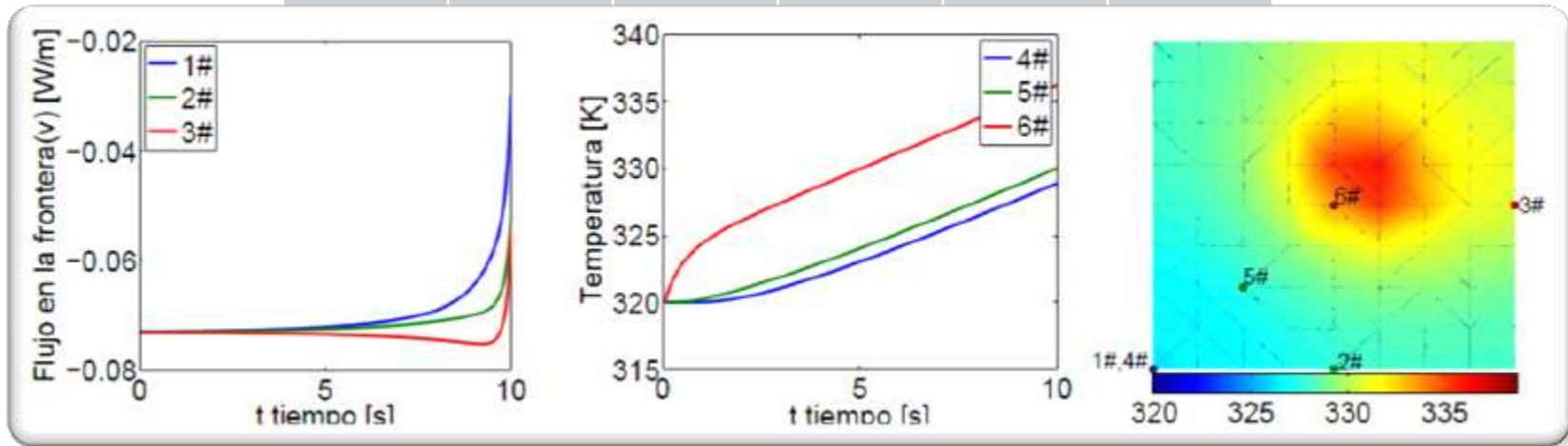
Método Gradiente Conjugado

Ajuste del controlador

Tabla 1: Iteraciones del Método GC $\hat{l} = 256$, $\hat{q} = 81$ y $\hat{p} = 32$



Caso	r	q	s	tol	Iter.
1	1	0	1	10^{-9}	3
2	1	0	100	10^{-9}	4
3	1	0	1000	10^{-9}	5
4	1	0	5000	10^{-9}	6
5	1	0	10000	10^{-9}	7
6	1	0	50000	10^{-9}	10
7	1	0	100000	10^{-9}	12



Función de control

Temperatura

Temperatura final

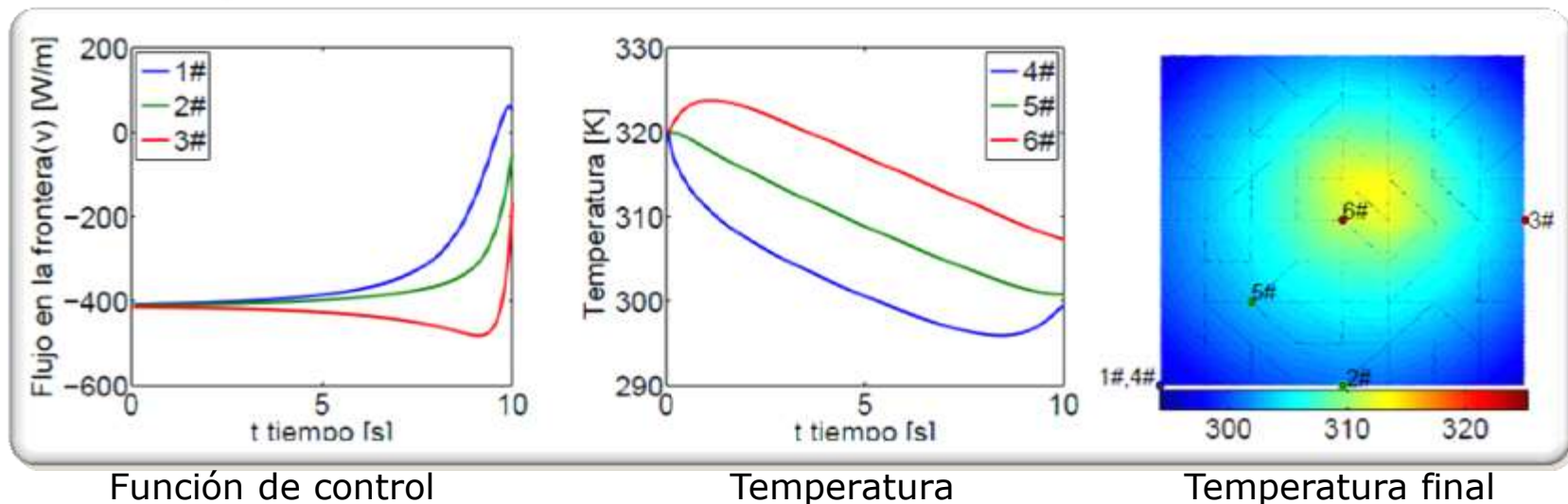


Método Gradiente Conjugado

Ajuste del controlador

Tabla 1: Iteraciones del Método GC $\hat{l} = 256$, $\hat{q} = 81$ y $\hat{p} = 32$

Caso	r	q	s	tol	Iter.
1	1	0	1	10^{-9}	3
2	1	0	100	10^{-9}	4
3	1	0	1000	10^{-9}	5
4	1	0	5000	10^{-9}	6
5	1	0	10000	10^{-9}	7
6	1	0	50000	10^{-9}	10
7	1	0	100000	10^{-9}	12



