# UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN

# Facultad de Ingeniería

Ingeniería Electrónica



Algoritmo Parareal en el estudio de Ondas Electromagnéticas - 2D

Juan Emilio Gavilán Garay

Eduardo Antonio De Los Santos Núñez

San Lorenzo, Paraguay 2013

## Miembros del Consejo Directivo Consejeros Titulares

Prof. Ing. Isacio Vallejos Aquino (Decano) Prof. Ing. María Teresa Pino Rodriguez (Vice Decano) Prof. Ing. Amilcar Gaspar Troche Escobar (Docente) Prof. Ing. César Ricardo Sitjar Canela (Docente) Prof. Ing. Francisco R. Delgado Marquez (Docente) Prof. Ing. Diógenes Sartorio Aquino (Docente) Prof. Ing. irilo Jorge Hernáez Medina (Docente) Prof. Ing. Higinio Cesar Moreira (Docente - C.S.U.) Ing. Pablo Adriano Rodriguez Rodas (No Docente) Ing. Gabriel Enrique Fleitas Ferrari (No Docente) Est. Víctor Omar Morínigo López (No Docente) Est. Jorge Manuel Muller Giménez (No Docente) Est. Vicente Javier Chaparro Ruíz Díaz (Estudiante) **Consejeros Suplentes** Prof. Ing. Carlos María Montero Volpe (Docente - CSU) Prof. Ing. Luís María Gulino Canese (Docente) Ing. Ignacio Daniel Velázquez Guachiré (No Docente) Ing. Alfredo Javier Coronel Correa(No Docente) Est. Víctor Daniel Portillo Galván (Estudiante) Est. Justo Javier Fernández Argüello (Estudiante) Est. Sergio Daniel Vera Urquhart (Estudiante)

# AGRADECIMIENTOS

# AGRADECIMIENTOS INSTITUCIONALES

## ABSTRACT

The science and engineering problems that require the electromagnetic waves simulations in a rapid and accurate manner, generally faces the challenge of solving a big equations system in an aceptable time. Obtain the solution for this equations system frequently demands the use of powerful computational systems.

The equations that model the electromagnetic waves behaviors are the Maxwell's equations, of which is obtained the differential hyperbolic equation known as *waves equation* (this procedure is detailed in chapter 2), which is solved (as an academic case) with Dirichlet boundary conditions, such that it can be know the analytic solution of the waves equation to validate the numerical solution obtained by the implemented algorithm.

In the present work is implemented the Parareal algorithm suggested by Lions *et-al* [3], with the aim of splitting the problem in the time domain in various temporal intervals by a coarse mesh and thus enable that to each sub problem can be dedicated a computer of the network available, allowing solve all sub problems in a simultaneous manner, being achieved an economic alternative to solve the above referred problems. To obtain the numerical solution of the waves equation, is employed the spectral element method and the discontinuous Galerkin method for the spatial and temporal discretization, respectively. Since the initial conditions of each interval will be estimated in the first iteration (except the first interval), there will be an error that must be corrected by the correction iterations, until achieve a desired tolerance. Comparisons made between the analytical solution and the numerical solution obtained show that the implemented algorithm approaches so correct to the wave equation.

### RESUMEN

Los problemas de ciencia e ingeniería que requieren la simulación de ondas electromagnéticas de manera rápida y precisa, generalmente encaran el desafío de resolver un sistema de ecuaciones de gran tamaño en un tiempo aceptable. Obtener la solución para este sistema de ecuaciones frecuentemente demanda el uso de poderosos sistemas computacionales.

Las ecuaciones que modelan el comportamiento de las ondas electromagnéticas son las ecuaciones de Maxwell, de las cuales se obtiene la ecuación diferencial hiperbólica conocida con el nombre de *ecuación de ondas* (procedimiento que se detalla en el capítulo 2), la cual es resuelta (como caso académico) con condiciones de frontera de Dirichlet, tal que pueda conocerse la solución analítica de la ecuación de ondas para validar la solución numérica obtenida por el algoritmo implementado.

En el presente trabajo se implementa el algoritmo Parareal sugerido por Lions *et-al* [3], con el objetivo de dividir el problema en el dominio temporal en varios intervalos temporales mediante un mallado grueso y así posibilitar que a cada sub-problema se dedique una computadora de la red disponible, permitiendo la resolución de todos los subproblemas de manera simultánea, consiguiéndose una alternativa económica de solución a los problemas anteriormente referidos. Para obtener la solución numérica de la ecuación de ondas, se emplea el método de elementos espectrales y el método de Galerkin discontinuo para la discretización espacial y temporal, respectivamente. Puesto que las condiciones iniciales de cada intervalo será estimado en las primeras iteraciones (a excepción del primer intervalo), existirá un error que deberá ser corregido mediante iteraciones de corrección, hasta alcanzar una tolerancia deseable. Comparaciones realizadas entre la solución analítica y la solución numérica obtenida muestran que el algoritmo implementado aproxima de manera correcta a la ecuación de ondas.

# ÍNDICE GENERAL

1.	Intro	oducció	n		7	
	1.1.	Antece	edentes .		9	
	1.2.	Solucio	ón propue	sta - Relevancia y Originalidad del trabajo	10	
2.	Teoría Electromagnética			15		
	2.1.	Ecuaci	ones de M	laxwell	15	
	2.2. La ecuación de ondas					
		2.2.1.	Ecuaciór	n de ondas para el espacio libre	16	
			2.2.1.1.	y desventajas de cada uno	17	
3.	Disc	Discretización Espacial				
	3.1.	Métod	o de Elem	entos Espectrales	19	
	3.2.	Métod	o de Resid	luos Ponderados	20	
		3.2.1.	Método	de Galerkin	21	
	3.2.2. Formulación de Galerkin				21	
			3.2.2.1.	Forma fuerte y definición de las condiciones de frontera	21	
			3.2.2.2.	Forma débil e imponiendo las condiciones de frontera		
				de Dirichlet: des-plazando una solución conocida	22	
			3.2.2.3.	Particionamiento del dominio de la solución	24	
			3.2.2.4.	Operaciones en los elementos $\Omega^e$	24	
			3.2.2.5.	Ecuación semidiscreta	25	
			3.2.2.6.	Integración en una región elemental genérica $\Omega^e$	27	
			3.2.2.7.	Diferenciación en una región elemental genérica $\Omega^e$	28	
			3.2.2.8.	Integración en el interior de la región estándar $\Omega_{st}$	28	
			3.2.2.9.	Ensamblamiento global de las matrices locales y co-		
				nectividad de las regiones elementales	31	
4.	Disc	retizaci	ón Tempo	oral	33	
	4.1.	Métod	o de Galer	kin Discontinuo	33	
		4.1.1.	Fundame	entación teórica del método DG	33	

Univ Trat	versidad Nacional de Asunción Facultad de Ingen ajo Final de Grado Ingeniería Electró	Facultad de Ingeniería ngeniería Electrónica	
	Algoritmo Parareal en el estudio de Ondas Electromagnéticas - 2D		
	4.1.2. Condicionamiento débil de la continuidad entre los elementos $I_n$ . 4.1.3. Función de mapeo entre un elemento genérico $I_n$ y el elemento estándar $I_{at}$	35 37	
	4.1.4.Funciones Base4.1.5.4.1.5.Ecuación Discreta4.1.6.Integración en el interior de la región estándar $I_{st}$	37 38 40	
5.	El algoritmo Parareal 5.1. Descripción del algoritmo Parareal	<b>41</b> 41	
6.	Resultados Numéricos         6.1. Experimento 1.         6.2. Experimento 2.         6.3. Desempeño esperado del algoritmo Parareal         6.3.1. Experimento 3 (Escalabilidad Fuerte)         6.3.2. Experimento 4 (Escalabilidad Débil)         6.4. Buscando restricción         6.4.1. Experimento 5         6.4.2. Experimento 6	<b>45</b> 49 52 52 54 55 56 56	
7.	Conclusiones Finales y Trabajos Futuros	58	
А.	Correcta elección de los espacios de funciones A.1. Construcción de un subespacio de dimensión finita de $H^1(\Omega)$ A.2. Construyendo una base para $\mathcal{V}^{\delta}$	<b>59</b> 59 61 61 63 63	
B.	<b>Método de Condensación Estática</b> B.1. Cálculos Auxiliares	<b>66</b> 67	
C.	Presentaciones nacionales e internacionales	70	
Bib	liografía	80	

# ÍNDICE DE FIGURAS

1.1.	Imágenes capturadas de la simulación de campos electromagnéticos ra- diados de una antena para la estación espacial internacional. Fuente: [21].	13
1.2.	Imágenes capturadas de la simulación de campos electromagnéticos ra- diados por una antena monopolo sobre un Robonauta. Fuente: [21]	14
3.1.	Para construir una expansión de funciones pertenecientes a $C^0$ a partir de múltiples elementos de diferentes formas, cada región elemental $\Omega^e$ es maneada a una región estándar $\Omega_{\pm}$ en la cual todas las operaciones son	
	evaluadas. Fuente: [19]	25
3.2.	Transformación de una región triangular a otra región cuadrangular. Fuen- te: [19]	29
3.3.	Interpretación gráfica de la integración global a partir de la integración	/
34	local. Fuente: [19]	31 32
э.т.		52
4.1. 4.2.	Definición de $\mathbf{Y}(t)$ en $t_n$ . Fuente: Elaboración Propia	34 37
4.3.	Esquema gráfico de las funciones base del método DG. Fuente: Elabora-	20
4.4.	Esquema gráfico para los elementos espacio-temporales del método SEM-	38
	DG. Fuente: Elaboración Propia	39
5.1.	Esquema gráfico del algoritmo Parareal. Fuente: [37]	42
6.1.	Error en la norma máxima entre la solución del esquema numérico se- cuencial y la solución analítica para polinomios de orden variado, con 64	
	pasos temporales. Fuente: Elaboración Propia.	45
6.2.	Error en la norma máxima entre la solución del esquema numérico se- cuencial y la solución analítica para polinomios de orden variado, con	
	128 pasos temporales. Fuente: Elaboración Propia	46
6.3.	Error en la norma máxima entre la solución del esquema numérico se- cuencial y la solución analítica para polinomios de orden variado, con	
	256 pasos temporales. Fuente: Elaboración Propia	46

Universidad Nacional de Asunción	Facultad de Ingeniería
Trabajo Final de Grado	Ingeniería Electrónica
Algoritmo Parareal en el estudio de Ondas Electromagnéticas -	2D

6.4.	Error en la norma máxima entre la solución del esquema numérico se- cuencial y la solución analítica para polinomios de orden variado, con	
6.5.	512 pasos temporales. Fuente: Elaboración Propia	47
6.6.	elementos triangulares $\Omega^e$ . Fuente: Elaboración Propia	47
6.7.	Elementos triangulares $\Omega^e$ . Fuente: Elaboración Propia Error en la norma máxima entre la solución del esquema numérico se- cuencial y la solución analítica para polinomios de orden variado, con 64 alementos triangulares $\Omega^e$ . Fuente: Elaboración Propia	48
6.8.	Error en la norma máxima entre la solución del esquema numérico se- cuencial y la solución analítica para polinomios de orden variado, con $128$ elementos triangulares $\Omega^e$ Euente: Elaboración Propia	40
6.9.	Error en la norma máxima entre la solución del esquema numérico se- cuencial y la solución brindada por el algoritmo Parareal, también entre la derivada de la solución obtenida del esquema numérico secuencial y la derivada de la solución obtenida del algoritmo Parareal, para $\hat{\ell} = 32$ y	ν
6.10.	$\hat{k} = N$ . Fuente: Elaboración Propia	50
6.11.	y $\hat{k} = N$ . Fuente: Elaboración Propia	50
6.12.	grueso, para $\hat{k} = 16$ y $\hat{\ell} = 16$ . Fuente: Elaboración Propia	51
6.13.	grueso, para $\hat{k} = 32$ y $\hat{\ell} = 16$ . Fuente: Elaboración Propia	51
6.14.	grueso, para $\hat{k} = 128$ y $\hat{\ell} = 16$ . Fuente: Elaboración Propia	52
6.15.	4096. Fuente: Elaboración Propia	54
	Fuente: Elaboración Propia.	55
A.1.	Región estándar triangular $\Omega_{st}$ para una partición $\mathcal{T}(\Omega)$ del dominio, expresado en las coordenadas locales Cartesianas $(\xi_1, \xi_2)$ . Fuente: [19].	62

A.2.	Elemento genérico $\overline{\Omega^e}$ con $N_m = 6$ nodos. Fuente: [27]	62
A.3.	Polinomios de Lagrange en un elemento genérico $\overline{\Omega^e}$ para $P = 2$ . Fuente:	
	[27]	63
A.4.	Distribución espacial de la función de Lebesgue. El máximo de la función	
	de Lebesgue proporciona la constante de Lebesgue $\Lambda_{N_m}$ . Fuente: [19]	64
A.5.	Puntos de Fekete. Fuente: [19]	65
C 1	Resumen sometido al CMAC-SE, Pág, 1, Fuente: Elaboración Propia	71
$C_{2}$	Resumen sometido al CMAC-SE. Pág. 2. Fuente: Elaboración Propia.	72
C.2.	Resulted solution of CMAC-SE. Lag. 2. Fuence. Elaboration Fropia.	72
C.3.	Carta de aceptación del trabajo para el congreso. Fuente: SBMAC	73
C.4.	Póster presentado al CMAC-SE. Fuente: Elaboración Propia.	74
C.5.	Handout presentado al CMAC-SE. Pág. 1. Fuente: Elaboración Propia	75
C.6.	Handout presentado al CMAC-SE. Pág. 2. Fuente: Elaboración Propia	76
C.7.	Handout presentado al CMAC-SE. Pág. 3. Fuente: Elaboración Propia	77
C.8.	Handout presentado al CMAC-SE. Pág. 4. Fuente: Elaboración Propia	78
C.9.	Certificado de participación en el congreso. Fuente: SBMAC	79

# ÍNDICE DE CUADROS

6.1.	Cada entrada del cuadro es la cantidad de iteraciones $k_s(N)$ del algorit- mo Parareal para alcanzar la convergencia, asumiendo que el tamaño del problema se mantiene constante ( $\hat{k} \cdot \hat{\ell} = 4096$ ), utilizando polinomios de tercer orden en la discretización del problema en el dominio espacial.	
6.2.	Fuente: Elaboración Propia	53
	Parareal para alcanzar la convergencia, asumiendo que el tamaño del pro- blema aumenta y considerando $\hat{\ell} = 16$ constante, se utilizan polinomios de tercer orden en la discretización del problema en el dominio espacial	
	Fuente: Elaboración Propia.	54
6.3.	Cada entrada del cuadro es $(\hat{\ell}, \hat{k})$ y la cantidad de iteraciones $k(N)$ del al- goritmo Parareal para alcanzar la convergencia, se utilizan polinomios de segundo orden en la discretización del problema en el dominio espacial.	
	Fuente: Elaboración Propia.	56
6.4.	Cada entrada del cuadro es la cantidad de iteraciones $k$ del algoritmo Parareal para alcanzar la convergencia, se utilizan polinomios de segundo orden en la discretización del problema en el dominio espacial. Fuente:	
	Elaboración Propia.	57
A.1.	Constante de Lebesgue $\Lambda_{N_m}$ (donde $N_m = \frac{(P+1)(P+2)}{2}$ ) para un conjunto de puntos en una región triangular como función del orden del polinomio $P$ para puntos electrostáticos, puntos de Fekete y una distribución de puntos especiedes en la majón triangular. Exertex [10]	65
	puntos equi-espaciados en la region triangular. Fuente: [19].	03

# CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN

In recent years, antenna technologies have received heightened interest because of their importance in wireless communication, remote sensing, space exploration, defense, electronic warfare, and many other electronic systems. Quantitative antenna analysis is critical to the design and optimization of antennas, especially complex antennas that are not easily designed by intuitive approaches. In a typical antenna analysis, the goal is to find the radiated field and input impedance. In the case of multiple antennas, such as antenna arrays, it is also important to quantify the mutual coupling between antennas, which can be characterized by either a mutual impedance matrix or a scattering matrix. The calculation of radiated fields, input impedances, and scattering matrices requires solving Maxwell's equations subject to certain boundary conditions determined by antenna configurations. Unfortunately, Maxwell's equations can be solved analytically only for a very few idealized antenna geometries. Whereas a variety of approximate analytical techniques have been developed for relatively simple antennas, accurate and complete analysis of complex antennas, especially antenna arrays, can be accomplished only through a numerical method that solves Maxwell's equations numerically with the aid of high-speed computers.<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Finite Element Analysis of Antennas and Arrays [1].

Numerical computation is more and more used in engineering sciences to develop new devices or to optimize operating apparatus. Many of the numerical modeling packages make use of the FEM method. Unfortunately, this method requires the 3D mesh of the whole studied domain. This is especially expensive for open boundary problems. Furthermore, the size of the 3D mesh makes the modeling of large, coupled or complex problems difficult or even impossible to perform. Only parallel computers provide the increase in computing performance required to solve such types of problems today. Two reasons may be highlighted: when large memory is needed because of a large amount of data, or when speed is needed to obtain the solution. <sup>b</sup>

<sup>b</sup>Parallel Computing for Electromagnetic Field Computation [2].

## 1.1. Antecedentes

La rápida evolución de las capacidades de almacenamiento y cálculo de las computadoras actuales, posibilitaron un enorme avance en otras áreas de la ciencia y la tecnología esto es en gran parte debido a que gradualmente se están obteniendo modelos matemáticos que describen de manera más precisa los fenómenos de interés en estudio y esto da la posibilidad de migrar de costosos ensayos en los laboratorios (que aún siguen siendo importantes en la etapa de validación de los modelos estudiados) a las simulaciones de los fenómenos de interés. Los métodos numéricos que resuelven las ecuaciones de Maxwell, se han convertido en una herramienta indispensable para el análisis de las antenas a causa de la precisión de las ecuaciones de Maxwell en la predicción del comportamiento de los campos electromagnéticos: Si estas ecuaciones son resueltas de manera correcta, la solución predice resultados experimentales y desempeño de los prototipos de antenas estudiados. Las herramientas de simulación numérica son aplicables a una amplia variedad de aplicaciones ingenieriles, como ser: diseño de antenas, predicción del desempeño de las antenas ante diversas estructuras, calibración de sistemas de antenas, estimación de la interferencia entre múltiples antenas en un mismo sitio, entre otras [1]. Algunas aplicaciones se muestran en las Figuras 1.1 y 1.2.