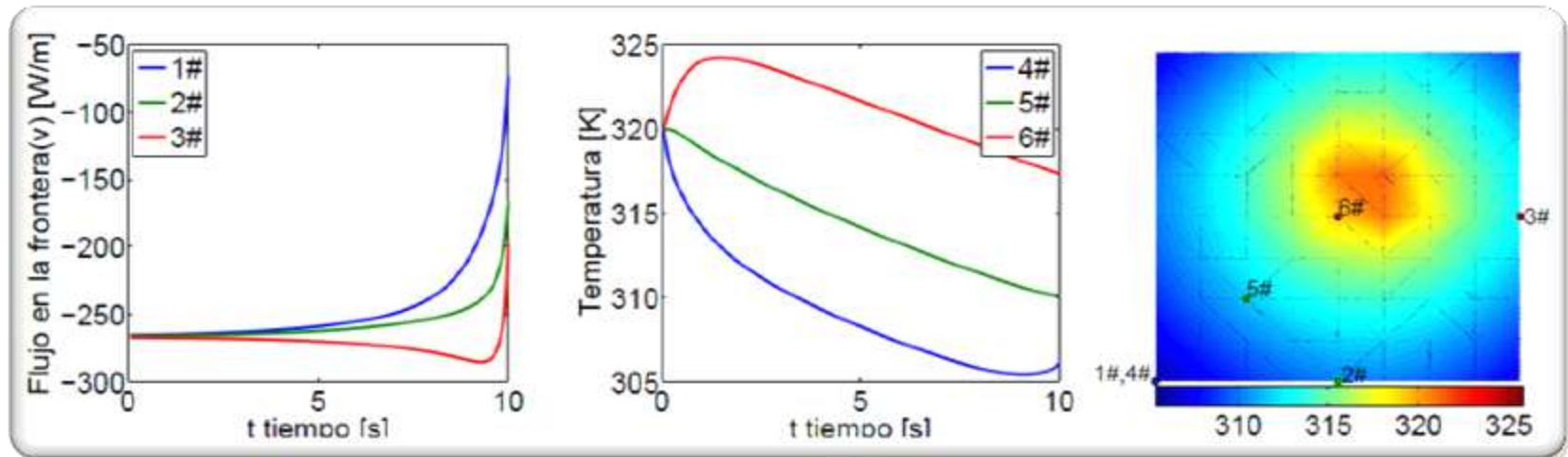


Método Gradiente Conjugado

Ajuste del controlador

Tabla 1: Iteraciones del Método GC $\hat{l} = 256$, $\hat{q} = 81$ y $\hat{p} = 32$

Caso	r	q	s	tol	Iter.
1	1	0	1	10^{-9}	3
2	1	0	100	10^{-9}	4
3	1	0	1000	10^{-9}	5
4	1	0	5000	10^{-9}	6
5	1	0	10000	10^{-9}	7
6	1	0	50000	10^{-9}	10
7	1	0	100000	10^{-9}	12



Función de control

Temperatura

Temperatura final



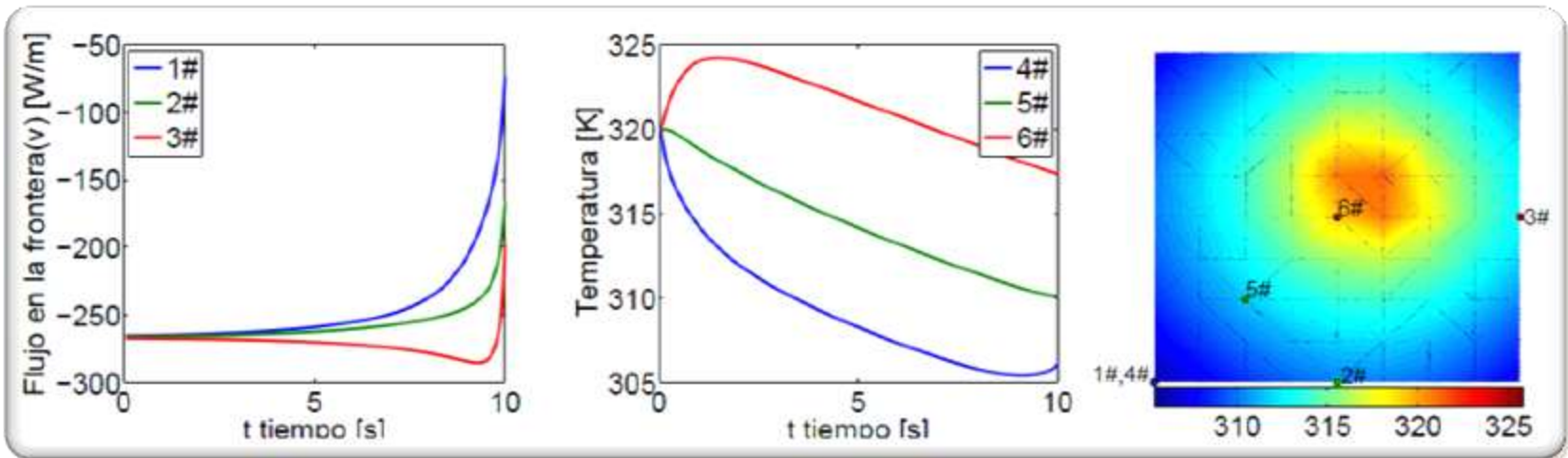


Método Gradiente Conjugado

Ajuste del controlador

Tabla 2: Iteraciones del Método GC $\hat{l} = 256$, $\hat{q} = 81$ y $\hat{p} = 32$

Caso	r	q	s	tol	Iter.
1	1	0	10000	10^{-9}	7
2	10^{-1}	0	1000	10^{-9}	7
3	10^{-2}	0	100	10^{-9}	7
4	10^{-3}	0	10	10^{-9}	7



Función de control

Temperatura

Temperatura final



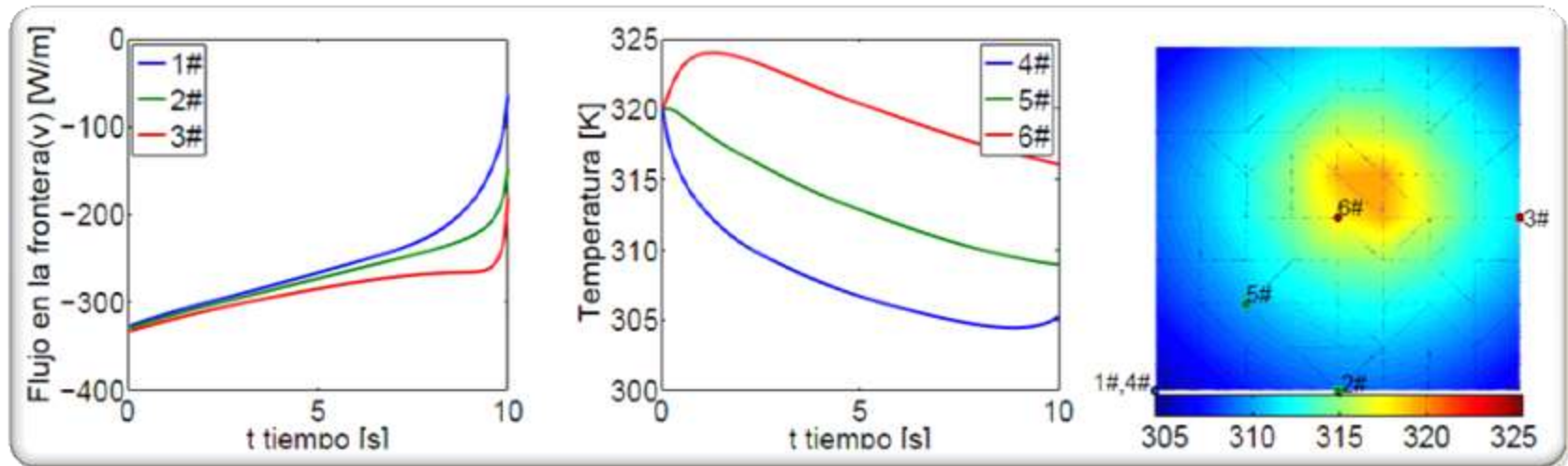
Método Gradiente Conjugado

Ajuste del controlador

Tabla 3: Iteraciones del Método GC $\hat{l} = 256$, $\hat{q} = 81$ y $\hat{p} = 32$