Gran cantidad de los fenómenos que se observan en la naturaleza dependen de la evolución temporal [4], esto significa que los modelos matemáticos que describen los comportamientos de los mismos dependerán de una variable temporal, como por ejemplo las ecuaciones de Maxwell. A su vez estos modelos matemáticos en la mayoría de los casos son expresados como sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) o como sistemas de ecuaciones en derivadas parciales (EDPs).

Cuando se requiere una simulación de gran precisión en tiempo real o casi en tiempo real <sup>1</sup> como por ejemplo los simuladores de navegación o los problemas de control [4], las simulaciones pretendidas poseen un elevado costo computacional en términos de velocidad de cálculo y/o de capacidad de memoria [5], los mismos requerimientos se presentan en las simulaciones de propagaciones de campos electromagnéticos sobre una estructura como las mostradas en las Figuras 1.1 y 1.2, puesto que para tener precisión en la solución de las ecuaciones de Maxwell, las dimensiones características de los elementos del mallado deben ser del mismo orden que la longitud de la onda propagada (generalmente microondas), causando esto que la cantidad de elementos requeridos para estudiar el objeto de interés sea excesiva para el manejo de las computadoras convencionales actuales [6].

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Una manera de ejemplificar el concepto de simulación en tiempo real es considerar la evolución de un fenómeno en un lapso de tiempo, para que la simulación del mismo fenómeno sea considerada en tiempo real o casi real la evolución de la simulación debe acompañar al fenómeno en el mismo tiempo o en un tiempo muy próximo.

# 1.2. Solución propuesta - Relevancia y Originalidad del trabajo

La problemática que se presenta en la resolución de las ecuaciones de Maxwell, descrita en la sección anterior es encarada en la actualidad desde diversos enfoques, algunos de ellos son: **simplificación de modelos**, en este enfoque lo que se pretende es reducir el modelo completo a uno más sencillo, de tal manera a considerar en el mismo solamente aquellos fenómenos de interés para el estudio desarrollado. Otra alternativa a esta problemática es buscar **nuevos esquemas numéricos óptimos**, tal que sean eficaces y eficientes, en el sentido de obtener soluciones de gran precisión, empleando la menor cantidad de recursos computacionales que sea posible, en este enfoque se puede mencionar el trabajo presentado por el Dr. Sc. Max Duarte, titulado: *Algoritmos adaptativos en tiempo y espacio para la simulación de frentes de reacción multi-escala* [7]. Por último mencionamos la **paralelización a través de los pasos**, este tipo de paralelismo está basado en un esquema predictor-corrector, en el cual varios cálculos secuenciales son desarrollados de manera concurrente mediante un método numérico [8]. Es en este último enfoque donde el presente trabajo se posiciona, esto será detallado más adelante.

Puesto que la tendencia de crecimiento en la velocidad de cálculo de los procesadores de núcleo único, establecido por la Ley de Moore, se está enfrentando a límites físicos a causa de la excesiva densidad de transistores por núcleo, surge como alternativa válida la arquitectura de procesadores multiples, estableciéndose como una arquitectura dominante en los sistemas computacionales domésticos como así también en los sistemas computacionales de alto desempeño [9, 5]. Esta tendencia de evolución en las computadoras abre la posibilidad de conseguir la potencia computacional requerida para encarar la problemática descrita en la sección anterior [10].

Como se ha mencionado anteriormente, varios modelos matemáticos de fenómenos naturales son dependientes del tiempo. Trabajos importantes fueron desarrollados con el fin de obtener métodos numéricos para la resolución de estos modelos en el tiempo. La mayoría de los métodos obtenidos tienen una cosa en común: son secuenciales. Estos necesitan calcular la solución de la ecuación en un paso de tiempo con el fin de encontrar la solución en un paso de tiempo posterior. El tiempo mismo ha sido considerado puramente secuencial.

En el contexto de resolución de EDPs dependientes del tiempo, una gran cantidad de algoritmos paralelos han sido desarrollados también para la discretización espacial. Uno de estos métodos exitosos es llamado método de descomposición de dominios. Estos métodos son atractivos desde una perspectiva paralela como también secuencial [4].

Con el trabajo de Lions, Maday y Turinici en el 2001, surge una nueva propuesta para el desarrollo de métodos numéricos dedicados a resolver problemas de evolución temporal en paralelo, denominado algoritmo o método Parareal [3]. El nombre del algoritmo ya indica la intención de su diseño. El objetivo es paralelizar los cálculos en tiempo real de ecuaciones que envuelven una evolución temporal, cuyas soluciones no son obtenibles en tiempo real utilizando una única computadora de procesador simple [11]. El algoritmo Parareal propone usar una descomposición del dominio temporal, utilizando una partición

Universidad Nacional de Asunción	Facultad de Ingeniería
Trabajo Final de Grado	Ingeniería Electrónica
Algoritmo Parareal en el estudio de Ondas Electromagnéticas -	2D

gruesa y otra fina del tiempo. La partición gruesa divide al dominio temporal en varios subdominios y la partición fina tiene como función la discretización de los subdominios. Estas dos particiones son combinadas con un esquema *predictor-corrector*. La partición gruesa y el predictor - corrector son actualizados de manera estrictamente secuencial. Cada uno de estos subdominios son resueltos simultáneamente utilizando una plataforma computacional paralela. En el algoritmo se realizan iteraciones del esquema predictor - corrector - corrector hasta la convergencia [12]. El algoritmo Parareal utilizado como precondicionador en problemas parabólicos, posee propiedades de convergencia óptimas y escalabilidad paralela [13, 14].

Aunque la versión original del algoritmo Parareal presenta dificultades para encarar problemas Hiperbólicos de segundo orden [15], en el año 2006 C. Farhat *et al* introdujeron modificaciones al algoritmo Parareal [16], mostrando un buen desempeño del algoritmo modificado para problemas Hiperbólicos lineales de segundo orden en problemas de dinámica estructural [17] y en el 2008 también en problemas no lineales de dinámica estructural [10], este algoritmo fue denomindado *Parallel Implicit Time-Integrators* (PITA). En el año 2002 Y. Maday *et al* también introdujeron modificaciones al algoritmo Parareal original [18], resultando en un algoritmo equivalente al Parareal original en problemas lineales, pero prestando un mejor desempeño en los problemas no lineales, al mismo tiempo esta modificación del Parareal original permite la generalización del mismo a virtualmente cualquier integrador temporal. En el año 2006, en la referencia [5] fue demostrado que PITA y el algoritmo Parareal modificado por Y. Maday en [18] son idénticos en el caso lineal, pero difieren en el caso no lineal [17].

Puesto que el algoritmo Parareal es completamente independiente del problema, deja mucha flexibilidad en la elección de un esquema de discretización temporal [11]. Teniendo en cuenta la generalidad que presenta el algoritmo Parareal, se hace sumamente interesante estudiar la propuesta hecha por D. Mercerat et al en el año 2009, para atacar los problemas Hiperbólicos lineales de segundo orden, ya que a diferencia de la propuesta de C. Farhat, D. Mercerat sugiere usar la versión original del algoritmo Parareal, aprovechando de esta manera la generalidad del mismo, con la restricción de utilizar en la discretización temporal de la partición gruesa del dominio temporal el esquema numérico conocido como Discountiunuos Galerkin (DG), logrando de esta manera mitigar los problemas de estabilidad que se presentan en los problemas Hiperbólicos lineales de segundo orden. Esta elección es motivada por el problema inherentemente discontinuo que se tiene que resolver por el solver<sup>2</sup> de la partición gruesa en el contexto del Parareal [12]. Es importante hacer notar que el algoritmo Parareal no puede exceder la precisión o la estabilidad del esquema numérico que está siendo empleado [11], teniendo en cuenta esto se utilizará en la discretización espacial el esquema numérico conocido como Spectral Element Method (SEM), puesto que presenta una convergencia exponencial para soluciones suaves [19].

Para el estudio de los modos de propagación de las ondas electromagnéticas en las guías de ondas, independientemente de la forma que asuman estas, se estudian las ecua-

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Solver hace referenecia a un método numérico que soluciona un problema dado.

Universidad Nacional de Asunción	Facultad de Ingeniería
Trabajo Final de Grado	Ingeniería Electrónica
Algoritmo Parareal en el estudio de Ondas Electromagnéticas -	2D

ciones de Maxwell, sujetas a diferentes condiciones de frontera dependiendo del problema analizado [20]. Las ecuaciones de Maxwell junto con la ecuación de continuidad que expresa el principio de conservación de la carga y la ecuación de fuerza de Lorentz, constituyen la base del electromagnetismo. Cualquier fenómeno clásico puede explicarse en base a estas seis ecuaciones [6]. Un proceso que generalmente suele seguirse para obtener soluciones de los campos: Intensidad de Campo Eléctrico e Intensidad de Campo Magnético, es combinar las ecuaciones de Maxwell de tal manera que se elimine uno de los campos mencionados anteriormente, para dar una EDP conocida como *ecuación de onda*, que es una ecuación hiperbólica lineal inhomogénea de segundo orden, si se considera al medio de propagación como el aire o el vacío, caso que se plantea en el presente trabajo, la ecuación descrita anteriormente se torna homogénea [20].

Es importante mencionar que el campo más valioso de aplicación de las microondas es el de telecomunicaciones, en este terreno las microondas actúan generalmente como portadoras de información, mediante una modulación o codificación apropiada. Algunos de los estándares que operan en el rango de frecuencias de las microondas son el Bluetooth y el WiFi, también las centrales telefónicas utilizan este rango de frecuencias para las comunicaciones satelitales, en el tramo de subida/bajada de señales a las antenas e incluso los teléfonos celulares operan en el rango de frecuencias de las microondas. Además se puede citar otras aplicaciones en este rango de frecuencias como ser los sistemas de radares y también el de hornos de microondas.

Por otro lado, resolver el problema de esparcimiento de ondas electromagnéticas mediante la formulación de control, es equivalente a resolver dos ecuaciones de onda homogéneas como las anteriormente descritas, que corresponden a la ecuación de estado y la ecuación adjunta del problema [6]. Razón por la cual el trabajo desarrollado propone una alternativa eficiente de solución al problema de esparcimiento de ondas, basándose en el trabajo previo del Ing. Inocencio Ortiz, titulado: *Formulación de Control para el Problema de Esparcimiento de Helmholtz* [6].

El trabajo a desarrollar se hace relevante en dos aspectos, uno de ellos es por la potencial contribución del algoritmo Parareal en la ágil obtención de soluciones cada vez más precisas en las simulaciones de las ecuaciones de Maxwell. El otro aspecto relevante de este trabajo es que cubre la necesidad del uso eficiente de los nuevos supercomputadores/clusters, puesto que el esquema numérico a obtener se podrá ejecutar en la cantidad de computadores que se tengan conectados en red disponibles.

El presente trabajo se basa principalmente en las recomendaciones hechas por D. Mercerat [12], el mismo innova al encarar un problema bi-dimensional, dejando una completa documentación que describe los fundamentos y las técnicas de aplicación de los métodos numéricos utilizados en el desarrollo del trabajo, resultando en un material autocontenido.



(a) Medición de campos electromagnéticos radiados por una antena en una cámara anecoica e imagen del soporte de la antena.



(b) Imágenes de la simulación del patrón de ganancia de la antena (borde superior izquierdo) y patrón de radiación de los campos electromagnéticos sobre la antena y su soporte (borde inferior derecho).

Figura 1.1: Imágenes capturadas de la simulación de campos electromagnéticos radiados de una antena para la estación espacial internacional. Fuente: [21].



(a) Imagen de un Robonauta para la estación espacial internacional.



(b) Imágenes de la simulación del patrón de radiación de los campos electromagnéticos sobre el Robonauta.

Figura 1.2: Imágenes capturadas de la simulación de campos electromagnéticos radiados por una antena monopolo sobre un Robonauta. Fuente: [21].

# CAPÍTULO 2 TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA

### 2.1. Ecuaciones de Maxwell

Los campos electromagnéticos macroscópicos clásicos en  $\mathbb{R}^3$  son descritos por cuatro funciones vectoriales de la posición  $x \in \mathbb{R}^3$  y del tiempo  $t \in \mathbb{R}$ , llamados *Intensidad de Campo Eléctrico E*, *Desplazamiento Eléctrico D*, *Inducción Magnética B* e *Intensidad de Campo Magnético H*<sup>1</sup> [22, 23]. Los *campos D* y *B* pueden ser suprimidos de la formulación matemática mediante apropiadas leyes constitutivas dependientes del medio en consideración. Así,  $\mathcal{E}$  y  $\mathcal{H}$  son llamados *campos fundamentales*.

Los campos electromagnéticos son originados por distribuciones de cargas eléctricas estáticas y/o flujos contínuos de cargas, (corrientes). La distribución de cargas es especificada por una función escalar  $\rho$  conocida como *densidad de carga*, en tanto que la corriente es especificada por una función vectorial  $\mathcal{J}$  conocida como *densidad de corriente*.

En términos de los cuatro *campos* arriba citados y con las funciones  $\rho$  y  $\mathcal{J}$  dadas, las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial son:

$$\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathcal{E} = 0, \qquad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathcal{D} = \rho, \qquad (2.2)$$

$$-\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} + \nabla \times \mathcal{H} = \mathcal{J}, \qquad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathcal{B} = 0, \qquad (2.4)$$

donde  $\nabla$  es el operador "nabla". Las ecuaciones (2.1) - (2.3) son la Ley de Faraday, la Ley de Gauss y la Ley de Ampere generalizada, respectivamente. La ecuación (2.4) expresa la naturaleza solenoidal de la inducción magnética, es decir que no existen monopolos magnéticos.

### 2.2. La ecuación de ondas

Para analizar la interacción de un campo electromagnético con un medio material se introducen dos *leyes constitutivas* que relacionan los campos  $\mathcal{D}$  y  $\mathcal{B}$  con  $\mathcal{E}$  y  $\mathcal{H}$  respectivamente. Estas leyes constitutivas son:

$$\mathcal{D} = \epsilon \mathcal{E}, \qquad (2.5)$$

$$\mathcal{B} = \mu \mathcal{H}, \tag{2.6}$$

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>En adelante los llamaremos Campo Eléctrico, Desplazamiento Eléctrico, Inducción Magnética y Campo Magnético respectivamente

donde  $\epsilon$  y  $\mu$  son la *permitividad eléctrica* y la *permeabilidad magnética* respectivamente [24]. En medios heterogéneos, anisótropos, y no lineales,  $\epsilon$  y  $\mu$  son magnitudes tensoriales que pueden depender de manera complicada del campo electromagnético (Ver [24] para el estudio en medios materiales).

Con las ecuaciones (2.5) y (2.6), obtenemos las ecuaciones de Maxwell en términos de los *campos fundamentales*  $\mathcal{E}$  y  $\mathcal{H}$ :

$$\frac{\partial(\mu\mathcal{H})}{\partial t} + \nabla \times \mathcal{E} = 0, \qquad (2.7)$$

$$\nabla \cdot (\epsilon \mathcal{E}) = \rho, \qquad (2.8)$$

$$-\frac{\partial(\epsilon \mathcal{E})}{\partial t} + \nabla \times \mathcal{H} = \mathcal{J}, \qquad (2.9)$$

$$\nabla \cdot (\mu \mathcal{H}) = 0. \tag{2.10}$$

En el vacío  $\epsilon$  y  $\mu$  son escalares constantes y denotados por  $\epsilon_0$  y  $\mu_0$ . En este trabajo el medio en consideración será aire, para el cual es válido usar  $\epsilon_0$  y  $\mu_0$  cuyos valores en unidades del SI son;  $\epsilon_0 \approx 8,854 \times 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$  y  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Hm}^{-1}$ . Así, para el aire tenemos:

$$\mu_0 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \nabla \times \mathcal{E} = 0, \qquad (2.11)$$

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathcal{E} = \rho, \qquad (2.12)$$

$$-\epsilon_0 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \nabla \times \mathcal{H} = \mathcal{J}, \qquad (2.13)$$

$$\nabla \cdot \mathcal{H} = 0. \tag{2.14}$$

De las soluciones generales de las ecuaciones de Maxwell (2.1) - (2.4), existen dos situaciones particulares que tienen importancia práctica. En primer lugar, la electrostática y la magnetostática en las que las funciones  $\rho$  y  $\mathcal{J}$  son constantes y, por tanto,  $\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = 0$ . La segunda situación particular corresponde al caso en que, siendo  $\rho = \mathcal{J} = 0$ , se tiene que  $\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \neq 0$  y  $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \neq 0$ , esto se interpreta como que en ausencia de cargas existen campos electromagnéticos variables, situación que se da en la propagación de ondas en el vacío y también en el aire. Estos campos constituyen las llamadas *ondas electromagnéticas* [23].

### 2.2.1. Ecuación de ondas para el espacio libre

Al estudiar la propagación de las ondas electromagnéticas en el aire, se tiene en cuenta que  $\rho = \mathcal{J} = 0$ , resultando así que las ecuaciones de Maxwell (2.11) - (2.14) se reducen al siguiente sistema de ecuaciones homogéneas:

$$\mu_0 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \nabla \times \mathcal{E} = 0, \qquad (2.15)$$

$$\nabla \cdot \mathcal{E} = 0, \qquad (2.16)$$

$$-\epsilon_0 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \nabla \times \mathcal{H} = 0, \qquad (2.17)$$

$$\nabla \cdot \mathcal{H} = 0. \tag{2.18}$$

Mostraremos ahora que este sistema de ecuaciones admite soluciones no nulas para los campos  $\mathcal{E}$  y  $\mathcal{H}$ , y que constituyen las llamadas *ondas electromagnéticas*.

Tomando el rotacional de la ecuación (2.15) y utilizando la ecuación (2.17) obtenemos:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathcal{E}) = -\nabla \times \left(\mu_0 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}\right) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathcal{H}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2}.$$
 (2.19)

Considerando ahora la identidad  $\nabla \times \nabla \times \mathcal{A} \equiv \nabla(\nabla \cdot \mathcal{A}) - \Delta \mathcal{A}$ , donde  $\Delta \equiv \nabla^2$  es el operador laplaciano [25], y teniendo en cuenta la ec. (2.16), en la cual se tiene que  $\nabla \cdot \mathcal{E} = 0$ , se llega a la siguiente expressión:

 $\nabla \times (\nabla \times \mathcal{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathcal{E}) - \Delta \mathcal{E} = -\Delta \mathcal{E}, \qquad (2.20)$ 

usando las ecuaciones (2.19) y (2.20) obtenemos:

$$\Delta \mathcal{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} = 0, \qquad (2.21)$$

llamada *ecuación de onda para*  $\mathcal{E}$ , debido a que sus soluciones son campos eléctricos que se *propagan* en el espacio.

Como en cualquier punto del espacio este campo  $\mathcal{E}$  varía con el tiempo, existirá (de las ecuaciones de Maxwell) un campo  $\mathcal{H}$  no nulo también variable en el tiempo y que se propaga en el espacio. Del mismo modo, pudimos haber eliminado  $\mathcal{E}$  de las ecuaciones de Maxwell, con lo cual obtendríamos la *ecuación de onda para*  $\mathcal{H}$ :

$$\Delta \mathcal{H} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial t^2} = 0, \qquad (2.22)$$

la cual tendría por solución campos magnéticos que se propagan en el espacio, y que a su vez al ser variables en el tiempo generarían campos eléctricos que se propagan. Así, las ecuaciones de Maxwell implican la existencia de ondas de campos eléctricos y magnéticos. Como la existencia de uno de los campos implica la existencia del otro, al conjunto *onda électrica* y *onda magnética* se lo denomina *onda electromagnética* [23].

Si bien en una onda electromagnética siempre están presentes los campos  $\mathcal{E}$  y  $\mathcal{H}$ , basta con obtener la solución de la ecuación de onda para uno de ellos, pues el otro podrá calcularse a partir de las ecuaciones de Maxwell. Por razones prácticas se acostumbra trabajar con el campo eléctrico. Adoptaremos esa costumbre y en adelante analizaremos sólo la ecuación de onda (2.21) para el campo  $\mathcal{E}$  [23].

# 2.2.1.1. Dominios de solución de la ecuación de onda: ventajas y desventajas de cada uno

Como las ecuaciones de Maxwell pueden ser expresadas tanto en el dominio de la frecuencia como en el dominio temporal, una solución numérica a un problema electromagnético puede buscarse ya sea en el dominio temporal o en el dominio de la frecuencia. En principio es suficiente buscar la solución solamente en uno de los dominios mencionados, porque la solución en el otro dominio siempre puede obtenerse utilizando la transformación propuesta por Fourier.

Sin embargo, como el procedimiento de solución en cada dominio es diferente, ambas soluciones poseen diferentes ventajas. Por ejemplo, cuando un método numérico es empleado para resolver las ecuaciones de Maxwell en el dominio de la frecuencia, se tiene que resolver un sistema lineal de ecuaciones (ecuación matricial) para cada frecuencia. Sin embargo, para un problema electromagnético general, el sistema matricial es independiente de la excitación. Una vez que se invierte o factoriza la matriz, se vuelve trivial la búsqueda de una solución para una nueva excitación. Esta característica hace que el método numérico en el dominio de la frecuencia sea ideal para análisis de esparcimiento de ondas electromagnéticas, donde uno frecuentemente está interesado en el esparcimiento de las ondas electromagnéticas a causa de ondas planas incidentes en varias direcciones, y este dominio probablemente es considerado menos atractivo para el análisis de antenas, donde la cantidad de excitaciones diferentes es usualmente pequeño y la respuesta sobre un gran rango de frecuencias es típicamente requerido.

Por otro lado, cuando es adoptado un método numérico para resolver las ecuaciones de Maxwell en el dominio temporal, se tiene que buscar una solución mediante el avance temporal para cada excitación. Una vez obtenida la solución en el dominio temporal, se puede estudiar la solución sobre un amplio rango de frecuencias usando la transformación de Fourier. Sin embargo, la totalidad del proceso de solución debe repetirse para una excitación nueva. Por lo tanto, el método numérico en el dominio temporal es ideal para el análisis de antenas, donde uno está frecuentemente interesado en una solución que abarque un amplio espectro de frecuencias para una única o pocas excitaciones [1].

Debido a la importancia de los métodos numéricos en el dominio temporal para el análisis de antenas, el presente trabajo encara la solución de la ecuación de ondas (2.21) en el dominio temporal.

# CAPÍTULO 3 DISCRETIZACIÓN ESPACIAL

### **3.1.** Método de Elementos Espectrales

Los métodos espectrales globales utilizan una representación simple de una función u(x,t) en todo el dominio de definición de la misma, mediante una expansión en serie truncada, por ejemplo,

$$u(x,t) \approx u_N(x,t) = \sum_{n=0}^N u_n(t)\Phi_n(x),$$

donde  $\Phi_n(x)$  son las funciones base. Esta serie es reemplazada en la ecuación diferencial (o integral) y mediante la minimización de la función residual, los coeficientes desconocidos  $u_n(t)$  son calculados. Las funciones base pueden ser los polinomios de Chebyshev  $T_n(x)$ , los polinomios de Legendre  $L_n(x)$  (frecuentemente utilizados), o cualquier otro miembro de la familia de los polinomios de Jacobi  $P_n^{\alpha,\beta}$ .

Los métodos espectrales se pueden clasificar en dos categorías: el pseudo-espectral o métodos de colocación y el modal o métodos de Galerkin. La primera categoría está asociada con un mallado, esto es, a un conjunto de nodos, y debido a esto se lo refiere como *métodos nodales*. Los coeficientes desconocidos  $u_n(t)$  son obtenidos exigiendo que la función residual sea exactamente nula en el conjunto de nodos conside-rado. La segunda categoría está asociada con el método de residuos ponderados, donde la función residual es ponderada con un conjunto de *funciones test* que luego de integrarla en el dominio de definición de la función test, es igualada a cero. Otra diferencia a resaltar entre el método nodal y el método modal, es que en el método nodal los coeficientes representan el valor de la variable física en el nodo, a diferencia del método modal.

Los métodos de elementos espectrales (SEM) *Spectral Element Method*, son usualmente vistos como una generalización de los elementos finitos (FEM) *Finite Element Method* basados en la utilización de funciones polinomiales a trozos. La característica fundamental del método espectral, es su capacidad de proveer un incremento arbitrario en la precisión, simplemente aumentando el grado de las funciones polinomiales aproximantes. Sin embargo el incremento del grado espectral implica aumentar el esfuerzo computacional de cálculo del problema encarado.

Por otro lado, uno puede manipular el refinamiento de la malla para mejorar la precisión de la solución numérica, siguiendo de esta manera el enfoque de los elementos finitos estándar. Debido a esto, los métodos de elementos espectrales son también conocidos como métodos "/hp", donde "h" se refiere al tamaño de los elementos del mallado y "p" al grado de los polinomios.

Aunque en el desarrollo de la formulación de Galerkin para los elementos espectrales /hp, se utilizan expansiones polinomiales de alto orden, la teoría es tomada de la tradicional técnica de los elementos finitos, la cual está muy bien documentada en varios textos [26, 19, 27, 28].

# 3.2. Método de Residuos Ponderados

En la aproximación numérica de una solución exacta, típicamente se reemplaza una expansión *infinita* con una representación *finita*. Tal aproximación necesariamente significa que la ecuación diferencial no puede ser satisfecha en todo el dominio de interés y por lo tanto sólo podrá satisfacer una cantidad finita de *condiciones*. Es esta elección de las *condiciones* que se tienen que satisfacer lo que define el tipo de método numérico u operador proyección del esquema numérico. Por ejemplo, el método de colocación se refiere a un método donde la ecuación diferencial es satisfecha en algunas de las diferentes posiciones del dominio en vez de en todo el dominio de la solución.

El método de residuos ponderados ilustra cómo la elección de las diferentes funciones de ponderación (o funciones test) en una formulación integral (o débil) de la ecuación diferencial, puede ser usada para construir varios de los métodos numéricos comunes.

Para describir el método de residuos ponderados se considera una ecuación diferencial *lineal*, denotada por

$$\mathcal{L}(u) = 0, \tag{3.1}$$

en un dominio  $\Omega \times (0,T]$ , sujeto a condiciones iniciales y de frontera adecuados. Se asume que la solución u(x,t) puede ser representada con precisión mediante la solución aproximada de la forma

$$u^{\delta}(x,t) = u_0(x,t) + \sum_{i=1}^{N_{dof}} u_i(t)\Phi_i(x), \qquad (3.2)$$

donde  $\Phi_i(x)$  son funciones analíticas llamadas funciones base,  $u_i(t)$  son los  $N_{dof}$  coeficientes desconocidos, y  $u_0(x,t)$  es seleccionado para satisfacer las condiciones iniciales y de frontera. Es importante resaltar, que por definición,  $\Phi_i(x)$  satisface condiciones de frontera homogéneas (i.e., frontera de Dirichlet nulas) puesto que la función conocida  $u_0(x,t)$  ya satisface las condiciones de frontera del problema. Substituyendo la aproximación (3.2) en la ecuación (3.1) produce un residuo no nulo R:

$$\mathcal{L}(u^{\delta}) = R(u^{\delta}). \tag{3.3}$$

Aunque la aproximación tiene la forma dada por la ecuación (3.2), no se dispone una única manera de determinar los coeficientes desconocidos  $u_i(t)$ . Para solucionar este problema, se puede imponer una restricción sobre el residuo R, lo cual reducirá el problema inicial a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en  $u_i(t)$ .

Para definir el tipo de restricción que se impondrá sobre el residuo R, primero se debe introducir el producto interno de funciones (f, g) en el dominio  $\Omega$ , definido como:

$$(f,g) = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx.$$
(3.4)

La restricción impuesta sobre R es tal que el producto interno del residuo con respecto a una función test (o función de ponderación) es igual a cero, esto es,

$$(v_j(x), R) = 0, \qquad j = 1, \dots, N_{dof},$$

donde  $v_j(x)$  son las funciones tests. Luego se dice que el residuo ponderado es nulo y es de esta expresión que la técnica toma su nombre.

Según  $N_{dof} \to \infty$ , el residuo R tiende a cero, puesto que la solución aproximada  $u^{\delta}(x,t)$  se acerca a la solución exacta u(x,t). La naturaleza del esquema numérico está determinada por la elección de las funciones base  $\Phi_i(x)$  y las funciones test  $v_j(x)$ .

# 3.2.1. Método de Galerkin

En el método de Galerkin (también conocido como método de Bubnov - Galerkin), las funciones tests (o funciones de ponderación) son escogidas para ser las mismas que las funciones base, esto es  $v_i(x) = \Phi_i(x)$ .

El método de residuos ponderados ilustra cómo construir las diferentes técnicas numéricas y define el operador proyección que está siendo empleado en cada método. No define el tipo de funciones base o espacio de funciones de aproximación, aunque el uso de la terminología *espectral* o *elemento finito* nos proporciona mayor información. Es generalmente entendido que los métodos espectrales utilizan un conjunto de funciones base *globales*, esto es, las funciones base  $\Phi_i(x)$  tienen una definición no nula a través del dominio de la solución. Los elementos finitos, o alternativamente la técnica de volúmen finito utiliza un conjunto de funciones base  $\Phi_i(x)$  que estan definidas solamente un una región local finita. En la expansión de elementos finitos, estas regiones son típicamente construídas mediante un mosaico de elementos poligonales (generalmente triángulos por adaptarse mejor a los dominios con forma poligonal). En teoría, tanto las funciones del tipo espectral como así las del tipo elemento finito pueden ser usados con cualquier método numérico.

# 3.2.2. Formulación de Galerkin

Los métodos de elementos finitos típicamente utilizan la formulación de Galerkin [19], esta formulación es la que se adopta en el presente trabajo.

# 3.2.2.1. Forma fuerte y definición de las condiciones de frontera

La formulación del comportamiento de los campos electromagnéticos en el aire en su forma fuerte se da en la ecuación de onda (2.21), obtenida a partir de simplificacio-

nes de las ecuaciones de Maxwell (2.1) - (2.4), imponiendo condiciones de frontera, la formulación fuerte del problema se muestra en la ecuación  $(3.5)^{1}$ .

$$u_{tt} - c^{2}\Delta u = f(x,t) \quad \text{en} \qquad \Omega \times (0,T], \quad \Omega \subset \mathbb{R}^{2},$$
  

$$u(x,t) = g_{\mathcal{D}}(x,t) \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega \times (0,T],$$
  

$$u(x,0) = p_{0}(x) \quad \text{en} \quad \Omega,$$
  

$$u_{t}(x,0) = p_{1}(x) \quad \text{en} \quad \Omega,$$
  
(3.5)

donde  $x = (x_1, x_2)$ ,  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ ,  $\partial \Omega = \partial \Omega_D$  (frontera de Dirichlet) y  $c \in \mathbb{R}$  es una constante. La ecuación (3.5) surge en varios problemas físicos y de ingeniería.

## **3.2.2.2.** Forma débil e imponiendo las condiciones de frontera de Dirichlet: desplazando una solución conocida

Sea  $\Omega$  un conjunto abierto acotado de  $\mathbb{R}^d$  (d = 2, 3), con frontera  $\partial \Omega$  que por tramos pertenece a  $C^1$ .

**Problema planteado.** Dados  $f \in L^2(L^2(\Omega); 0, T)$ ,  $g_{\mathcal{D}} \in L^2(H^{1/2}(\partial\Omega); 0, T)$ ,  $p_0(x) \in H^1_0(\Omega)$  y  $p_1(x) \in L^2(\Omega)$ , encuentre u(x, t) definida en  $\Omega \times (0, T]$ , solución de la ec. (3.5). Para construir una aproximación débil para la ecuación

$$\mathcal{L}(u) \equiv u_{tt} - c^2 \Delta u - f = 0, \qquad (3.6)$$

Suponga que  $u(x,t) \in L^2(H^2(\Omega); 0, T)$ , luego multiplique esta ecuación por una función test  $v(x) \in \mathcal{V}$  ( $\mathcal{V}$  es el espacio de las funciones tests), que por definición es *cero sobre toda frontera de Dirichlet*  $\partial \Omega_D$  [19, 27], y luego integre en el dominio  $\Omega$  para obtener el producto interno de  $\mathcal{L}(u)$  con respecto a v(x) (de ahora en más es utilizará v para denotar v(x) y u para denotar u(x,t)):

$$(v, \mathcal{L}(u)) = \int_{\Omega} v \left( u_{tt} - c^2 \Delta u - f \right) dx = 0.$$
(3.7)

Note que la ec. (3.7) es equivalente a igualar a cero el residuo ponderado, si se utiliza  $u^{\delta}$  tal que sea una aproximación de u (recuerde que  $\mathcal{L}(u^{\delta}) = R(u^{\delta})$ ) luego la ec. (3.7) sería equivalente a la condición (v, R) = 0.

El siguiente paso importante en la formulación de Galerkin espectral /hp, es aplicar el teorema de divergencia de Gauss (identidad de Green) a

$$\int_{\Omega} v \left( u_{tt} - f \right) dx - c^2 \int_{\Omega} v \Delta u dx = 0$$
(3.8)

para obtener

$$\int_{\Omega} v (u_{tt} - f) dx - c^2 \int_{\partial \Omega} v \frac{\partial u}{\partial \eta} dx + c^2 \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u dx = 0.$$
(3.9)

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Es importante destacar en este punto que por cuestiones de comodidad en este capítulo se considera al campo con la variable u y además que la derivada temporal se representa por  $u_t$  en vez de  $\frac{\partial u}{\partial t}$ .

Como las funciones tests están definidas para ser nulas sobre las fronteras de Dirichlet, es sabido que  $v|_{\partial\Omega_{\mathcal{D}}} = 0$ , por lo tanto la segunda integral se anula, y se obtiene:

$$\int_{\Omega} v \left( u_{tt} - f \right) dx + c^2 \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u dx = 0, \qquad \forall v \in \mathcal{V}.$$
(3.10)

Analizando la ec. (3.10) se puede notar que la condición suficiente para u es pertenecer a  $L^2(H^1(\Omega); 0, T)$ , debilitando así las condiciones inicialmente requeridas para u.

La acción de desplazar una solución conocida es equivalente a descomponer la solución u en una función conocida,  $u^{\mathbf{D}}$ , la cual satisface las condiciones de frontera de Dirichlet, y una función desconocida homogénea,  $u^{\mathbf{H}}$ , la cual se anula en las fronteras de Dirichlet, las condiciones del problema dadas más arriba, garantiza la existencia de una función  $u^{\mathbf{D}} \in L^2(H^1(\Omega); 0, T)$  tal que  $u^{\mathbf{D}}|_{\partial\Omega_{\mathcal{D}}} = g_{\mathcal{D}}(x, t)$  [27].

Sea  $u = u^{\mathbf{H}} + u^{\mathbf{D}}$ , luego  $u^{\mathbf{H}}|_{\partial\Omega_{\mathcal{D}}} = 0$ , y si u es solución de la ec. (3.10), luego  $u^{\mathbf{H}} \in L^{2}(H_{0}^{1}(\Omega); 0, T)$  es solución de la siguiente ecuación:

$$\int_{\Omega} v u_{tt}^{\mathbf{H}} dx + c^2 \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u^{\mathbf{H}} dx = \int_{\Omega} v f dx - \int_{\Omega} v u_{tt}^{\mathbf{D}} dx - c^2 \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u^{\mathbf{D}} dx, \quad \forall v \in \mathcal{V}.$$
(3.11)

Como en la formulación de Galerkin el espacio de funciones base es el mismo que el espacio de las funciones test, tenemos que  $\mathcal{V} = H_0^1(\Omega)$ .