Caso	r	q	s	tol	Iter.
1	10^{-3}	10^{-2}	10	10^{-9}	7
2	10^{-3}	10^{-1}	10	10^{-9}	7
3	10^{-3}	1	10	10^{-9}	7
4	10^{-3}	10	10	10^{-9}	7



Función de control

Temperatura

Temperatura final

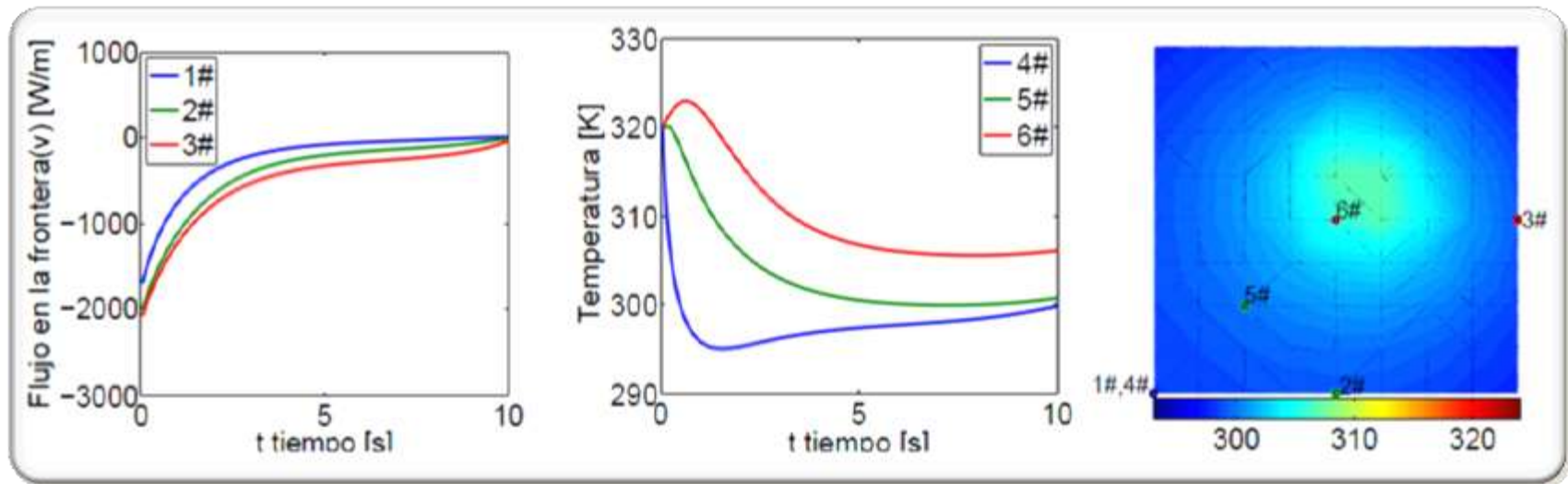


Método Gradiente Conjugado

Ajuste del controlador

Tabla 3: Iteraciones del Método GC $\hat{l} = 256$, $\hat{q} = 81$ y $\hat{p} = 32$

Caso	r	q	s	tol	Iter.
1	10^{-3}	10^{-2}	10	10^{-9}	7
2	10^{-3}	10^{-1}	10	10^{-9}	7
3	10^{-3}	1	10	10^{-9}	7
4	10^{-3}	10	10	10^{-9}	7



Función de control

Temperatura

Temperatura final

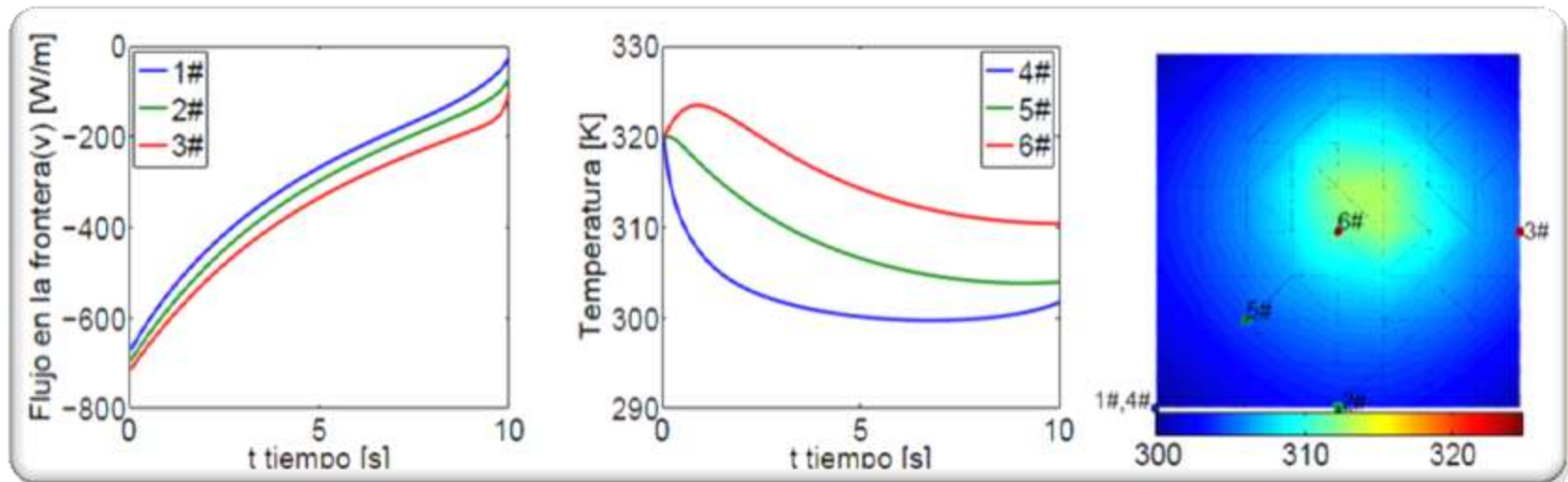


Método Gradiente Conjugado

Ajuste del controlador

Tabla 3: Iteraciones del Método GC $\hat{l} = 256$, $\hat{q} = 81$ y $\hat{p} = 32$

Caso	r	q	s	tol	Iter.
1	10^{-3}	10^{-2}	10	10^{-9}	7
2	10^{-3}	10^{-1}	10	10^{-9}	7
3	10^{-3}	1	10	10^{-9}	7
4	10^{-3}	10	10	10^{-9}	7