El problema débil (3.11) es aún un problema de dimensión infinita, puesto que los espacios de funciones base y funciones test,  $H^1(\Omega)$  y  $H^1_0(\Omega)$  respectivamente, poseen una cantidad infinita de funciones en sus bases de representación. Debido a esto, seleccionamos subespacios  $\mathcal{X}^{\delta}$  ( $\mathcal{X}^{\delta} \subset H^1(\Omega)$ ) que contienen una cantidad finita de funciones en sus bases de representación. La aproximación de Galerkin del problema (3.5) es la solución a la forma débil de la ec. (3.11) cuando la solución exacta u es aproximada mediante una expansión finita, denotada por  $u^{\delta} \in L^2(\mathcal{X}^{\delta}; 0, T)$ . La función v en la ec. (3.11) es también reemplazada por una expansión finita, denotada por  $v^{\delta} \in \mathcal{V}^{\delta} \subset \mathcal{V}$ , de esta manera se tiene:

$$u^{\delta} = u^{\mathcal{D}} + u^{\mathcal{H}} \tag{3.12}$$

donde

$$u^{\mathcal{D}} \in L^2(\mathcal{X}^{\delta}; 0, T)$$
 y  $u^{\mathcal{H}} \in L^2(\mathcal{V}^{\delta}; 0, T).$ 

Ahora la ec. (3.11) se transforma en:

$$\int_{\Omega} v^{\delta} u_{tt}^{\mathcal{H}} dx + c^{2} \int_{\Omega} \nabla v^{\delta} \cdot \nabla u^{\mathcal{H}} dx = \int_{\Omega} v^{\delta} f^{\delta} dx - \int_{\Omega} v^{\delta} u_{tt}^{\mathcal{D}} dx - c^{2} \int_{\Omega} \nabla v^{\delta} \cdot \nabla u^{\mathcal{D}} dx$$
(3.13)

para todo  $v^{\delta} \in \mathcal{V}^{\delta}$ .

## 3.2.2.3. Particionamiento del dominio de la solución

Cuando se utiliza un método tipo h el dominio de la solución es dividido o particionado en subdominios o elementos *no-superpuestos* mediante una triangulación regular  $\mathcal{T}(\overline{\Omega})$  de triángulos (aproximadamente equiláteros), dentro de los cuales son definidas las funciones base y tests.

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , un polígono abierto de frontera  $\partial \Omega$ , se lo puede particionar en un mallado conteniendo  $N_{el}$  elementos, denotando por  $\Omega^e$  a cada elemento triangular abierto (no vacío), tal que la unión de la clausura de los elementos no-superpuestos sea igual al dominio original, esto es,

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{e=1}^{N_{el}} \overline{\Omega^e}, \quad \text{donde} \quad \Omega^r \cap \Omega^s = \emptyset \quad \text{para} \quad r \neq s \quad \text{y} \quad \Omega^e \neq \emptyset, \quad \forall \ e = 1, \dots, N_{el}.$$

Note que, puede darse el caso en el cual la frontera de un elemento  $\Omega^{e_1} \in \mathcal{T}(\Omega)$  es también la frontera de otro elemento  $\Omega^{e_2}$ , en tal caso  $\Omega^{e_1}$  y  $\Omega^{e_2}$  son adyacentes, o puede ocurrir que parte de la frontera de  $\Omega^{e_1}$  es una parte de la frontera  $\partial\Omega$  de  $\Omega$ .

**Definición 1** Toda descomposición de  $\overline{\Omega}$  verificando las propiedades citadas más arriba es denominada triangulación de  $\overline{\Omega}$ .

(Ver [19, 27] para mayores detalles).

### **3.2.2.4.** Operaciones en los elementos $\Omega^e$

Más adelante se explicará cómo integrar y diferenciar en el interior de una *región* estándar  $\Omega_{st}$ ; sin embargo, en la práctica se necesita desarrollar estas operaciones en regiones elementales,  $\Omega^e$ , que pueden ser de forma y orientación genéricas, como se muestra en la Figura 3.1. Para considerar este caso se necesita definir una función biyectiva entre las coordenadas Cartesianas  $x = (x_1, x_2)$  que describen un elemento genérico  $\Omega^e$  y las coordenadas locales Cartesianas  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$  que describen el elemento estándar  $\Omega_{st}$ , tales funciones se denotarán cómo sigue:

$$x_1 = \chi_1^e(\xi), \qquad x_2 = \chi_2^e(\xi).$$

Por ejemplo, para mapear una región triangular (como en la Figura 3.1) asumiendo que las coordenadas globales  $\{(x_1^A, x_2^A), (x_1^B, x_2^B), (x_1^C, x_2^C)\}$  del triángulo son conocidas, podemos usar la siguiente función de mapeo:

$$x_i = \chi_i(\xi_1, \xi_2) = x_i^A \frac{-\xi_2 - \xi_1}{2} + x_i^B \frac{1 + \xi_1}{2} + x_i^C \frac{1 + \xi_2}{2}, \qquad i = 1, 2.$$
(3.14)



**Figura 3.1:** Para construir una expansión de funciones pertenecientes a  $C^0$  a partir de múltiples elementos de diferentes formas, cada región elemental  $\Omega^e$  es mapeada a una región estándar  $\Omega_{st}$  en la cual todas las operaciones son evaluadas. Fuente: [19].

### 3.2.2.5. Ecuación semidiscreta

Después de la triangulación  $\mathcal{T}(\Omega)$ , se tiene el conjunto de todos los nodos de Fekete  $\Theta_{\overline{\Omega}}$  (se invita al lector a revisar el Apéndice A, donde se desarrolla la justificación de la elección de estos nodos), luego los nodos de la frontera  $\partial\Omega$  son  $\Theta_{\partial\Omega} = \Theta_{\overline{\Omega}} \cap \partial\Omega$ .

Sea  $\{\Phi_{l_1}(x), \ldots, \Phi_{l_{N_{dof}}}(x)\} \subset \{\Phi_1(x), \ldots, \Phi_{N_{Tot}}(x)\}$  una base de  $\mathcal{V}^{\delta}$  (se invita al lector a referirse al Apéndice A, donde se define las funciones  $\Phi_i(x)$  como polinomios de Lagrange de orden P sobre los nodos de Fekete, demostrando que con esta elección, las funciones  $\Phi_i(x)$  pertenecen a los espacios discutidos en la sección 3.2.2.2), note que  $J = \{l_1, \ldots, l_{N_{dof}}\} \subset \{1, \ldots, N_{Tot}\} = C$  es un conjunto de índices de cardinalidad  $N_{dof} \leq N_{Tot} - 2$  (la cota máxima se da cuando se considera un problema unidimensional con condiciones de frontera de Dirichlet). Ahora, sea  $\{\Phi_{d_1}(x), \ldots, \Phi_{d_{N_b}}(x)\}$  una base de  $\chi^{\delta}$ , definida sobre los nodos de frontera  $\Theta_{\partial\Omega} = \{a_r\}_{r\in D}$ , donde  $D = \{d_1, \ldots, d_{N_b}\} \subset \{1, \ldots, N_{Tot}\}$  es un conjunto de índices de cardinalidad  $N_b$ .

Observe que  $C = \{1, \ldots, N_{Tot}\} = D \cup J$  y  $D \cap J = \emptyset$ . Además, sea:

$$u^{\mathcal{H}} = \sum_{j \in J} u_j(t) \Phi_j(x), \quad u^{\mathcal{D}} = \sum_{r \in D} g_{\mathcal{D}}(a_r, t) \Phi_r(x) \quad \mathbf{y} \quad f^{\delta} = \sum_{s \in C} f(a_s, t) \Phi_s(x).$$
(3.15)

Reemplazando las aproximaciones que se muestran en la ec. (3.15) y considerando  $v^{\delta} = \Phi_i(x)$ , donde  $i \in J$ , en la ec. (3.13), y nombrando  $\Phi$  a  $\Phi(x)$ , se tiene:

$$\int_{\Omega} \Phi_{i} \left( \sum_{j \in J} u_{j}(t) \Phi_{j} \right)_{tt} dx + c^{2} \int_{\Omega} \nabla \Phi_{i} \cdot \nabla \left( \sum_{j \in J} u_{j}(t) \Phi_{j} \right) dx = \int_{\Omega} \Phi_{i} \left( \sum_{s \in C} f(a_{s}, t) \Phi_{s} \right) dx - \int_{\Omega} \Phi_{i} \left( \sum_{r \in D} g_{\mathcal{D}}(a_{r}, t) \Phi_{r} \right)_{tt} dx - c^{2} \int_{\Omega} \nabla \Phi_{i} \cdot \nabla \left( \sum_{r \in D} g(a_{r}, t) \Phi_{r} \right) dx, \quad \forall i \in J \quad (3.16)$$

Considerando la linealidad de los operadores, la ec. (3.16) puede ser expresada como:

$$\sum_{j\in J} \ddot{u}_j(t) \int_{\Omega} \Phi_i \Phi_j dx + c^2 \sum_{j\in J} u_j(t) \int_{\Omega} \nabla \Phi_i \cdot \nabla \Phi_j dx = \sum_{s\in C} f(a_s, t) \int_{\Omega} \Phi_i \Phi_s dx - \sum_{r\in D} \ddot{g}_{\mathcal{D}}(a_r, t) \int_{\Omega} \Phi_i \Phi_r dx - c^2 \sum_{r\in D} g_{\mathcal{D}}(a_r, t) \int_{\Omega} \nabla \Phi_i \cdot \nabla \Phi_r dx, \quad \forall i \in J \quad (3.17)$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t) + c^{2}\mathbf{K}\mathbf{U}(t) = \mathbf{b}(t), \qquad (3.18)$$

donde

$$\begin{split} \mathbf{M}_{ij} &= \int_{\Omega} \Phi_i \Phi_j dx, \\ \mathbf{K}_{ij} &= \int_{\Omega} \nabla \Phi_i \cdot \nabla \Phi_j dx, \\ \mathbf{b}_i(t) &= \sum_{s \in C} f(a_s, t) \int_{\Omega} \Phi_i \Phi_s(x) dx - \sum_{r \in D} \ddot{g}_{\mathcal{D}}(a_r, t) \int_{\Omega} \Phi_i \Phi_r dx \qquad (3.19) \\ &\quad - c^2 \sum_{r \in D} g_{\mathcal{D}}(a_r, t) \int_{\Omega} \nabla \Phi_i \cdot \nabla \Phi_r dx, \\ \mathbf{U}_j(t) &= u_j(t), \quad \forall \ i, j \in J. \end{split}$$

Por otro lado, las integrales que se muestran en la ec. (3.19), se pueden representar como sumatoria de las integrales en cada elemento  $\Omega^e$ , según se muestra a continuación:

$$\begin{split} \mathbf{M}_{ij} &= \sum_{\Omega^{e} \in \mathcal{T}(\overline{\Omega})} \int_{\Omega^{e}} \Phi_{i} \Phi_{j} dx, \\ \mathbf{K}_{ij} &= \sum_{\Omega^{e} \in \mathcal{T}(\overline{\Omega})} \int_{\Omega^{e}} \nabla \Phi_{i} \cdot \nabla \Phi_{j} dx, \\ \mathbf{b}_{i}(t) &= \sum_{s \in C} f(a_{s}, t) \left\{ \sum_{\Omega^{e} \in \mathcal{T}(\overline{\Omega})} \int_{\Omega^{e}} \Phi_{i} \Phi_{s} dx \right\} - \sum_{r \in D} \ddot{g}_{\mathcal{D}}(a_{r}, t) \left\{ \sum_{\Omega^{e} \in \mathcal{T}(\overline{\Omega})} \int_{\Omega^{e}} \Phi_{i} \Phi_{r} dx \right\} \\ &- c^{2} \sum_{r \in D} g_{\mathcal{D}}(a_{r}, t) \left\{ \sum_{\Omega^{e} \in \mathcal{T}(\overline{\Omega})} \int_{\Omega^{e}} \nabla \Phi_{i} \cdot \nabla \Phi_{r} dx \right\}, \\ \mathbf{U}_{j}(t) &= u_{j}(t), \quad \forall i, j \in J. \end{split}$$
(3.20)

#### **3.2.2.6.** Integración en una región elemental genérica $\Omega^e$

Se denota una región triangular genérica por  $\Omega^e$ , la cual se representa mediante el sistema de coordenadas global Cartesiano  $(x_1, x_2)$  en dos dimensiones. Para integrar sobre  $\Omega^e$  primero se mapea esta región a la región estándar  $\Omega_{st}$ , la cual se representa mediante el sistema de coordenadas local Cartesiano  $(\xi_1, \xi_2)$  y de esta manera se tiene:

$$\int_{\Omega^e} u(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{\Omega_{st}} u(\xi_1, \xi_2) J_{2D} d\xi_1 d\xi_2.$$
(3.21)

Donde  $J_{2D}$  es el determinante del Jacobiano en dos dimensiones, que es aplicado a la transformación que se muestra en la ec. (3.14), definida como:

$$J_{2D} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \end{vmatrix} = \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}.$$
(3.22)

Como la función de mapeo es conocida (i.e  $x_1 = \chi_1(\xi_1, \xi_2)$  y  $x_2 = \chi_2(\xi_1, \xi_2)$ ), se pueden calcular todas las derivadas parciales indicadas para determinar  $J_{2D}$ . La simplicidad de la función de mapeo causa que las derivadas parciales, y por lo tanto  $J_{2D}$ , sean constantes para cada región triangular. Para la función de mapeo escogida,  $J_{2D}$  toma la siguiente forma:

$$J_{2D} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} x_1^A & x_2^A & 1\\ x_1^B & x_2^B & 1\\ x_1^C & x_2^C & 1 \end{vmatrix}.$$
 (3.23)

### **3.2.2.7.** Diferenciación en una región elemental genérica $\Omega^e$

Para diferenciar una función en el interior de una región elemental arbitraria  $\Omega^e$ , como se ilustra en la Figura 3.1, se aplica una vez más la regla de la cadena, para el caso bidimensional, se tiene

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \\ \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \end{bmatrix}.$$
(3.24)

Como se indica en el paso anterior, es necesario calcular derivadas de la forma  $\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}$ , con i = 1, 2 y j = 1, 2, que pueden ser expresadas en función de las derivadas de  $\frac{\partial x_j}{\partial \xi_i}$ , con i = 1, 2 y j = 1, 2, las cuales pueden ser calculadas con mayor facilidad (revisar [19] para mayores detalles).  $\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}$  y  $\frac{\partial x_j}{\partial \xi_i}$  están relacionados como sigue:

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} = \frac{1}{J_{2D}} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}, \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{J_{2D}} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}, \quad \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} = -\frac{1}{J_{2D}} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}, \quad \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} = \frac{1}{J_{2D}} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}.$$

Ahora es más simple calcular el operador gradiente bidimensional en la ec. (3.24), puesto que todas las derivadas parciales pueden ser expresadas en término de derivadas con respecto a  $\xi_1$  y  $\xi_2$ , las cuales serán calculadas utilizando las representaciones de los polinomios de Lagrange, que serán desarrollados más adelante.

### **3.2.2.8.** Integración en el interior de la región estándar $\Omega_{st}$

La región triangular estándar  $\overline{\Omega_{st}} = \{(\xi_1, \xi_2); -1 \leq \xi_1, \xi_2, \xi_1 + \xi_2 \leq 0\}$  expresada en las coordenadas Cartesianas  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ , no posee una representación conveniente, pensando en la integración Gaussiana unidimensional, puesto que la frontera superior de la región triangular está expresada en función de ambas coordenadas.

Puesto que la regla de integración unidimensional es expresada mediante un intervalo con frontera constante (esto es, [-1, 1]), se necesita establecer una transformación de coordenadas, antes de aplicar esta técnica.

La transformación de una región triangular a una región acotada por constantes es equivalente a mapear la región triangular a una región cuadrangular, como se muestra en la Figura 3.2.

El mapeo de una región triangular a una región cuadrangular es:

$$\eta_1 = 2\frac{1+\xi_1}{1-\xi_2} - 1,$$
  

$$\eta_2 = \xi_2.$$
(3.25)

Estas nuevas coordenadas locales  $\eta = (\eta_1, \eta_2)$  definen la región estándar cuadrangular

$$\mathcal{Q}^2 = \{(\eta_1, \eta_2); -1 \le \eta_1, \eta_2 \le 1\}.$$





Figura 3.2: Transformación de una región triangular a otra región cuadrangular. Fuente: [19].

Aplicando la transformación mostrada en la ec. (3.25) en la ec. (3.21), se obtiene:

$$\int_{\Omega_{st}} u(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^{\xi_2} u(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 u(\eta_1, \eta_2) \frac{\partial(\xi_1, \xi_2)}{\partial(\eta_1, \eta_2)} d\eta_1 d\eta_2, \quad (3.26)$$

donde  $\frac{\partial(\xi_1,\xi_2)}{\partial(\eta_1,\eta_2)}$  es el determinante del Jacobiano de la transformación establecida en la ec. (3.25) y puede ser expresado en términos de  $\eta_1$  y  $\eta_2$  de la siguiente manera:

$$\frac{\partial(\xi_1,\xi_2)}{\partial(\eta_1,\eta_2)} = \frac{1-\eta_2}{2}$$

El último término en la ec. (3.26) puede ser aproximado utilizando la regla de cuadratura de Gauss unidimensional, para llegar a:

$$\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} u(\eta_{1}, \eta_{2}) \left(\frac{1-\eta_{2}}{2}\right) d\eta_{1} d\eta_{2} \approx \sum_{i=0}^{Q_{1}-1} \omega_{i} \left\{\sum_{j=0}^{Q_{2}-1} \omega_{j} u\left(\eta_{1_{i}}, \eta_{2_{j}}\right) \left(\frac{1-\eta_{2_{j}}}{2}\right)\right\}, \quad (3.27)$$

donde  $\eta_{1_i}$  y  $\eta_{2_j}$  son los puntos de cuadratura en las direcciones de  $\eta_1$  y  $\eta_2$ , respectivamente. Las ponderaciones  $\omega_i$  y  $\omega_j$  usados en la ec. (3.27) corresponden a la regla estándar de la
cuadratura de Gauss-Lobatto-Legendre, la cual incluye los puntos extremos del intervalo [-1, 1].

Cuando se elige una distribución de puntos sobre los cuales integrar, los puntos de cuadratura de Gauss-Lobatto-Legendre son preferidos ya que este conjunto de puntos incluye los puntos extremos del intervalo [-1, 1], lo cual es de gran ayuda cuando se establecen las condiciones de frontera.

Se introduce el símbolo  $\eta_{i,P}^{\alpha,\beta}$  para denotar los *P* ceros del polinomio de Jacobi  $P_P^{\alpha,\beta}$ , de orden *P*, tal que

$$P_P^{\alpha,\beta}(\eta_{i,P}^{\alpha,\beta}) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, P - 1.,$$

donde

$$\eta_{0,P}^{\alpha,\beta} < \eta_{1,P}^{\alpha,\beta} < \dots < \eta_{P-1,P}^{\alpha,\beta}.$$

Se pueden definir los ceros y ponderaciones que aproximan la integral mostrada en la ec. (3.27), como se muestra a continuación:

$$\eta_{i} = \begin{cases} -1 & i = 0, \\ \eta_{i-1,Q-2}^{1,1} & i = 1, \dots, Q-2., \\ 1 & i = Q-1. \end{cases}$$

$$\omega_{i}^{0,0} = \frac{2}{Q(Q-1)[L_{Q-1}(\eta_{i})]^{2}} \quad i = 0, \dots, Q-1.$$
(3.29)

En la ec. (3.29),  $L_{Q-1}(\eta)$  es el polinomio de Legendre  $(L_{Q-1}(\eta) = P_Q^{0,0})$ .

Los ceros del polinomio de Jacobi  $\eta_{i,P}^{\alpha,\beta}$  no poseen una forma analítica, una manera de calcularlos es mediante el uso de un algoritmo numérico, como por ejemplo el algoritmo de Newton-Rhapson. Habiendo determinado los ceros, las ponderaciones pueden ser evaluadas a partir de la fórmula mostrada en la ec. (3.29). Para realizar estas evaluaciones se necesitarán los polinomios de Legendre, los cuales se obtendrán a partir de la relación recursiva dada por:

$$P_{0}^{\alpha,\beta}(x) = 1,$$

$$P_{1}^{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{2} [\alpha - \beta + (\alpha + \beta + 2)x],$$

$$a_{n}^{1} P_{n+1}^{\alpha,\beta}(x) = (a_{n}^{2} + a_{n}^{3}x) P_{n}^{\alpha,\beta}(x) - a_{n}^{4} P_{n-1}^{\alpha,\beta}(x),$$

$$a_{n}^{1} = 2(n+1)(n + \alpha + \beta + 1)(2n + \alpha + \beta),$$

$$a_{n}^{2} = (2n + \alpha + \beta + 1)(\alpha^{2} - \beta^{2}),$$

$$a_{n}^{3} = (2n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta + 1)(2n + \alpha + \beta + 2),$$

$$a_{n}^{4} = 2(n + \alpha)(n + \beta)(2n + \alpha + \beta + 2).$$
(3.30)

# **3.2.2.9.** Ensamblamiento global de las matrices locales y conectividad de las regiones elementales

Al separar la función global  $\Phi(x)$  en partes tales que estas sean sus restricciones a las regiones elementales  $\Omega^e$ , como se muestra en la Figura 3.3(a), se observa que el coeficiente asociado a esta función global denotado por  $\hat{u}$ , se distribuye también en ambas regiones elementales. Sin embargo, cuando se necesita integrar esta función global con respecto a alguna función  $u(x_1, x_2)$ , como se muestra en la Figura 3.3(b), la integral debe ser desarrollada localmente y luego se debe sumar las contribuciones locales para obtener la integral de  $u(x_1, x_2)$  con respecto a la función global  $\Phi(x)$ .



(a) Expansión de la función global  $\Phi(x)$  en partes que son sus restricciones a las regiones elementales.



(b) La integración en la región global es la suma de las integrales en las regiones locales.

## **Figura 3.3:** Interpretación gráfica de la integración global a partir de la integración local. Fuente: [19].

Para obtener la integral global mencionada más arriba, a partir de la suma de las integrales locales, se necesita volver a enumerar apropiadamente los nodos globales que son generados cuando se triangulariza el dominio, esta nueva enumeración es la que determinará el ensamblamiento global correcto de las matrices locales.

Analizando la nueva numeración de los nodos de manera heurística, un esquema de numeración global para los nodos de la frontera de las regiones elementales puede ser planteado asumiendo como punto de partida, que la salida de un generador de malla para elementos finitos es conocida, donde las coordenadas globales Cartesianas de cada vértice son conocidas. Se inicia el esquema de numeración mediante la asignación de un número a cada vértice de cada elemento  $\Omega^e$  del mallado. En el método de elementos espectrales /hp, también se requiere una numeración global de todos los nodos sobre la frontera  $\partial \Omega^e$  y en el interior de cada elemento  $\Omega^e$ , según sea el caso. Utilizando la numeración de las



(a) Gráfico del esquema de numeración (b) Gráfico del esquema de numeración global de los nodos. local de los nodos.

Figura 3.4: Gráficos del esquema de numeración de los nodos. Fuente: [19].

coordenadas globales de los vértices de cada elemento  $\Omega^e$ , las fronteras  $\partial \Omega^e$  pueden ser identificadas de manera única usando las numeraciones de las coordenadas globales de los vértices de  $\Omega^e$  que están situadas en los extremos de cada frontera  $\partial \Omega^e$ . La numeración global de los nodos a lo largo de cada frontera  $\partial \Omega^e$  que aún no fueron numerados, puede ser definida posteriormente. Un ejemplo de este tipo de numeración global se muestra en la Figura 3.4(a) donde se observa que los vértices globales de los elementos  $\Omega^e$  son numerados primeramente, y luego se numeran los nodos sobre la frontera  $\partial \Omega^e$  que aun no fueron numerados, de acuerdo a la numeración de los nodos en los elementos  $\Omega^e$  mostrada en la Figura 3.4(b). Finalmente, en caso de requerirse la numeración de los nodos interiores del elemento  $\Omega^e$ , estos pueden realizarse de manera posterior a la numeración detallada con anterioridad, sin crear conflicto alguno con la numeración de los nodos realizada previamente.

Con el esquema de numeración explicado, y clasificando los datos como se sugiere en el trabajo de Cartensen **et-al** [26]. El proceso de ensamblamiento de las matrices de masa y rigidez, y el ensamblamiento de la matriz del lado derecho de la ec. (3.18) es desarrollado como se muestra en [26].

Algoritmo Parareal en el estudio de Ondas Electromagnéticas - 2D

# CAPÍTULO 4 DISCRETIZACIÓN TEMPORAL

#### 4.1. Método de Galerkin Discontinuo

Generalmente, cuando los métodos de Galerkin Discontinuo (DG) *Discontinuos Galerkin method*, son aplicados a problemas hiperbólicos de segundo orden, como el que se muestra en la ec. (3.18), primero se requiere que el problema sea reformulado como un sistema de ecuaciones hiperbólico de primer orden, para el cual los métodos DG están disponibles [29, 12, 30]. Por comodidad se vuelve a escribir a continuación la ecuación semi discreta (3.18).

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t) + c^{2}\mathbf{K}\mathbf{U}(t) = \mathbf{b}(t).$$
(4.1)

Reformulando la ec. (4.1) para reducir el orden del problema, se obtiene:

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{V}}(t) + c^{2}\mathbf{K}\mathbf{U}(t) = \mathbf{b}(t),$$
  
$$\dot{\mathbf{U}}(t) - \mathbf{V}(t) = 0.$$
(4.2)

La ec. (4.2) se puede reescribir como:

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{Y}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{Y}(t) = \mathbf{q}(t), \tag{4.3}$$

donde

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{U}(t) \\ \mathbf{V}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{M} \\ \mathbf{I} & 0 \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} c^{2}\mathbf{K} & 0 \\ 0 & -\mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{b}(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$
(4.4)

#### 4.1.1. Fundamentación teórica del método DG

Para ilustrar las ideas básicas del método DG, se considera el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\dot{\mathbf{Y}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{Y}(t) &= \mathbf{q}(t), \\ \mathbf{Y}(t)|_{t=0} &= \mathbf{Y}_{0}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

El dominio temporal es discretizado, de tal manera que  $(0,T] = \bigcup_{n=0}^{N-1} I_n$  con  $I_n = (t_n, t_{n+1}]$ . Luego, se integra la ec. (4.5) sobre  $I_n$ , con respecto a la función de ponderación w(t) como se muestra a continuación:

$$\int_{I_n} \left( \mathbf{A} \dot{\mathbf{Y}}(t) + \mathbf{B} \mathbf{Y}(t) - \mathbf{q}(t) \right) w(t) dt = 0, \quad \forall w(t) \in \mathcal{W} \ \mathbf{y} \ t \in I_n, \tag{4.6}$$

desarrollando la integración por partes sobre el operador diferencial, se tiene:

$$w(t_{n+1})\mathbf{AY}(t_{n+1}) - w(t_n)\mathbf{AY}(t_n) - \int_{I_n} (\dot{w}(t)\mathbf{AY}(t) - (\mathbf{BY}(t) - \mathbf{q}(t))w(t))dt = 0, \quad \forall w(t) \in \mathcal{W} \text{ y } t \in I_n.$$
(4.7)

En el enfoque estándar de elementos finitos, se fuerza la continuidad del vector  $\mathbf{Y} \in \mathcal{Y}$ sobre las fronteras de  $I_n$  ( $\mathcal{W} \in \mathcal{Y}$  serán detallados más adelante). La idea esencial del método DG es que se le permite a  $\mathbf{Y}$  ser discontínuo sobre las fronteras de  $I_n$  (en este punto es importante resaltar que  $\mathbf{Y}(t_n)$  no está definido en el intervalo  $I_n$ ). Por lo tanto, son definidos dos valores diferentes en  $t_n$ , como puede observarse en la Figura 4.1:



**Figura 4.1:** Definición de  $\mathbf{Y}(t)$  en  $t_n$ . Fuente: Elaboración Propia.

$$\mathbf{Y}_{n}^{+} = \mathbf{Y}(t_{n}^{+}) = \lim_{\epsilon \to 0^{+}} \mathbf{Y}(t_{n} + \epsilon) \quad \mathbf{e} \quad \mathbf{Y}_{n}^{-} = \mathbf{Y}(t_{n}^{-}) = \lim_{\epsilon \to 0^{+}} \mathbf{Y}(t_{n} - \epsilon).$$
(4.8)

Además, note que Y es discontinuo solamente en las fronteras de  $I_n$ , la solución Y es suave en el interior de  $I_n$  (en las definiciones de la ec. (4.8) puede observarse que  $Y(t_n^-) \notin I_n$ , pero que  $Y(t_n^+) \in I_n$ ). No existe acoplamiento directo entre los intervalos. Los valores de los vectores en un nodo, no son únicos. Esta característica es deseable para problemas con discontinuidades internas, como los que pertenecen a ondas de choque [31], y lo hace ideal para computación paralela [32, 33, 12].

## **4.1.2.** Condicionamiento débil de la continuidad entre los elementos $I_n$

Para la solución de problemas de contorno mediante el método estándar FEM, la condición de consistencia frecuentemente requiere que la variable y su derivada sean contínuas en el dominio computacional, lo cual implica la continuidad entre elementos para estas variables [31].

En la formulación estándar FEM, la continuidad entre elementos está fuertemente condicionada. Sin embargo, la formulación DG relaja los requerimientos de continuidad, así la continuidad entre elementos está débilmente condicionada, en [34] está demostrada la estabilidad, convergencia y también la condición de consistencia del método DG. Como ya se mencionó anteriormente  $\mathbf{Y}(t_n) \notin I_n$ , debido a esto se arbitra un valor para  $\mathbf{Y}(t_n) = \mathbf{Y}_n^- \in I_{n-1}$ , y es este valor que será considerado en la ec. (4.7), obteniéndose:

$$w(t_{n+1})\mathbf{AY}(t_{n+1}) - w(t_n)\mathbf{AY}_n^- - \int_{I_n} \dot{w}(t)\mathbf{AY}(t) - (\mathbf{BY}(t) - \mathbf{q}(t))w(t)dt = 0, \quad \forall \ w(t) \in \mathcal{W} \ \mathbf{y} \ t \in I_n.$$
(4.9)

La ec. (4.9) debe ser integrada por partes sobre el operador diferencial una vez más, resultando en lo que sigue:

$$w(t_{n+1})\mathbf{A}\mathbf{Y}(t_{n+1}) - w(t_n)\mathbf{A}\mathbf{Y}_n^- - (w(t_{n+1})\mathbf{A}\mathbf{Y}(t_{n+1}) - w(t_n)\mathbf{A}\mathbf{Y}(t_n)) + \int_{I_n} \left(\mathbf{A}\dot{\mathbf{Y}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{Y}(t) - \mathbf{q}(t)\right)w(t)dt = 0, \quad \forall \ w(t) \in \mathcal{W} \ \mathbf{y} \ t \in I_n.$$
(4.10)

Es importante recordar que  $\mathbf{Y}(t_{n+1}) \in I_n$  es un valor definido de manera única en  $I_n$ , por lo cual puede ser simplificado en la ec. (4.10), para poder imponer de manera débil la continuidad entre los intervalos  $I_n$  e  $I_{n-1}$ , en la (4.10) se arbitra  $\mathbf{Y}(t_n) = \mathbf{Y}_n^+ \in I_n$ , simplificando y reordenando la ec. (4.10) se obtiene:

$$w(t_n)\mathbf{A}\left(\mathbf{Y}_n^+ - \mathbf{Y}_n^-\right) + \int_{I_n} \left(\mathbf{A}\dot{\mathbf{Y}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{Y}(t) - \mathbf{q}(t)\right) w(t)dt = 0, \quad \forall w(t) \in \mathcal{W} \text{ y } t \in I_n.$$
(4.11)

Frecuentemente se la reescribe en términos de los saltos en las fronteras de los elementos  $I_n$ .

$$\int_{I_n} \left( \mathbf{A} \dot{\mathbf{Y}}(t) + \mathbf{B} \mathbf{Y}(t) - \mathbf{q}(t) \right) w(t) dt + w(t_n) \mathbf{A} [\mathbf{Y}_n] = 0, \quad \forall \ w(t) \in \mathcal{W} \ \mathbf{y} \ t \in I_n,$$
(4.12)

donde el salto es definido mediante:

$$[\mathbf{Y}_n] = \mathbf{Y}_n^+ - \mathbf{Y}_n^-. \tag{4.13}$$

Observe ahora la implicancia de la ec. (4.12), la condición de continuidad en  $t_n$  se impone débilmente en relación a la función de ponderación w(t). Este hecho contrasta con la formulación estándar de elementos finitos, la cual impone de manera fuerte la condición de continuidad entre las fronteras de  $I_n$ , pidiendo que  $[\mathbf{Y}_n] = 0$ . Puesto que  $w(t) \in \mathcal{W}$  es arbitrario, la ec. (4.12) es equivalente a la siguiente expresión matemática:

$$\mathbf{Y}_n^+ - \mathbf{Y}_n^- = 0 \quad \text{para} \qquad t = t_n, \mathbf{A}\dot{\mathbf{Y}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{Y}(t) - \mathbf{q}(t) = 0 \quad \text{para} \qquad t \in (t_n, t_{n+1}).$$
(4.14)

Evidenciando de esta manera que la ec (4.12) es la forma débil de la ec. (4.14) [29, 35, 31, 12].

La formulación débil mostrada en la ec. (4.12), aún sigue siendo un problema de dimensión infinita, puesto que los espacios de las funciones base<sup>1</sup>  $\mathcal{Y} = (L^2(0,T))^{2N_{dof}}$  y test  $\mathcal{W} = L^2(0,T)$ , lo son. Por lo tanto, se seleccionan los subespacios de dimensión finita:  $\mathcal{Y}^{\delta}$  ( $\mathcal{Y}^{\delta} \subset \mathcal{Y}$ ) y  $\mathcal{W}^{\delta}$  ( $\mathcal{W}^{\delta} \subset \mathcal{W}$ ). La aproximación DG del problema mostrado en la ec. (4.5), es la solución a la formulación débil de la ec. (4.12) donde la solución exacta **Y** es aproximada mediante una expansión finita, denotada por  $\mathbf{Y}^{\delta} \in \mathcal{Y}^{\delta}$ . La función w(t) en la ec. (4.12) es también reemplazada por una expansión finita, denotada por  $w^{\delta}(t) \in \mathcal{W}^{\delta}$ . Ahora la ec. (4.12), toma la siguiente forma:

$$\int_{I_n} \left( \mathbf{A} \dot{\mathbf{Y}}^{\delta}(t) + \mathbf{B} \mathbf{Y}^{\delta}(t) - \mathbf{q}(t) \right) w^{\delta}(t) dt + w^{\delta}(t_n) \cdot \mathbf{A} [\mathbf{Y}^{\delta}(t_n)] = 0, \quad \forall \ w^{\delta}(t) \in \mathcal{W}^{\delta}.$$
(4.15)

Observe que el espacio de funciones contínuas  $C^0$ , aplicado en la formulación SEM, no es un lugar natural para buscar soluciones al problema mostrado en la ec. (4.15). Problemas matemáticos como el que se muestra en la ec. (4.15), tienden a tener soluciones en espacios de funciones con variaciones acotadas. Esta consideración sugiere que un espacio de funciones más apropiado para el espacio  $\mathcal{Y}^{\delta}$  puede también contener funciones discontínuas. Por lo cual se considera un espacio de polinomios contínuos a trozos, donde el espacio de las funciones base de dimensión finita, se define como sigue:

$$\mathcal{Y}^{\delta} = \{ \mathbf{Y}^{\delta} \in (L^2(0,T))^{2N_{dof}}; \, \mathbf{Y}^{\delta} \big|_{\overline{I_n}} \in (\mathcal{P}_1(\overline{I_n}))^{2N_{dof}}, \forall \, \overline{I_n} \in [0,T] \}.$$
(4.16)

 $\mathcal{P}_1(\overline{I_n})$  es el espacio de polinomios de orden 1 definido en el elemento  $\overline{I_n}$ , estos polinomios son contínuos en el interior de  $I_n$ , pero discontínuos en las fronteras entre los elementos de  $I_n$ . Por otro lado, el espacio de las funciones test  $\mathcal{W}^{\delta}$ , es definido como sigue:

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Cada una de las componentes de  $\mathbf{Y}(t) \in \mathcal{Y}$  pertenecen al espacio  $L^2(0,T)$ .

$$\mathcal{W}^{\delta} = \{ w^{\delta} \in L^2(0,T); w^{\delta} |_{\overline{L}} \in \mathcal{P}_1(\overline{I_n}), \forall \overline{I_n} \in [0,T] \}.$$
(4.17)

Observe que el método DG hace uso del mismo espacio de funciones para el espacio de funciones base y el espacio de funciones test, al igual que en el método estándar FEM, pero con las condiciones de continuidad relajadas en las fronteras entre los elementos [19, 31].