Función de control

Temperatura

Temperatura final



Método Gradiente Conjugado

Influencia de la cantidad de elementos del dominio espacial

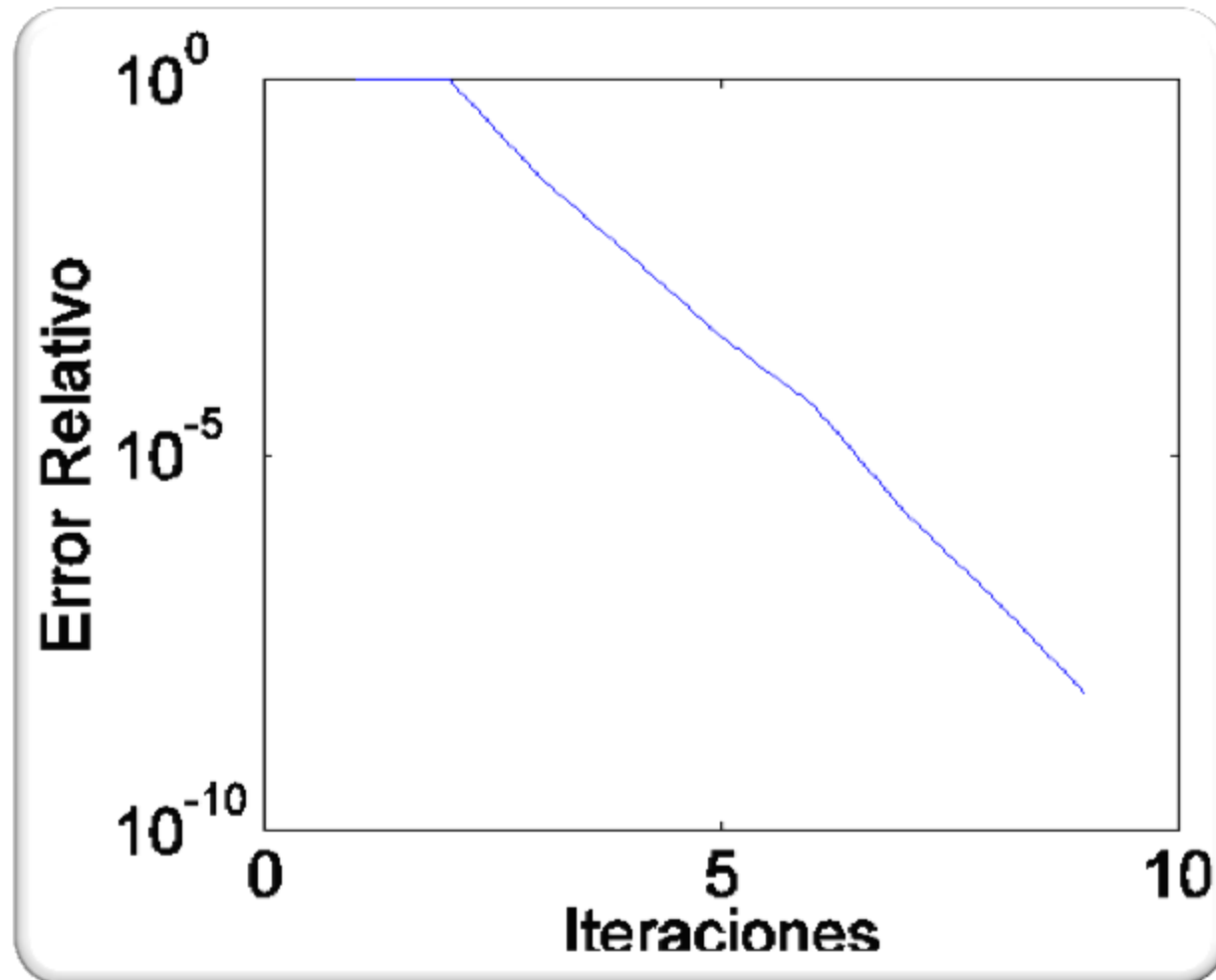
Tabla 4: Iteraciones del Método GC $\hat{l} = 256$,

Caso	r	q	s	$\hat{q}$	tol	Iter.
1	10^{-3}	10^{-2}	10	25	10^{-9}	12
2	10^{-3}	10^{-1}	10	81	10^{-9}	8
3	10^{-3}	1	10	289	10^{-9}	7
4	10^{-3}	10	10	1089	10^{-9}	6



Método Gradiente Conjugado

Evolución del error $\frac{\|\nabla f(x^i)\|}{\|\nabla f(x^0)\|}$



Método Gradiente Conjugado Paralelo

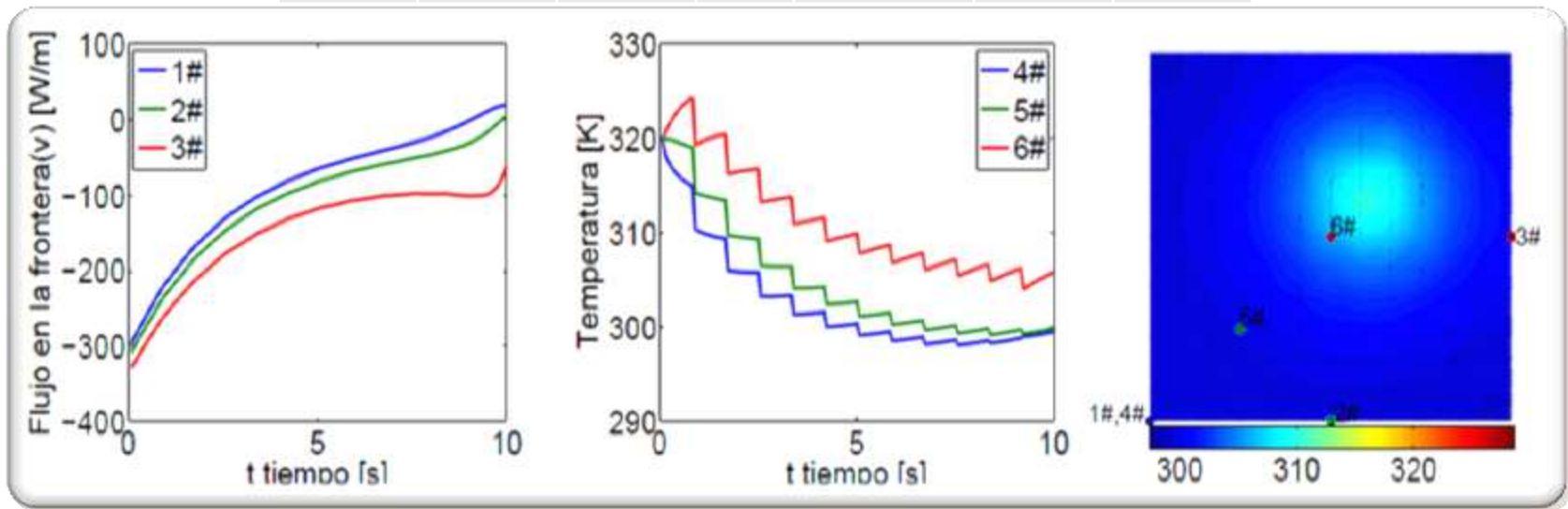


Ajuste de la penalización ε

Tabla 5: Iteraciones del Método GC

$\hat{l} = 12$ (Malla fina), $\hat{k} = 12$ (Malla gruesa), $\hat{q} = 169$ y $\hat{p} = 48$