#### 4.1.3. Función de mapeo entre un elemento genérico $I_n$ y el elemento estándar $I_{st}$

En la implementación del método DG, uno tiene que calcular las integrales sobre los elementos genéricos  $\overline{I_n}$ . Una manera más práctica de calcular las integrales sobre cada elemento genérico del mallado, se plantea utilizando un cambio de variables, para obtener integrales en un elemento fijo, llamado elemento estándar  $\overline{I_{st}} = [-1, 1]$  [36]. Por lo tanto, se define por inducción la función de mapeo  $\varphi_n : \overline{I_{st}} \to \overline{I_n}$  como sigue:

$$\varphi_n(l) = \frac{1}{2}[(1-l)t_n + (1+l)t_{n+1}], \quad l \in \overline{I_{st}} = [-1,1].$$
(4.18)

La Figura 4.2 muestra un gráfico de la función de mapeo  $\varphi_n$ .



**Figura 4.2:** Esquema gráfico de la función de mapeo  $\varphi_n$ . Fuente: Elaboración Propia.

#### 4.1.4. Funciones Base

En la formulación DG, no existe restricciones de continuidad entre los elementos del mallado para las funciones test, por lo tanto las funciones base de  $W^{\delta}$ , tienen su soporte contenido en un elemento  $I_n$  y se lo puede expresar como sigue:

$$\mathcal{W}^{\delta} = \operatorname{span}\{N_k^n \in \mathcal{P}_1(\overline{I_n}); k = 1, 2, \forall \overline{I_n} \in [0, T]\}.$$
(4.19)

con

$$N_k^n(t) = \begin{cases} N_k \circ \varphi_n(l); & l \in \overline{I_{st}}, \\ 0; & l \notin \overline{I_{st}}. \end{cases}$$
(4.20)

Las funciones base locales  $N_k^n \operatorname{con} k = 1, 2$ ., son definidas  $\forall t \in \overline{I_n}$ , como sigue:

$$N_1^n(t) = \frac{t_{n+1} - t}{t_{n+1} - t_n} \quad \text{y} \quad N_2^n(t) = \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n}. \tag{4.21}$$

La Figura 4.3 muestra un esquema gráfico de las funciones base del método DG.



Figura 4.3: Esquema gráfico de las funciones base del método DG. Fuente: Elaboración Propia.

#### 4.1.5. Ecuación Discreta

La solución  $\mathbf{Y}^{\delta}(t)$  es aproximada en  $\overline{I_n}$  como sigue:

$$\mathbf{Y}^{\delta}(t) = N_1^n(t)\mathbf{Y}^{\delta}(t_n^+) + N_2^n(t)\mathbf{Y}^{\delta}(t_{n+1}^-).$$
(4.22)

Luego, se renombra la solución  $\mathbf{Y}^{\delta}(t)$  en los bordes de  $\overline{I_n}$ , según se muestra:

$$\mathbf{Y}^{\delta}(t_n^+) = \mathbf{Y}_1^{\delta} \quad \mathbf{e} \quad \mathbf{Y}^{\delta}(t_{n+1}^-) = \mathbf{Y}_2^{\delta}.$$
(4.23)

En la Figura 4.4(a), se muestra un gráfico de los elementos espacio-temporales  $\Omega^e \times I_n$  del método SEM-DG, y en la Figura 4.4(b), se muestra un gráfico de  $\mathbf{Y}^{\delta}$ .

Considerando la siguiente notación:

$$(f,g)_n = \int_{I_n} (fg)dt.$$
 (4.24)

Se resolverá el siguiente problema:

$$a(w^{\delta}, \mathbf{Y}^{\delta})_n = z(w^{\delta})_n, \tag{4.25}$$

donde

$$a(w^{\delta}, \mathbf{Y}^{\delta})_{n} =: (w^{\delta}, \mathbf{A}\mathbf{Y}^{\delta})_{n} + (w^{\delta}, \mathbf{B}\mathbf{Y}^{\delta})_{n} + w^{\delta}(t_{n}^{+})\mathbf{A}\mathbf{Y}^{\delta}(t_{n}^{+}),$$
  

$$z(w^{\delta})_{n} =: (w^{\delta}, \mathbf{q})_{n} + w^{\delta}(t_{n}^{+})\mathbf{A}\mathbf{Y}^{\delta}(t_{n}^{-}), \ \forall w^{\delta} \in \mathcal{W}^{\delta}.$$
  

$$\mathbf{Y}^{\delta}(t_{0}^{-}) = \mathbf{Y}^{\delta}(t_{0}).$$
(4.26)



**Figura 4.4:** Esquema gráfico para los elementos espacio-temporales del método SEM-DG. Fuente: Elaboración Propia.

Note que el valor de  $\mathbf{Y}^{\delta}(t_n^-) \notin I_n$  es conocido. Luego la formulación variacional discreta, asume la siguiente forma:

$$a(w^{\delta}, \mathbf{Y}^{\delta})_{n} = \left\{ \begin{bmatrix} (w^{\delta}, \dot{N}_{1}^{n})_{n} \mathbf{A} & (w^{\delta}, \dot{N}_{2}^{n})_{n} \mathbf{A} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (w^{\delta}, N_{1}^{n})_{n} \mathbf{B} & (w^{\delta}, N_{2}^{n})_{n} \mathbf{B} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w^{\delta}(t_{n}^{+}) N_{1}^{n}(t_{n}^{+}) \mathbf{A} & w^{\delta}(t_{n}^{+}) N_{2}^{n}(t_{n}^{+}) \mathbf{A} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{1}^{\delta} & \mathbf{Y}_{2}^{\delta} \end{bmatrix}^{T}, \quad (4.27)$$

$$z(w^{\delta})_n = \left[ (w^{\delta}, \mathbf{q})_n + w^{\delta}(t_n^+) \mathbf{A} \mathbf{Y}^{\delta}(t_n^-) \right].$$
(4.28)

Se consideran a las funciones de ponderación  $w^{\delta}$ , como las funciones base de  $W^{\delta}$ , resultando la siguiente expresión:

$$a(w^{\delta}, \mathbf{Y}^{\delta})_{n} = \left\{ \begin{bmatrix} (N_{1}^{n}, \dot{N}_{1}^{n})_{n} \mathbf{A} & (N_{1}^{n}, \dot{N}_{2}^{n})_{n} \mathbf{A} \\ (N_{2}^{n}, \dot{N}_{1}^{n})_{n} \mathbf{A} & (N_{2}^{n}, \dot{N}_{2}^{n})_{n} \mathbf{A} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (N_{1}^{n}, N_{1}^{n})_{n} \mathbf{B} & (N_{1}^{n}, N_{2}^{n})_{n} \mathbf{B} \\ (N_{2}^{n}, N_{1}^{n})_{n} \mathbf{B} & (N_{2}^{n}, N_{2}^{n})_{n} \mathbf{B} \end{bmatrix} + \left[ \begin{pmatrix} N_{1}^{n}, N_{1}^{n} \end{pmatrix}_{n} \mathbf{B} & (N_{2}^{n}, N_{2}^{n})_{n} \mathbf{B} \\ + \begin{bmatrix} N_{1}^{n}(t_{n}^{+}) N_{1}^{n}(t_{n}^{+}) \mathbf{A} & N_{1}^{n}(t_{n}^{+}) N_{2}^{n}(t_{n}^{+}) \mathbf{A} \\ N_{2}^{n}(t_{n}^{+}) N_{1}^{n}(t_{n}^{+}) \mathbf{A} & N_{2}^{n}(t_{n}^{+}) N_{2}^{n}(t_{n}^{+}) \mathbf{A} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{1}^{\delta} \\ \mathbf{Y}_{2}^{\delta} \end{bmatrix}, \quad (4.29)$$

Algoritmo Parareal en el estudio de Ondas Electromagnéticas - 2D

$$z(w^{\delta})_{n} = \begin{bmatrix} (N_{1}^{n}, \mathbf{q})_{n} + N_{1}^{n}(t_{n}^{+})\mathbf{A}\mathbf{Y}^{\delta}(t_{n}^{-})\\ (N_{2}^{n}, \mathbf{q})_{n} + N_{2}^{n}(t_{n}^{+})\mathbf{A}\mathbf{Y}^{\delta}(t_{n}^{-}) \end{bmatrix}.$$
(4.30)

Teniendo en cuenta que  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ , de las ecuaciones (4.25), (4.29) y (4.30), se sigue que:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} +\frac{1}{2}\mathbf{A} + \frac{\Delta t}{3}\mathbf{B} & \frac{1}{2}\mathbf{A} + \frac{\Delta t}{6}\mathbf{B} \\ -\frac{1}{2}\mathbf{A} + \frac{\Delta t}{6}\mathbf{B} & \frac{1}{2}\mathbf{A} + \frac{\Delta t}{3}\mathbf{B} \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{1}^{\delta} \\ \mathbf{Y}_{2}^{\delta} \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}} = \underbrace{\begin{bmatrix} (N_{1}^{n}, \mathbf{q})_{n} + \mathbf{A}\mathbf{Y}^{\delta}(t_{n}^{-}) \\ (N_{2}^{n}, \mathbf{q})_{n} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}}.$$
 (4.31)

Finalmente se tiene que resolver el sistema mostrado en la ec. (4.32), para conocer la solución  $\mathbf{Y}^{\delta}$  en el intervalo  $I_n$ :

$$\mathbf{RS} = \mathbf{L},\tag{4.32}$$

donde  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{4N_{dof} \times 4N_{dof}}$ ,  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{4N_{dof} \times 1}$  y  $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{4N_{dof} \times 1}$ .

El tamaño del sistema mostrado en la ec. (4.32) se reduce a la mitad, como se describe en la ec. (4.33), mediante el método de condensación estática:

$$\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{L}},\tag{4.33}$$

donde  $\hat{\mathbf{R}} \in \mathbb{R}^{2N_{dof} \times 2N_{dof}}, \hat{\mathbf{S}} \in \mathbb{R}^{2N_{dof} \times 1}$  y  $\hat{\mathbf{L}} \in \mathbb{R}^{2N_{dof} \times 1}$  (ver el Apéndice B para mayores detalles del método de condensación estática).

#### 4.1.6. Integración en el interior de la región estándar Ist

Con la función de mapeo  $\varphi_n(l)$ , se puede transformar cualquier integral definida sobre el intervalo  $I_n$  en una integral definida sobre el intervalo  $I_{st}$  [36]:

$$\int_{I_n} f(t)dt = \frac{t_{n+1} - t_n}{2} \int_{I_{st}} f(\varphi_n(l))dl.$$
(4.34)

Por lo tanto, se considera la regla de cuadratura de Gauss solamente sobre el intervalo  $I_{st}$ :

$$\int_{I_{st}} f(\varphi_n(l)) dl \approx \sum_i^Q \omega_i f(\varphi_n(l_i)).$$
(4.35)

La regla de cuadratura de Gauss con Q puntos de integración es exacta para polinomio de grado menor o igual que 2Q - 1. La correcta elección de las ponderaciones y de la distribución de los puntos, son explicados en la Sección 3.2.2.8.

Algoritmo Parareal en el estudio de Ondas Electromagnéticas - 2D

# CAPÍTULO 5 EL ALGORITMO PARAREAL

#### 5.1. Descripción del algoritmo Parareal

El algoritmo Parareal está basado en un enfoque iterativo predictor-corrector. Se lo puede comprender mejor mediante la descripción de su aplicación a una sencilla ecuación diferencial del tipo:

$$\frac{d\lambda}{dt} = \mathbb{B}(\lambda, t), \quad \lambda(0) = \lambda_0, \tag{5.1}$$

donde  $\mathbb{B}$  es una función arbitraria. Se desea encontrar el valor de  $\lambda$  en algún tiempo posterior t > 0. Se asume que se puede avanzar numéricamente en esta ecuación a partir de un instante arbitrario  $t \in [0, T]$  a otro instante de tiempo arbitrario  $t + \delta t$  mediante diversos esquemas de discretización. Formalmente se representará este avance como sigue:

$$\lambda(t+\delta t) = \mathcal{F}_{\delta t} \cdot \lambda(t). \tag{5.2}$$

Donde  $\mathcal{F}_{\delta t}$  representa el operardor de avance, actuando sobre los espacios apropiados a los cuales  $\lambda$  pertenece, y depende del esquema de discretización escogida. Para ir desde el instante inicial al instante final T, se necesitará aplicar el operador  $\mathcal{F}_{\delta t}$  tantas veces como se requiera para el valor dado de  $\delta t$ .

En el algoritmo Parareal se asume que existen dos operadores de avance (o esquemas numéricos) disponibles, que serán denotados como  $\mathcal{F}_{\delta t}$  y  $\mathcal{G}_{\Delta t}$ . La distinción entre estos dos esquemas numéricos es que  $\mathcal{G}_{\Delta t}$  es más rápido (usualmente al precio de ser menos preciso) que  $\mathcal{F}_{\delta t}$ , este último es el esquema numérico de interés en la resolución del problema encarado, pero es computacionalmente muy caro para ser ejecutado de manera secuencial entre el instante inicial y el instante T. En el algoritmo Parareal,  $\mathcal{G}_{\Delta t}$  es ejecutado secuencialmente entre t = 0 y T, mientras que  $\mathcal{F}_{\delta t}$  es siempre ejecutado en paralelo como se muestra en la Figura 5.1.

Sean N procesadores, denotados por  $P_0, P_1, \ldots, P_{N-1}$ . Sea el tiempo total de simulación, T, dividido en N intervalos temporales más pequeños de tamaño  $\Delta t = \frac{T}{N}$ . En lo que sigue, el índice n es usado para representar el n-ésimo instante de tiempo, definido como  $t_n = n \cdot \Delta t$  para  $n = 0, 1, 2, \ldots, N$ . El índice  $k = 0, 1, 2, \ldots$  representa la cantidad de iteraciones en el ciclo de convergencia del algoritmo Parareal.  $\lambda_n^k$  representa la solución en el instante  $t_n$  en la k-ésima iteración del ciclo de convergencia del algoritmo Parareal. El valor inicial, que también es dado, es denotado por  $\lambda_0^0$ .

Los pasos a seguir en el algoritmo Parareal son los que se muestran:

• Iteración k = 0:

 $P_0$  ejecuta  $\mathcal{G}_{\Delta t}$  secuencialmente, para calcular los valores iniciales  $\lambda_n^0$  para los instantes iniciales  $t_n$  en cada uno de los intervalos de tiempo de tamaño  $\Delta t$ .



Figura 5.1: Esquema gráfico del algoritmo Parareal. Fuente: [37].

- Iteración k > 0:
- Paso 1: Cada procesador  $(P_j)$  de manera independiente ejecuta  $\mathcal{F}_{\delta t}$  para propagar la solución, iniciando con el valor inicial proveído por  $\mathcal{G}_{\Delta t}$  (i.e  $\lambda_j^{k-1}$ ), entre el instante inicial  $(t_j)$  y el instante final  $(t_{j+1})$  de sus respectivos intervalos de tiempo. Este proceso es ejecutado en paralelo. El resultado de esta propagación es transmitido al siguiente procesador en línea  $(P_{j+1})$ .
- Paso 2:  $\mathcal{G}_{\Delta t}$  es ejecutado ahora de manera secuencial (pero no de manera contínua), se utiliza la sugerencia del algoritmo Parareal para actualizar los valores iniciales en cada intervalo temporal:

$$\lambda_{n+1}^{k+1} = \underbrace{\underbrace{\mathcal{G}_{\Delta t}\left(T_n, T_{n+1}, \lambda_n^{k+1}\right)}_{secuencial} + \underbrace{\mathcal{F}_{\delta t}\left(T_n, T_{n+1}, \lambda_n^k\right) - \mathcal{G}_{\Delta t}\left(T_n, T_{n+1}, \lambda_n^k\right)}_{paralelo}}_{paralelo}.$$
(5.3)

Note que esta parte del algoritmo no puede ser ejecutado en paralelo, a causa del primer término del lado derecho. Note también que el segundo y tercer término son obtenidos también en el paso y/o iteración previos.

Paso 3: Verificar la condición de convergencia. Si la solución converge para todos los intervalos temporales, se sale del ciclo. Caso contrario, otra iteración del ciclo del algoritmo Parareal es realizado, en la implementación estándar del algoritmo Parareal el ciclo se ejecuta sobre todos los intervalos temporales.

La descripción previa del algoritmo Parareal [38], se puede ver también como se detalla a continuación: [4].

## Algoritmo 1 El algoritmo Parareal.

1:  $\lambda_0^0 \leftarrow \mathbf{Y}_2^{\delta}(t_0);$ 2: para todo i = 0 : N - 1 hacer  $\lambda_{i+1}^0 \leftarrow \mathcal{G}_{\Delta t}(\lambda_i^0);$ 3: 4: fin para 5: Ejecutar  $\mathcal{F}_{\delta t}(\lambda_i^0)$  en paralelo sobre  $i = 0, \dots, N-1$  procesadores con un subproblema de alta precisión por cada procesador; 6:  $k \leftarrow 0$ : 7: mientras verdad hacer  $\lambda_0^{k+1} \leftarrow \lambda_0^k;$ 8: para todo i = 0: N - 1 hacer 9: Ejecutar  $\mathcal{G}_{\Delta t}(\lambda_i^{k+1})$ ; 10:  $\lambda_{n+1}^{k+1} = \mathcal{G}_{\Delta t}\left(T_n, T_{n+1}, \lambda_n^{k+1}\right) + \mathcal{F}_{\delta t}\left(T_n, T_{n+1}, \lambda_n^k\right) - \mathcal{G}_{\Delta t}\left(T_n, T_{n+1}, \lambda_n^k\right);$ 11: 12: fin para si converge entonces 13: 14: salir; 15: fin si Ejecutar  $\mathcal{F}_{\delta t}(\lambda_i^0)$  en paralelo sobre  $i = 0, \ldots, N-1$  procesadores con un subpro-16: blema de alta precisión por procesador;  $k \leftarrow k + 1;$ 17: 18: fin mientras

19: devolver cierto

Algunas observaciones son útiles en este punto. Primero, en el sentido de convergencia para el ciclo del algoritmo del Parareal, se debe cumplir cierta condición matemática por parte de  $\mathcal{F}_{\delta t}$  y  $\mathcal{G}_{\Delta t}$ , que se detalla en [3] y aparece como una condición específica sobre la limitación de la norma de las diferencias entre los dos esquemas numéricos en un espacio apropiado. Lamentablemente, es muy difícil (o casi imposible) traducir estas condiciones en recetas prácticas para cualquier problema en particular. El método de prueba y error, combinado con la experiencia, parece ser la mejor guía para escoger  $\mathcal{G}_{\Delta t}$ . Sin embargo, note que en la práctica, el algoritmo Parareal debe converger siempre en al menos N iteraciones, independientemente de que tan malo sea la elección de  $\mathcal{G}_{\Delta t}$ . Esto sucede porque, al final de la iteración k = 1, ambos procesadores  $P_0$  y  $P_1$  tienen el valor correcto de la solución, ya que  $\mathcal{F}_{\delta t}$  ha sido usado en el primer procesador para propagar la condición inicial exacta en t = 0. Por la misma razón, en k = j, todos los procesadores  $P_0, \ldots, P_i$  también tienen el valor correcto de la solución. Y así sucesivamente. Sin embargo, note también que si son necesarios N ciclos del algoritmo Parareal para converger a la solución exacta, se habría usado la misma (o más, incluyendo tiempos de comunicación y tiempo de ejecución para  $\mathcal{G}_{\Delta t}$ ) cantidad de tiempo de procesamiento que si se hubiese ejecutado la simulación secuencialmente con  $\mathcal{F}_{\delta t}$ . Pero de esta manera no se

Universidad Nacional de Asunción	Facultad de Ingeniería
Trabajo Final de Grado	Ingeniería Electrónica
Algoritmo Parareal en el estudio de Ondas Electromagnéticas -	2D

tendría ninguna ventaja del algoritmo Parareal, puesto que no se conseguiría mejorar los tiempos de cálculo de la simulación planteada. Por lo tanto, el algorimo Parareal funciona si la convergencia es alcanzada para una cantidad de iteraciones k mucho menor que N, implicando esto que en cada iteración, más de un intervalo temporal debe de converger en promedio [38].

Es importante destacar en este capítulo que la implementación de los pasos 5 y 16 del Algoritmo 1 ha sido de manera secuencial en una computadora personal (como caso académico), estos pasos fueron implementados mediante un ciclo iterativo FOR, dentro del cual se realizaron los cálculos de cada sub intervalo, es decir: se calcula el primer sub intervalo con la condición inicial dada en el problema, luego se calcula el segundo sub intervalo con la condición inicial que fue establecida en el ciclo FOR del paso 2 del Algoritmo 1, siguiendo de esta manera hasta el último sub intervalo a calcular. En las siguientes iteraciones ya se toman como condiciones iniciales de cada sub intervalo, los valores corregidos en el paso 11 del Algoritmo 1, iterando el algoritmo hasta que se cumpla el criterio de convergencia.

Algoritmo Parareal en el estudio de Ondas Electromagnéticas - 2D

# CAPÍTULO 6 RESULTADOS NUMÉRICOS

#### 6.1. Experimento 1

Para analizar la precisión de la implemtentación secuencial del método SEM-DG (SEM para la discretización del problema en el dominio espacial y DG para la discretización del problema en el dominio temporal), se realiza una comparación entre una solución analítica de la ec. (3.5),  $u(x,t) = sin(\sqrt{2\pi} \left(\frac{f}{c}\right) x_1 + \sqrt{2\pi} \left(\frac{f}{c}\right) x_2 - 2\pi \left(\frac{f}{c}\right) t\right)$ , y la solución numérica obtenida con el esquema SEM-DG desarrollado. La solución numérica es obtenida considerando c = 1 y  $T = \sqrt{2}$  segundos. El dominio  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$  es particionado, utilizando 64 elementos triangulares  $\Omega^e$  y el particionado del dominio temporal total, fue hecho con 64, 128, 256 y 512 pasos temporales  $I_n$ , respectivamente, y la función perturbadora considerada es f(x,t) = 0. Las figuras 6.1, 6.2, 6.3 y 6.4 muestran el error en la norma máxima de la solución y de su derivada para polinomios de orden variado, utilizados en la discretización del problema en el domino espacial y para cantidades de pasos temporales diferentes en la discretización temporal.



Figura 6.1: Error en la norma máxima entre la solución del esquema numérico secuencial y la solución analítica para polinomios de orden variado, con 64 pasos temporales. Fuente: Elaboración Propia.

45



Figura 6.2: Error en la norma máxima entre la solución del esquema numérico secuencial y la solución analítica para polinomios de orden variado, con 128 pasos temporales. Fuente: Elaboración Propia.



Figura 6.3: Error en la norma máxima entre la solución del esquema numérico secuencial y la solución analítica para polinomios de orden variado, con 256 pasos temporales. Fuente: Elaboración Propia.



**Figura 6.4:** Error en la norma máxima entre la solución del esquema numérico secuencial y la solución analítica para polinomios de orden variado, con 512 pasos temporales. Fuente: Elaboración Propia.

Se puede observar en las figuras anteriores, que en general un polinomio de alto orden, no implica necesariamente un mejor comportamiendo del error. Pero, también se puede ver que para un paso temporal más pequeño, se puede obtener un error más pequeño para polinomios de mayor orden. Otra cosa interesante a notar es que el comportamiento del error de la solución es mejor que el comportamiento del error de su derivada.

Ahora, el dominio  $\Omega$  es particionado usando 18, 32, 64 y 128 elementos triangulares  $\Omega^e$  y el dominio temporal es particionado utilizando 128 pasos temporales  $I_n$ . Las Figuras 6.5, 6.6, 6.7 y 6.8 muestran el error en la norma máxima de la solución y su derivada para polinomios de orden variado, utilizados en la discretización del problema en el dominio espacial y para diversos mallados del dominio espacial.



**Figura 6.5:** Error en la norma máxima entre la solución del esquema numérico secuencial y la solución analítica para polinomios de orden variado, con 18 elementos triangulares  $\Omega^e$ . Fuente: Elaboración Propia.



**Figura 6.6:** Error en la norma máxima entre la solución del esquema numérico secuencial y la solución analítica para polinomios de orden variado, con 32 elementos triangulares  $\Omega^e$ . Fuente: Elaboración Propia.



**Figura 6.7:** Error en la norma máxima entre la solución del esquema numérico secuencial y la solución analítica para polinomios de orden variado, con 64 elementos triangulares  $\Omega^e$ . Fuente: Elaboración Propia.



**Figura 6.8:** Error en la norma máxima entre la solución del esquema numérico secuencial y la solución analítica para polinomios de orden variado, con 128 elementos triangulares  $\Omega^e$ . Fuente: Elaboración Propia.

Se puede observar en las figuras anteriores, que la precisión de la solución y su derivada está acotada por el tamaño del paso temporal. Mientras se incrementa la cantidad de elementos triangulares  $\Omega^e$  dejando fijo el tamaño del paso temporal, el error no decrese para polinomios de mayor orden.

# 6.2. Experimento 2

También se desarrollan algunas simulaciones numéricas para probar el enfoque DG en el algoritmo Parareal, el cual se utiliza para resolver la ecuación de la onda - 2D, mostrada en la ec. (3.5), utilizando el método DG como los esquemas numéricos  $\mathcal{G}_{\Delta t}$  y  $\mathcal{F}_{\delta t}$ .

Se realiza una comparación entre una solución numérica dada por el esquema secuencial (probada en el experimento anterior) y la solución brindada por el algoritmo Parareal, además, de manera totalmente análoga se realiza comparaciones para la derivada de la solución, se utiliza polinomios de cuarto orden para la discretización del problema en el dominio espacial, 32 elementos triangulares  $\Omega^e$  para el particionamiento de  $\Omega$ , por otro lado, se consideran  $\hat{\ell} = 32$  pasos temporales para el esquema numérico  $\mathcal{F}_{\delta t}$  (en cada intervalo temporal) y  $\hat{k} = N$  pasos temporales para el esquema numérico  $\mathcal{G}_{\Delta t}$  (en el dominio temporal total), utilizando una tolerancia de  $10^{-9}$  como criterio de parada del algoritmo Parareal, el resultado de estas comparaciones se muestran en la Figura 6.9. Observe que el tamaño del problema es creciente en este experimento. No olvidar cargar los errores para las derivadas.

En la Figura 6.10, se presenta un experimento (similar al anterior) con la diferencia que ahora se mantiene constante el producto  $\hat{k} \cdot \hat{\ell} = 8192$  (tamaño del problema), y considerando  $\hat{k} = N$ . No olvidar cargar los errores para las derivadas.



**Figura 6.9:** Error en la norma máxima entre la solución del esquema numérico secuencial y la solución brindada por el algoritmo Parareal, también entre la derivada de la solución obtenida del esquema numérico secuencial y la derivada de la solución obtenida del algoritmo Parareal, para  $\hat{\ell} = 32$  y  $\hat{k} = N$ . Fuente: Elaboración Propia.



**Figura 6.10:** Error en la norma máxima entre la solución del esquema numérico secuencial y la solución brindada por el algoritmo Parareal, también entre la derivada de la solución obtenida del esquema numérico secuencial y la derivada de la solución obtenida del algoritmo Parareal, para  $\hat{k} \cdot \hat{\ell} = 8192$ , y  $\hat{k} = N$ . Fuente: Elaboración Propia.

Cada curva de convergencia en las Figuras 6.11, 6.12 y 6.13, corresponden al error entre la solución numérica secuencial y la solución obtenida a partir del algoritmo Parareal, medido en cada uno de los  $\hat{k} + 1$  puntos temporales  $t_n = n\Delta t$ ,  $\forall n = 0, 1..., \hat{k}$ , del mallado grueso, donde la abscisa muestra el índice de iteración k del algoritmo Parareal. El error se mide en la norma máxima, comparando los resultados obtenidos del algoritmo Parareal (donde

se han usado 18 elementos triangulares y polinomios de tercer orden para la discretización del problema en el dominio espacial). Note que: después de N iteraciones, necesariamente el algoritmo Parareal alcanza la precisión del esquema numérico  $\mathcal{F}_{\delta t}$ , cuya solución se toma como referencia para calcular el error.



**Figura 6.11:** Error en la norma máxima, entre la solución del algoritmo Parareal y la solución secuencial correspondiente, medida en cada punto del mallado grueso, para  $\hat{k} = 16$  y  $\hat{\ell} = 16$ . Fuente: Elaboración Propia.



**Figura 6.12:** Error en la norma máxima, entre la solución del algoritmo Parareal y la solución secuencial correspondiente, medida en cada punto del mallado grueso, para  $\hat{k} = 32$  y  $\hat{\ell} = 16$ . Fuente: Elaboración Propia.



**Figura 6.13:** Error en la norma máxima, entre la solución del algoritmo Parareal y la solución secuencial correspondiente, medida en cada punto del mallado grueso, para  $\hat{k} = 128$  y  $\hat{\ell} = 16$ . Fuente: Elaboración Propia.

## 6.3. Desempeño esperado del algoritmo Parareal

Con el objetivo de obtener algún tipo de información en relación al desempeño del algoritmo Parareal aplicado a problemas hiperbólicos, se desarrolla en esta sección un pequeño estudio del comportamiento del algoritmo Parareal aplicado al problema de la ecuación de onda - 2D. Son examinados el régimen llamado escalabilidad *fuerte* y el régimen llamado escalabilidad *débil* [38].

La escalabilidad del algoritmo Parareal en el contexto de la ecuación de la onda - 2D, son presentados en las Tablas 6.1 y 6.2. En ambos casos son usados polinomios de tercer orden para la discretización del problema en el dominio espacial,  $\#\Omega^e$  es la cantidad de elementos triangulares  $\Omega^e$  usados en la partición del dominio  $\Omega$  y se considera una tolerancia de  $10^{-8}$  como criterio de parada del algoritmo Parareal.

En la Tabla 6.1, el tamaño del problema se mantiene constante, mientras que la razón  $\hat{\ell} = \frac{\Delta t}{\delta t}$  está decreciendo, por lo tanto la cantidad de subdominios  $\hat{k}$  se incrementa. En la Tabla 6.2, la razón  $\hat{\ell} = \frac{\Delta t}{\delta t}$  se mantiene constante, mientras que el tamaño del problema se incrementa.

## 6.3.1. Experimento 3 (Escalabilidad Fuerte)

En la escalabilidad fuerte, se examina el desempeño del algoritmo Parareal en función de la variación de la cantidad de procesadores (denotado mediante N), para un problema de tamaño fijo en el dominio temporal, es decir: ( $\hat{k} \cdot \hat{\ell} = 4096$ ). En una paralelización perfecta, en el régimen de escalabilidad fuerte, uno debe buscar que el tiempo de cálculo

que se tarde en obtener la solución de la ec. (3.5) con el algoritmo del Parareal sea menor, según N aunenta, en comparación con el tiempo de cálculo empleado por el esquema secuencial para obtener la solución de la ec. (3.5) [38].

$\hat{k}$	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048
$\hat{\ell}$	2048	1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2
$\#\Omega^e = 18$	2	4	8	16	20	9	5	3	2	1	1
$\#\Omega^e = 32$	2	4	8	16	28	17	7	4	2	1	1
$\#\Omega^e = 64$	2	4	8	16	32	32	13	5	3	2	1

**Cuadro 6.1:** Cada entrada del cuadro es la cantidad de iteraciones  $k_s(N)$  del algoritmo Parareal para alcanzar la convergencia, asumiendo que el tamaño del problema se mantiene constante  $(\hat{k} \cdot \hat{\ell} = 4096)$ , utilizando polinomios de tercer orden en la discretización del problema en el dominio espacial. Fuente: Elaboración Propia.

Para una mejor interpretación de los resultados de este experimento, se muestra en la Figura 6.14, la aceleración que logra el algoritmo Parareal en el cálculo de la solución de la ec. (3.5). Sea  $T_{\mathcal{G}}^{\text{ser}}(T)$  el tiempo empleado para resolver la ec. (3.5) secuencialmente usando el esquema numérico  $\mathcal{G}_{\Delta t}$ , y sea  $T_{\mathcal{F}}^{\text{ser}}(T)$  el tiempo empleado para resolver la ec. (3.5) secuencialmente usando el esquema numérico  $\mathcal{F}_{\delta t}$ . En cada ciclo del algoritmo Parareal, el esquema numérico  $\mathcal{F}_{\delta t}$  es aplicado en cada uno de los N procesadores, por un periodo de simulación  $\Delta t = \frac{T}{N}$ , y el esquema numérico  $\mathcal{G}_{\Delta t}$  se ejecuta secuencialmente para el tiempo de simulación completo T. Así, el tiempo total para resolver la ec. (3.5), mediante el algoritmo Parareal, puede ser estimado (ignorando pérdidas en la comunicación), como:

$$T_{pa}^{s} = k_{s}(N) \left( T_{\mathcal{G}}^{\text{ser}}(T) + \frac{T_{\mathcal{F}}^{\text{ser}}(T)}{N} \right), \tag{6.1}$$

donde  $k_s(N)$  es la cantidad de iteraciones del algoritmo Parareal, requerido para alcanzar la convergencia (considerando escalabilidad fuerte *strong scaling*), la cual es una función desconocida de N. Así, el factor de aceleración (o ganancia de tiempo) logrado por el algoritmo Parareal es dado por [38]:

$$S_s = \frac{T_F^{\text{ser}}(T)}{T_{pa}^s}.$$
(6.2)



Algoritmo Parareal en el estudio de Ondas Electromagnéticas - 2D



#### 6.3.2. Experimento 4 (Escalabilidad Débil)

En la escalabilidad débil, se examina el desempeño del algoritmo Parareal en función de la variación de la cantidad de procesadores (denotado mediante N), para un problema creciente, pero manteniendo el trabajo asignado a cada procesador constante. En una paralelización perfecta, en el régimen de escalabilidad débil, uno busca que el trabajo por cada procesador se mantenga constante según N vaya creciendo [38].

$\hat{k}$	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048
$\hat{\ell}$	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16
$\#\Omega^e = 18$	2	4	8	16	20	9	5	3	2	1	1
$\#\Omega^e = 32$	2	4	8	16	28	17	7	4	2	1	1
$\#\Omega^e = 64$	2	4	8	16	32	32	13	5	3	2	1

**Cuadro 6.2:** Cada entrada del cuadro es la cantidad de iteraciones  $k_w(N)$  del algoritmo Parareal para alcanzar la convergencia, asumiendo que el tamaño del problema aumenta y considerando  $\hat{\ell} = 16$  constante, se utilizan polinomios de tercer orden en la discretización del problema en el dominio espacial. Fuente: Elaboración Propia.