Caso	r	q	s	ε	tol	Iter.
1	10^{-3}	1	10	1	10^{-9}	83
2	10^{-3}	1	10	1/10	10^{-9}	55
3	10^{-3}	1	10	1/100	10^{-9}	43
4	10^{-3}	1	10	1/1000	10^{-9}	39
5	10^{-3}	1	10	1/10000	10^{-9}	40
6	10^{-3}	1	10	1/100000	10^{-9}	49



Función de control

Temperatura

Temperatura final

Método Gradiente Conjugado Paralelo

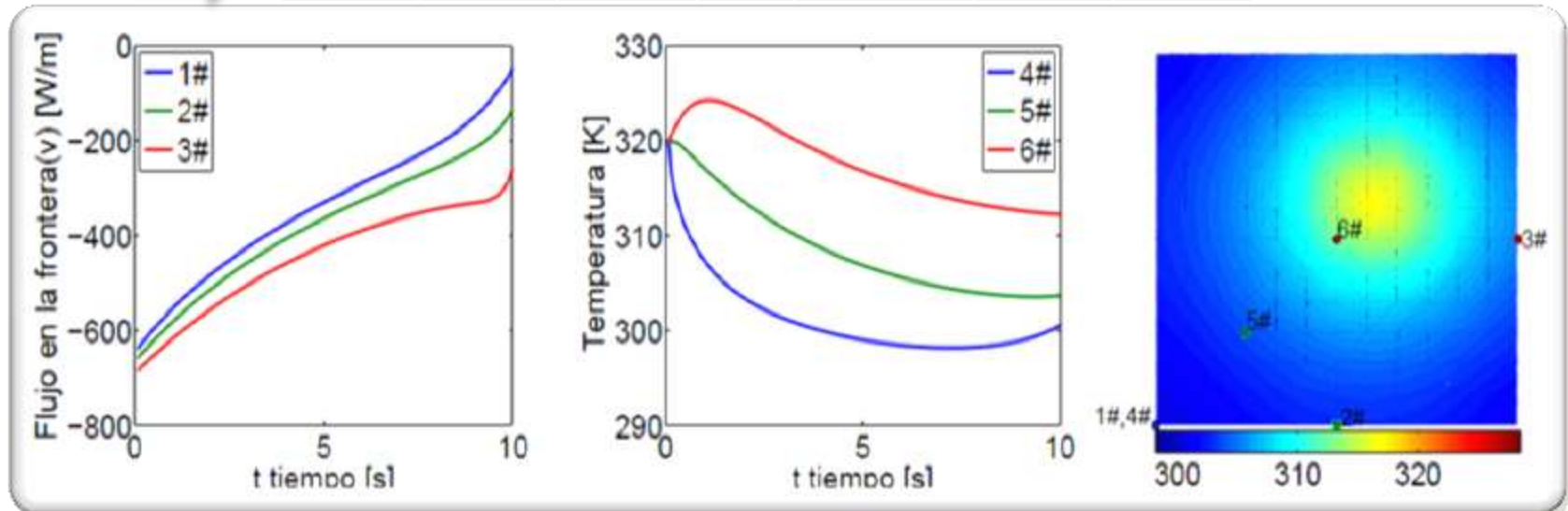


Ajuste de la penalización ε

Tabla 5: Iteraciones del Método GC

$\hat{l} = 12$ (Malla fina), $\hat{k} = 12$ (Malla gruesa), $\hat{q} = 169$ y $\hat{p} = 48$

Caso	r	q	s	ε	tol	Iter.
1	10^{-3}	1	10	1	10^{-9}	83
2	10^{-3}	1	10	1/10	10^{-9}	55
3	10^{-3}	1	10	1/100	10^{-9}	43
4	10^{-3}	1	10	1/1000	10^{-9}	39
5	10^{-3}	1	10	1/10000	10^{-9}	40
6	10^{-3}	1	10	1/100000	10^{-9}	49



Función de control

Temperatura

Temperatura final

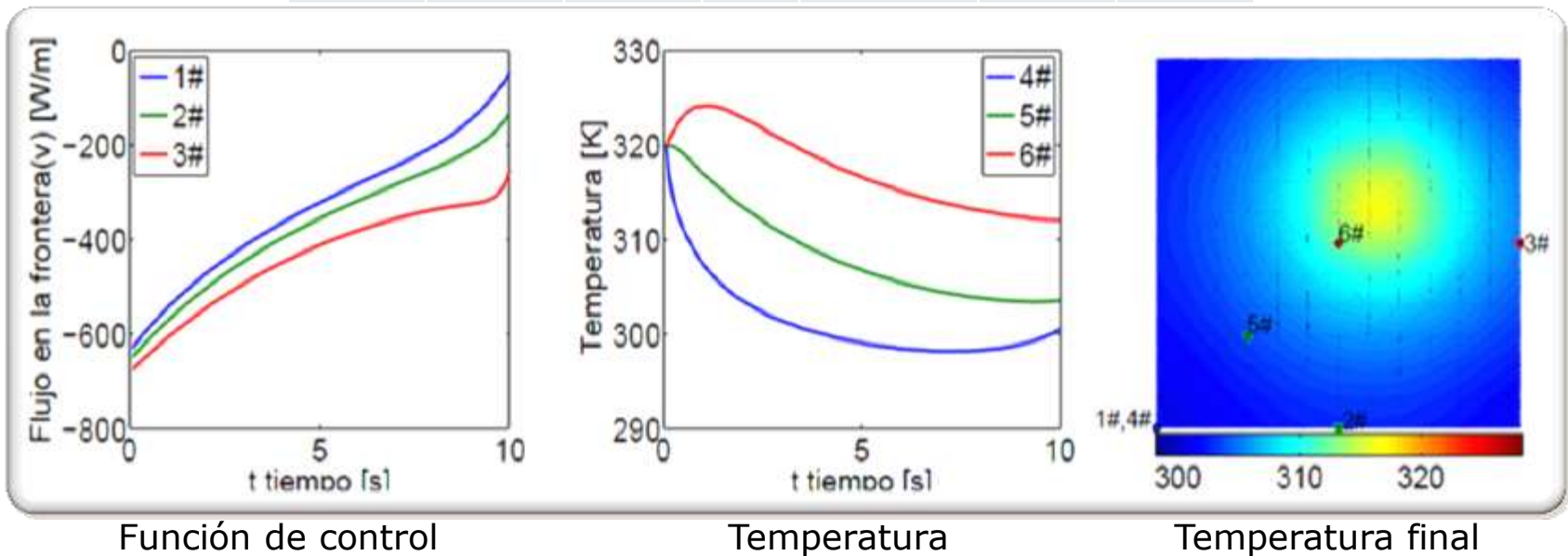
Método Gradiente Conjugado Paralelo



Ajuste de la penalización ε

Tabla 5: Iteraciones del Método GC

Caso	r	q	s	ε	tol	Iter.
1	10^{-3}	1	10	1	10^{-9}	83
2	10^{-3}	1	10	1/10	10^{-9}	55
3	10^{-3}	1	10	1/100	10^{-9}	43
4	10^{-3}	1	10	1/1000	10^{-9}	39
5	10^{-3}	1	10	1/10000	10^{-9}	40
6	10^{-3}	1	10	1/100000	10^{-9}	49



Método Gradiente Conjugado Paralelo



Influencia de la cantidad de elementos del dominio espacial

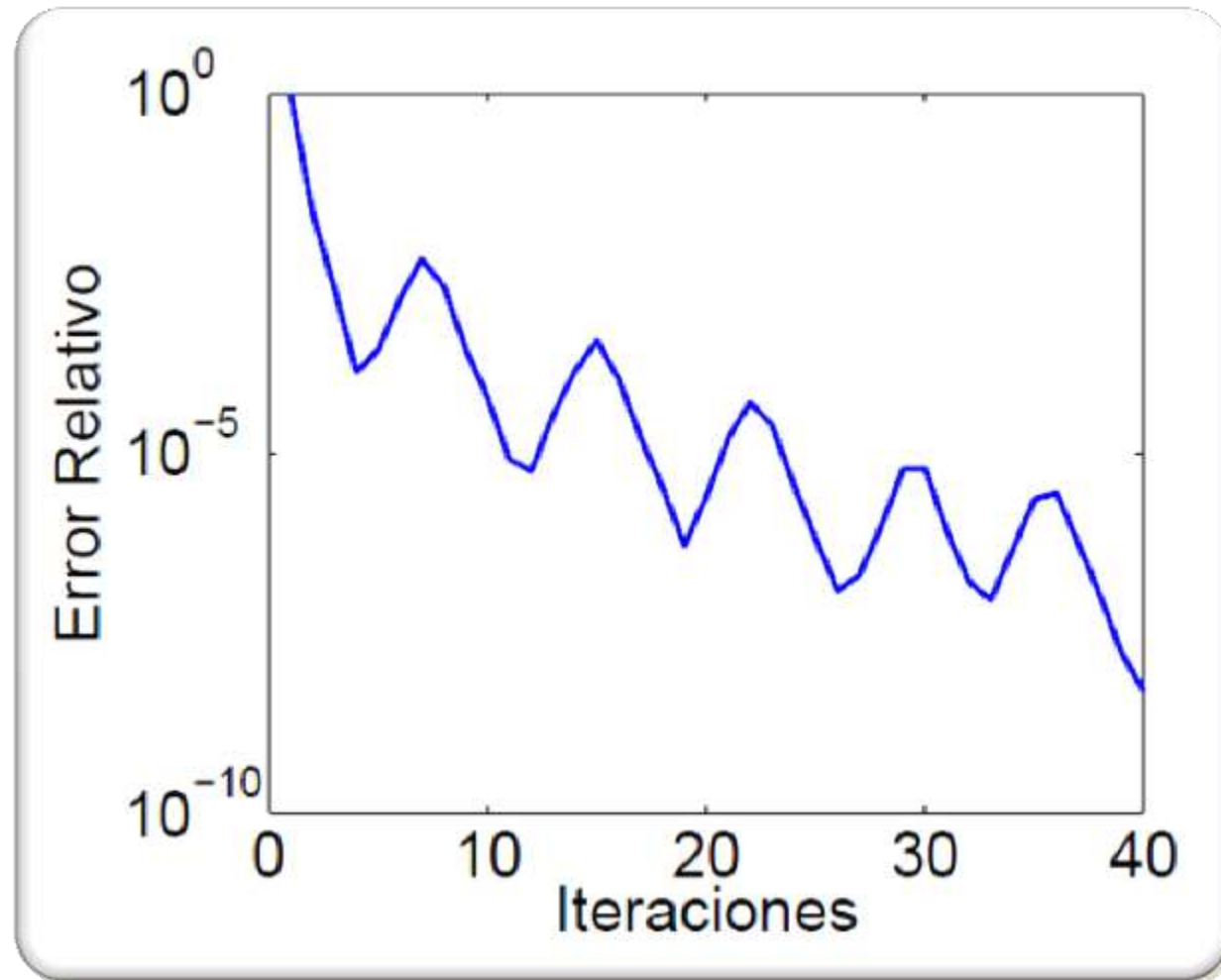
Tabla 6: Iteraciones del Método GC $\hat{l} = 16, \hat{l} = 16$

Caso	r	q	s	ε	$\hat{q}$	tol	Iter.
1	10^{-3}	10^{-2}	10	10^{-3}	25	10^{-9}	53
2	10^{-3}	10^{-1}	10	10^{-3}	81	10^{-9}	48
3	10^{-3}	1	10	10^{-3}	289	10^{-9}	42

Método Gradiente Conjugado Paralelo



Evolución del error $\frac{\|\nabla f(x^i)\|}{\|\nabla f(x^0)\|}$

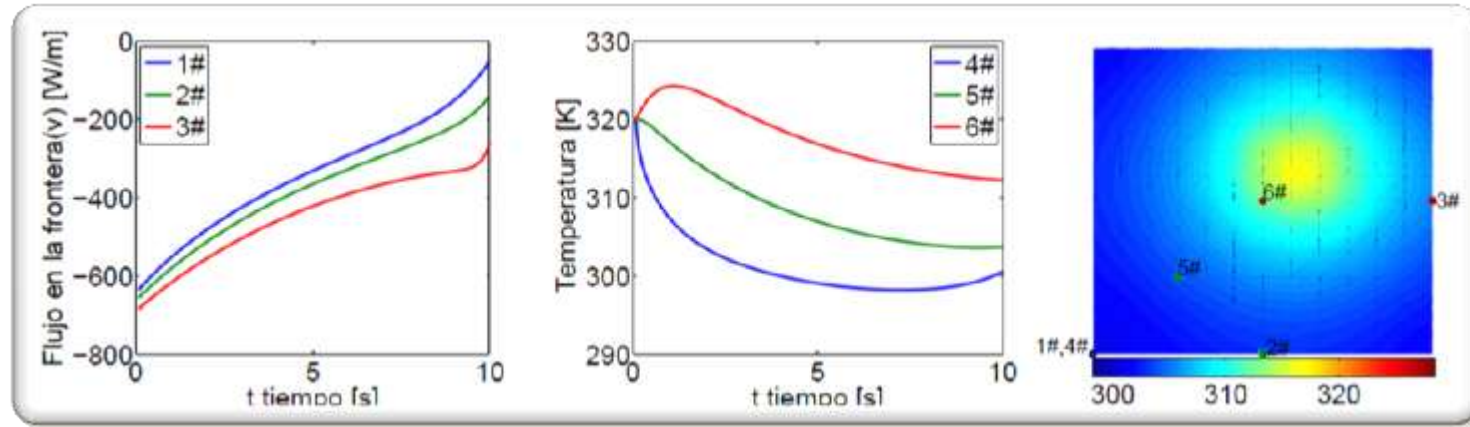




Resultados Numéricos

Método Gradiente Conjugado (secuencial)

$$r = \frac{1}{1000}, q = 1, s = 10, \hat{l} = 144$$



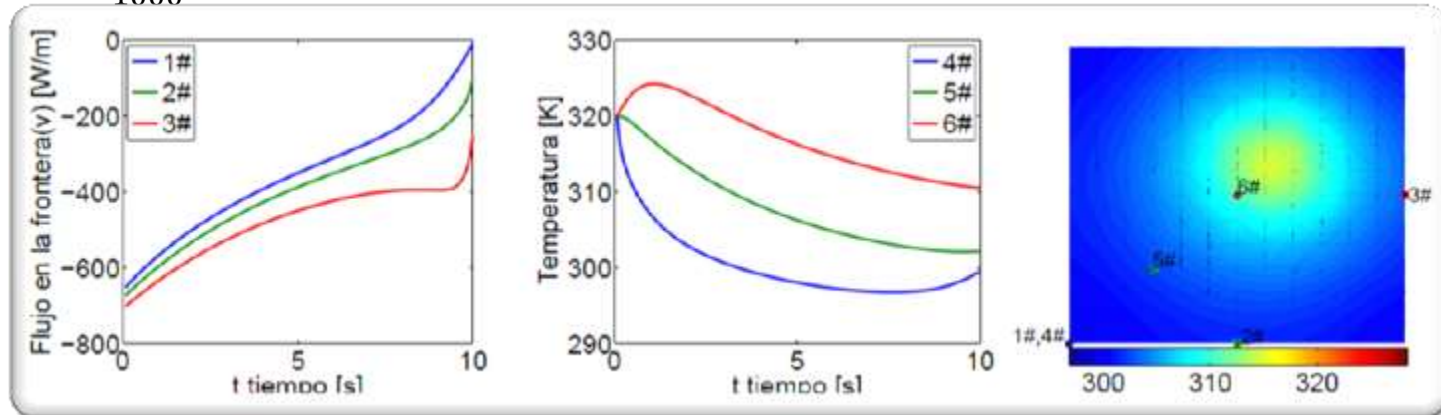
Función de control

Temperatura

Temperatura final

Método Gradiente Conjugado Precondicionado (Varios procesadores)

$$\varepsilon = \frac{1}{1000} \hat{l} = 12(\text{Malla fina}), \hat{k} = 12(\text{Mallagruesa}), \hat{q} = 169 \text{ y } \hat{p} = 48$$



Función de control

Temperatura

Temperatura final

Método Gradiente Conjugado Paralelo



Escalabilidad débil

Tabla 7: Iteraciones del Método GC

$$r = 10^{-1}, q = 1, s = 10, \varepsilon = \frac{1}{1000} \hat{q} = 169$$

$$\text{y } \hat{p} = 48$$

Caso	$\hat{k}$	$\hat{l} = \frac{\Delta T}{\tau}$	tol	Iter.
1	4	16	10^{-9}	35
2	8	16	10^{-9}	37
3	16	16	10^{-9}	42
4	32	16	10^{-9}	44
5	64	16	10^{-9}	39

Método Gradiente Conjugado Paralelo



Escalabilidad Fuerte

Tabla 8: Iteraciones del Método GC

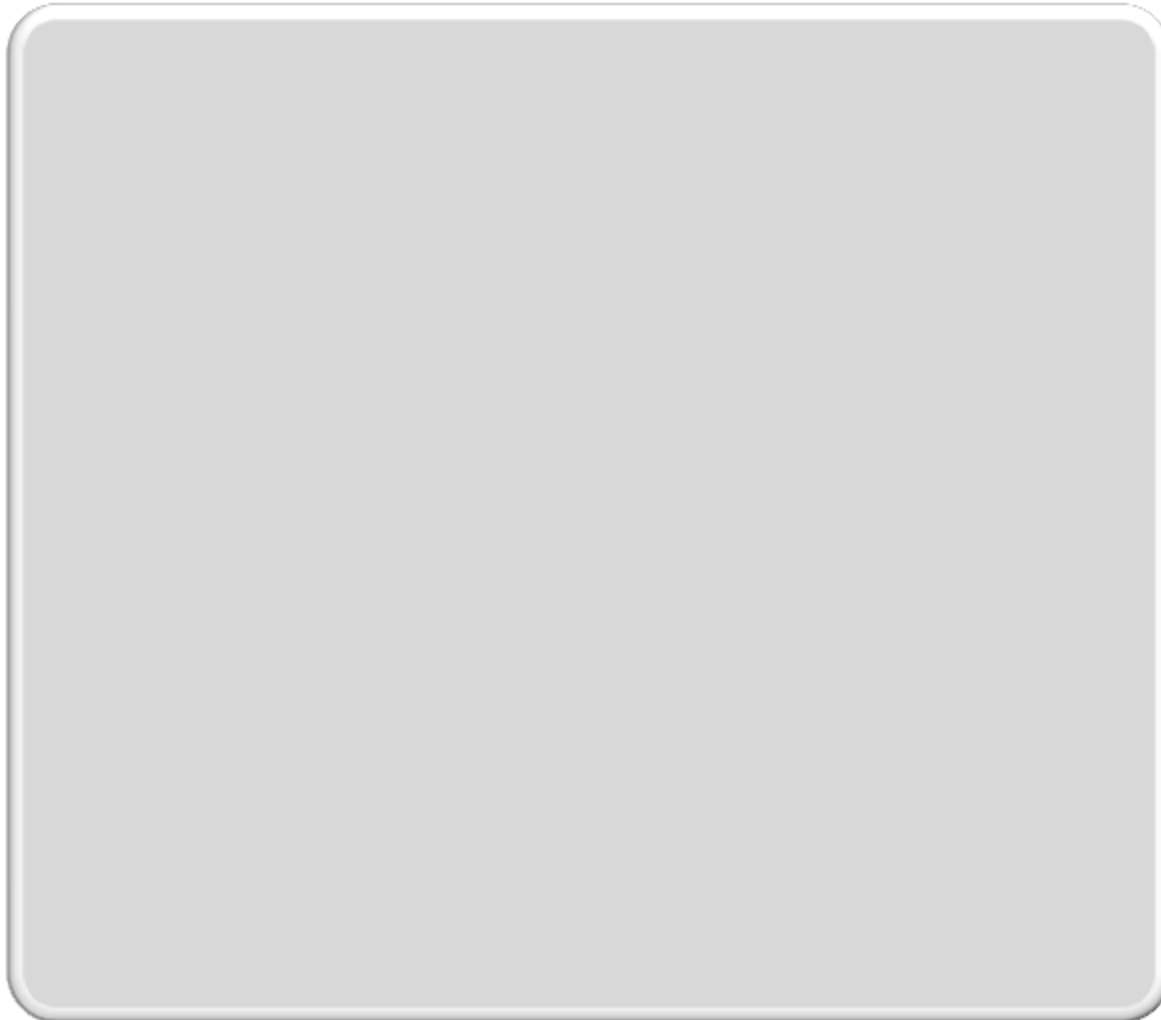
$\hat{l} = 12$ (Malla fina), $\hat{k} = 12$ (Malla gruesa), $\hat{q} = 169$ y
 $\hat{p} = 48$

Caso	$\hat{k}$	$\hat{l} = \frac{\Delta T}{\tau}$	tol	Iter.
1	4	64	10^{-9}	39
2	8	32	10^{-9}	39
3	16	16	10^{-9}	42
4	32	8	10^{-9}	41
5	64	4	10^{-9}	38



Resultados Numéricos

Evolución de la temperatura



K



Conclusión

- El Método Gradiente Conjugado permite reducir el costo computacional de la resolución del problema de control óptimo.
- De las simulaciones obtenemos lo siguiente:
 - La relación s/r modifica el error el tiempo final.
 - La relación q/r modifica el tiempo de establecimiento del sistema.
 - Si s/r y q/r son elevados se pueden presentar oscilaciones.
 - El algoritmo presenta una escalabilidad débil y fuerte.
 - El factor de penalización influye notablemente en la cantidad de iteraciones del algoritmo.



Trabajos Futuros

- Aplicar del algoritmo a otros problemas de la ciencia y la ingeniería.
- Utilizar el algoritmo Parareal como preconditionador para métodos iterativos aplicados a sistemas no lineales.
- Analizar las causas de las oscilaciones del algoritmo paralelo.
- Realizar un ajuste óptimo de la penalización

Workshop Applied Mathematics and Computing for Engineering

Facultad de Ingeniería - UNA

WAMCE 2010 October 25-26, SL-Paraguay

Optimal boundary control parareal algorithm for cooling electronics circuits

Juan R. FLEITAS, FIUNA, Paraguay

Diego H. STALDER, FIUNA, Paraguay

Christian E. SCHAEERER, FPUNA, Paraguay

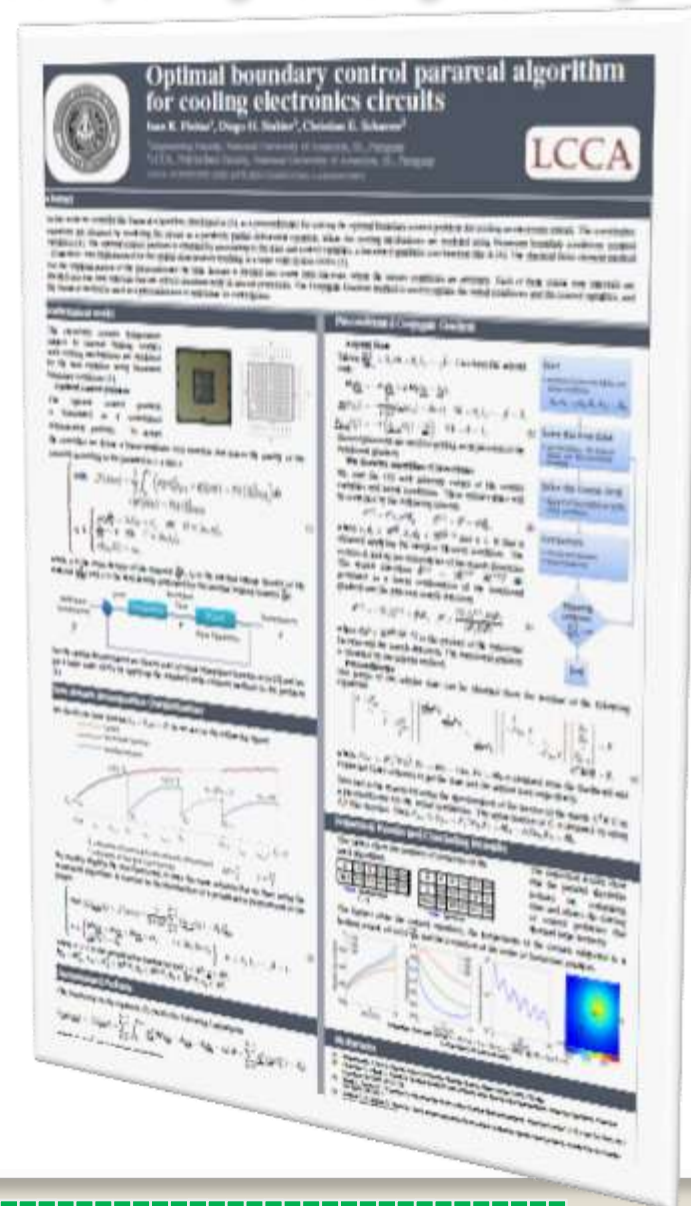
Keywords: Partial Differential Equation, Optimal Control, Parareal Algorithm

In this work we consider the Parareal Algorithm, developed in [3], as a preconditioner for solving the optimal boundary control problem for cooling an electronic circuit. The constitutive equations are obtained by modeling the circuit as a parabolic partial differential equation, where the cooling mechanisms are modeled using Neumann boundary conditions (control variables) [1]. The optimal control problem is obtained by associating to the state and control variables, a linearized quadratic cost function like in [4]. The classical finite element method - (Galerkin)- was implemented for the spatial discretization resulting in a large scale system ODEs [2].

For the implementation of the preconditioner the time domain is divided into coarse time intervals, where the initials conditions are arbitrary. Each of these coarse time intervals are divided into fine time intervals that are solved simultaneously in several processors. The Conjugate Gradient method is used to update the initial conditions and the control variables, the Parareal method is used as a preconditioner to accelerate its convergence. The numerical results show that the parallel algorithm reduces the computing time and allows the solving of control problems that demand large memory.

References

- [1] Neittaanmäki, P.;Tiba D. Optimal Control of Nonlinear Parabolic Systems, Marcel Dekker (1994), 339 pages.
- [2] Carstensen C., Alberty J., Funken S.; Remarks around 50 lines of Matlab: short finite element Implementation. Numerical Algorithms, Numerical Algorithms 20 (1999), 20:117-137.
- [3] Maday I., Turinici G.; "A parareal in time procedure for the control of partial differential equations. Numerical Analysis", C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002), 387-392.
- [4] Schaefer C. E., Mathew T., Sarkis M.; Block iterative algorithms for the solution of parabolic optimal control problems, Lecture Notes in Computer Science, 4395 (2007) 452-465.



Gracias por su Atención