Para una mejor interpretación de los resultados de este experimento, se muestra en la Figura 6.15, la aceleración que logra el algoritmo Parareal en el cálculo de la solución de la ec. (3.5). El problema a ser resuelto tiene una longitud  $T = N \cdot \Delta t$ , siendo la cantidad de intervalos temporales considerados en  $\Delta t$  una cantidad fija,  $\hat{\ell} = 16$ . Esto es, el tamaño del problema aumenta linealmente con la cantidad de procesadores. Así, el tiempo total para resolver la ec. (3.5), mediante el algoritmo Parareal, considerando el tamaño del

problema  $N \cdot \Delta t$ , usando N procesadores, puede ser estimada (ignorando pérdidas en la comunicación), como:

$$T_{pa}^{w} = k_{w}(N) \left( N \cdot T_{\mathcal{G}}^{\text{ser}}(\Delta t) + T_{\mathcal{F}}^{\text{ser}}(\Delta t) \right),$$
(6.3)

donde  $k_w(N)$  es la cantidad de iteraciones del algoritmo Parareal, requerido para alcanzar la convergencia (considerando escalabilidad débil *weak scaling*), la cual es una función desconocida de N. Así, el factor de aceleración (o ganancia de tiempo) logrado por el algoritmo Parareal es dado por [38]:



$$S_w = \frac{T_F^{\text{ser}}(T)}{T_{pa}^w}.$$
(6.4)

**Figura 6.15:** Aceleración lograda por el algoritmo Parareal en el cálculo de la solución de la ec. (3.5), en el régimen de escalabilidad débil, considerando  $\hat{\ell} = 16$ . Fuente: Elaboración Propia.

#### 6.4. Buscando restricción

Esta seccción contempla experimentos que han sido desarrollados con el objetivo de buscar una condición que relaciona el tamaño del paso temporal del esquema numérico  $\mathcal{G}_{\Delta t}$  con el tamaño del paso temporal del esquema numérico  $\mathcal{F}_{\delta t}$ , que nos permita predecir la cantidad de iteraciones que tendrá el algoritmo parareal para cumplir con el criterio de parada, o dicho de otra manera que para cierta relación entre estos pasos temporales la cantidad de iteraciones del algoritmo parareal se mantenga aproximadamente constante (sin variar demasiado). Esto hay que discutir con Christian puesto que este comportamiento tenemos que relacionarlo al concepto de escalabilidad y aun falta unir estas dos partes.

## 6.4.1. Experimento 5

Estas simulaciones fueron desarrolladas usando polinomios de segundo orden para la discretización del problema en el dominio espacial, con 61 nodos libres, y considerando una tolerancia de  $10^{-9}$  como criterio de parada del algoritmo Parareal.

$\frac{\hat{\ell}}{\hat{k}} = 2$	(32, 16) 15	(64, 32) 17	(128, 64) 9	(256, 128) 5	(512, 256) <b>3</b>	(1024, 512) 2	(2048, 1024)
$\frac{\hat{\ell}}{\hat{k}} = 4$	(32, 8) 7	$\overset{(64,16)}{15}$	(128, 32) 18	(256, 64) 9	$\overset{(512,128)}{5}$	(1024,256) $3$	2048, 512 2
$\frac{\hat{\ell}}{\hat{k}} = 8$	(32, 4)	(64, 8) 7	(128, 16) 15	(256, 32) 18	(512, 64) 9	(1024, 128) $5$	(2048, 256)
$\frac{\hat{\ell}}{\hat{k}} = 16$	(32, 2) 2	(64, 4) <b>3</b>	(128, 8) 7	(256, 16) 15	(512, 32) 18	(1024, 64) 9	(2048, 128) 5
$\frac{\hat{\ell}}{\hat{k}} = 32$	(32, 1)	(64, 2) 1	(128, 4)	(256, 8) 7	(512, 16) 15	(1024, 32) 18	(2048, 64) 9

**Cuadro 6.3:** Cada entrada del cuadro es  $(\hat{\ell}, \hat{k})$  y la cantidad de iteraciones k(N) del algoritmo Parareal para alcanzar la convergencia, se utilizan polinomios de segundo orden en la discretización del problema en el dominio espacial. Fuente: Elaboración Propia.

# 6.4.2. Experimento 6

Estas simulaciones fueron desarrolladas usando polinomios de segundo orden para la discretización del problema en el dominio espacial, con 181 nodos libres, y considerando una tolerancia de  $10^{-9}$  como criterio de parada del algoritmo Parareal.

Note que la cantidad de iteraciones k, depende fuertemente de la cantidad de intervalos temporales considerados en el esquema numérico  $\mathcal{G}_{\Delta t}$  y en la tabla está representada por  $\hat{k}$ .

$\hat{k}$	16	32	64	128	256	512
$\hat{\ell} = 16$	15	30	20	8	4	2
$\hat{\ell} = 32$	15	30	20	8	4	2
$\hat{\ell} = 64$	15	30	20	8	4	2
$\hat{\ell} = 128$	15	30	20	8	4	2

**Cuadro 6.4:** Cada entrada del cuadro es la cantidad de iteraciones k del algoritmo Parareal para alcanzar la convergencia, se utilizan polinomios de segundo orden en la discretización del problema en el dominio espacial. Fuente: Elaboración Propia.

# CAPÍTULO 7 CONCLUSIONES FINALES Y TRABAJOS FUTUROS

Algoritmo Parareal en el estudio de Ondas Electromagnéticas - 2D

# APÉNDICE A CORRECTA ELECCIÓN DE LOS ESPACIOS DE FUNCIONES

#### **A.1.** Construcción de un subespacio de dimensión finita de $H^1(\Omega)$

Para iniciar, se dará algunas definiciones necesarias.

**Definición 2** Un elemento finito es un triplete  $(\Omega^e, E, \Theta)$ , donde:

- 1.  $\Omega^e$ , es conexo y de interior no vacío.
- 2. *E*, *es un espacio vectorial de dimensión finita N*, *cuyos elementos son funciones definidas de*  $\Omega^e$  *en*  $\mathbb{R}$ .
- 3.  $\Theta$ , es una base del espacio dual de E, es decir, N funciones lineales de E en  $\mathbb{R}$  linealmente independientes. Por simplicidad se puede interpretar a  $\Theta$  como un conjunto de puntos seleccionados de  $\Omega^e$ , sobre los cuales se definirán las funciones base del espacio vectorial E.

**Definición 3** Se dice que el conjunto de puntos  $\{a_j\}_{j=1}^N$  es *E*-unisolvente si y solamente si, dados N escalares reales cualesquiera  $\alpha_j$ ,  $1 \le j \le N$ , existe solo una función p del espacio E tal que

$$p(a_j) = \alpha_j, \qquad 1 \le j \le N.$$

**Definición 4 (Un elemento finito de Lagrange)** Un elemento finito de Lagrange es un elemento finito  $(\Omega^e, E, \Theta)$  en el cual  $\Theta = \{a_j\}_{j=1}^N$  y donde  $\{a_j\}_{j=1}^N$  es un conjunto de puntos de  $\Omega^e$  E-unisolvente.

**Definición 5 (Operador** *E*-interpolador sobre  $\Omega^e$ ) *Es llamado operador E*-interpolador de Lagrange sobre  $\Omega^e$  al operador que toma toda función  $\Psi(x)$  definida sobre  $\Omega^e$  y lo asocia a la función  $\mathcal{I}_{\Omega^e}\Psi(x)$  definida por  $\mathcal{I}_{\Omega^e}\Psi(x) = \sum_i^N \Psi(a_i)p_i(x)$ , donde  $p_i(x) \in E$   $i = 1, \ldots, N$ ,  $\mathcal{I}_{\Omega^e}\Psi(x)$  es llamada función interpoladora de  $\Psi(x)$ .

La función  $\mathcal{I}_{\Omega^e}\Psi(x)$ , verifica  $\mathcal{I}_{\Omega^e}\Psi(a_i)p_i(a_j) = \sum_i^N \Psi(a_i)\delta_{ij} = \Psi(a_i), \ 1 \le j \le N$ , donde  $\delta_{ij}$  es el delta de Kronecker. Es por esto que solo la función  $\mathcal{I}_{\Omega^e}\Psi(x) \in E$  es la que verifica  $\mathcal{I}_{\Omega^e}\Psi(a_j) = \Psi(a_j)$ .

**Definición 6** Sea  $\Omega^e \subset \Omega \subset \mathbb{R}^2$ , un elemento finito  $(\Omega^e, E, \Theta)$  se dice que es de clase  $C^0$  si se cumplen las siguientes condiciones:

1.  $E \subset C^0(\Omega^e)$ 

2. Para cada lado  $\Gamma'$  de la frontera  $\partial \Omega^e$ , el conjunto  $\Theta' = \Theta \cap \Gamma'$  es E'-unisolvente, donde  $E' = \{ p|_{\Gamma'} ; p \in E \}.$ 

A continuación se mostrará cómo construir funciones del espacio  $H^1(\Omega)$  a partir de funciones a trozos definidas en subconjuntos de  $\Omega$ .

**Teorema 1** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3 \text{ y } \mathcal{T}(\overline{\Omega})$  una triangulación. Considere  $v^{\delta}(x) \in C^0(\overline{\Omega})$  tal que  $v^{\delta}(x)|_{\Omega^e} \in H^1(\Omega^e)$ ,  $\forall \Omega^e \in \mathcal{T}(\overline{\Omega})$ . Entonces se cumple que  $v^{\delta}(x) \in H^1(\Omega)$ .

(Revisar [27] para mayores detalles).

Considere (por simplicidad) a  $\Omega$  como un abierto poligonal de  $\mathbb{R}^2$ .  $\overline{\Omega} = \bigcup_{\overline{\Omega^e} \in \mathcal{T}(\overline{\Omega})} \overline{\Omega^e}$ donde  $\mathcal{T}(\overline{\Omega})$  es una triangulación de  $\overline{\Omega}$ .

Además, se supone que cada elemento  $\overline{\Omega^e}$  de  $\mathcal{T}(\overline{\Omega})$  está asociado a un elemento finito de Lagrange  $(\overline{\Omega^e}, \mathcal{P}_P(\overline{\Omega^e}), \Theta_{\overline{\Omega^e}})$  tal que  $\mathcal{P}_P(\Omega^e) \subset H^1(\Omega^e)$  donde  $\mathcal{P}_P(\overline{\Omega^e})$  es el espacio de polinomios de orden igual o menor que P definidos sobre  $\overline{\Omega^e}$ , también se sabe que  $N_m = \dim \mathcal{P}_P = \frac{(P+1)(P+2)}{2}$ . (Revisar [19, 27] para mayores detalles).

De la siguiente manera se define el espacio de dimensión finita

$$\mathcal{V}^{\delta} = \{ v^{\delta} \in C^{0}(\overline{\Omega}); \forall \overline{\Omega^{e}} \in \mathcal{T}(\overline{\Omega^{e}}), v^{\delta} \big|_{\overline{\Omega^{e}}} \in \mathcal{P}_{P}(\overline{\Omega^{e}}) \}.$$
(A.1)

Así, gracias a los teoremas vistos previamente, se puede decir que el espacio de dimensión finita  $\mathcal{V}^{\delta}$  es un subespacio de  $H^1(\Omega)$ .

Sin consideraciones adicionales sobre los elementos finitos  $(\Omega^e, \mathcal{P}_P(\Omega^e), \Theta_{\Omega^e})$ , no es evidente la determinación de una base para  $\mathcal{V}^{\delta}$ . Por otro lado, es natural la introducción de los operadores de interpolación  $\mathcal{I}$  que asocia  $v^{\delta}(x) \in C^0(\overline{\Omega})$  a la función  $\mathcal{I}v^{\delta}(x) \in L^2(\Omega)$ , donde la interpolación es definida como sigue:  $\forall \overline{\Omega^e} \in \mathcal{T}(\overline{\Omega}), \quad \forall x \in \overline{\Omega^e} \quad \mathcal{I}v^{\delta}(x) = \mathcal{I}_{\Omega^e}v^{\delta}(x)$  y por lo tanto  $\mathcal{I}v^{\delta}(x) \notin \mathcal{V}^{\delta}$ . Para evitar esta situación, se introduce una *hipótesis de compatibilidad* entre dos elementos finitos.

Se considera que para todo par  $\{\overline{\Omega^{e_1}}, \overline{\Omega^{e_2}}\}$  de elementos adyacentes de  $\mathcal{T}(\overline{\Omega})$  cuya frontera común es  $\Gamma = \partial \Omega^{e_1} \cap \partial \Omega^{e_2} \neq \emptyset$ , se verificará que:

- 1.  $\mathcal{P}_P(\overline{\Omega^{e_1}})\Big|_{\Gamma} = \mathcal{P}_P(\overline{\Omega^{e_2}})\Big|_{\Gamma}$ .
- 2.  $\Theta_{\overline{\Omega^{e_1}}}|_{\Gamma} = \Theta_{\overline{\Omega^{e_2}}}|_{\Gamma}$ , donde  $\Theta_{\overline{\Omega^{e_1}}} = \{a_j\}_{j=1}^{N_m}$  y donde  $\{a_j\}_{j=1}^{N_m}$  es un conjunto de puntos de  $\overline{\Omega^e}$ , aquí  $N_m = \dim \mathcal{P}_P = \frac{(P+1)(P+2)}{2}$ , y  $\Theta_{\Omega^{e_1}}|_{\Gamma}$  es un conjunto de puntos en la frontera común  $\Gamma$  entre  $\Omega^{e_1}$  y  $\Omega^{e_2}$ .

**Teorema 2** Considerando que la función  $\chi : \Omega_{st} \to \Omega^e$  es una biyección. Luego, si  $(\Omega_{st}, \mathcal{P}_P(\Omega_{st}), \Theta_{\Omega_{st}})$  es un elemento finito de Lagrange, el triplete  $(\Omega^e, \mathcal{P}_P(\Omega^e), \Theta_{\Omega^e})$ , donde  $\Omega^e = \chi(\Omega_{st}), \mathcal{P}_P(\Omega^e) = \{p : \Omega^e \to \mathbb{R}; p \circ \chi \in \mathcal{P}_P(\Omega_{st})\} y \Theta_{\Omega^e} = \chi(\Theta_{\Omega_{st}})$  es también un elemento finito de Lagrange.

(Revisar [27] para mayores detalles).

**Teorema 3** Sea  $\mathcal{T}(\overline{\Omega})$  una triangulación de  $\overline{\Omega}$  y sea  $(\overline{\Omega^e}, \mathcal{P}_P(\overline{\Omega^e}), \Theta_{\overline{\Omega^e}})_{\overline{\Omega^e} \in \mathcal{T}(\overline{\Omega})}$  una familia de elementos finitos asociados. Suponga que las condiciones de compatibilidad (1) y (2) se cumplen y para todo  $\overline{\Omega^e} \in \mathcal{T}(\overline{\Omega})$ ,  $(\overline{\Omega^e}, \mathcal{P}_P(\overline{\Omega^e}), \Theta_{\overline{\Omega^e}})$  es un elemento finito de clase  $C^0(\overline{\Omega^e})$  y  $\mathcal{P}_P(\overline{\Omega^e})$  es un subespacio de  $H^1(\overline{\Omega^e})$ . Entonces, el operador interpolación  $\mathcal{I}$ , definido como  $\forall \ \overline{\Omega^e} \in \mathcal{T}(\overline{\Omega}), \ \forall x \in \overline{\Omega^e} \ \mathcal{I}v^{\delta}(x) = \mathcal{I}_{\Omega^e}v^{\delta}(x)$  desde  $C^0(\overline{\Omega})$  hacia  $L^2(\overline{\Omega})$  tiene su imagen en  $C^0(\overline{\Omega})$ . En otras palabras y de manera más precisa  $\mathcal{V}^{\delta} = \{\mathcal{I}v^{\delta}(x); v^{\delta}(x) \in C^0(\overline{\Omega})\} \subset C^0(\overline{\Omega}).$ 

(Revisar [27] para mayores detalles).

## A.2. Construyendo una base para $\mathcal{V}^{\delta}$

El conjunto de nodos de los elementos finitos es dado por  $\Theta_{\overline{\Omega}} = \bigcup_{\overline{\Omega^e} \in \mathcal{T}(\overline{\Omega})} \Theta_{\overline{\Omega^e}} = \{a_i\}_{i=1}^{N_{Tot}}$ , donde  $card(\Theta_{\overline{\Omega}}) = N_{Tot}$  y  $a_i = (x_1^i, x_2^i) \in \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ . Para cada  $i, 1 \leq i \leq N_{Tot}$ , se designa  $\Phi_i(x) \in \mathcal{V}^\delta$ , tal que  $\Phi_i(a_j) = \delta_{ij}, 1 \leq j \leq N_{Tot}$ , donde  $\delta_{ij}$  es el delta de Kronecker. Si  $v^\delta(x) \in C^0(\overline{\Omega})$ , se tiene que  $\mathcal{I}v^\delta(x) = \sum_{i=1}^{N_{Tot}} v^\delta(a_i) \Phi_i(x)$ .

**Corolario 1** Con las hipótesis anteriores, el conjunto de funciones  $\{\Phi_i(x)\}_{i=1}^{N_{Tot}}$  proporciona una base de  $\mathcal{V}^{\delta}$  y toda función  $v^{\delta}(x) \in \mathcal{V}^{\delta}$  se expresa como:  $v^{\delta}(x) = \sum_{i=1}^{N_{Tot}} v^{\delta}(a_i) \Phi_i(x)$ .

**Definición 7** Los escalares  $\{v^{\delta}(a_i)\}_{i=1}^{N_{Tot}}$  son llamados grados de libertad de una función  $v^{\delta}(x) \in \mathcal{V}^{\delta}$ . Note que la función  $\Phi_i(x)$  posee soporte pequeño. Con mayor precisión, el soporte de  $\Phi_i(x)$  es el conjunto de elementos  $\overline{\Omega^e} \in \mathcal{T}(\overline{\Omega})$  que contienen a los nodos  $a_i$ . Además, la restricción de  $\Phi_i(x)$  a cada uno de estos elementos  $\overline{\Omega^e}$  es una función base del elemento finito  $(\Omega^e, \mathcal{P}_P(\Omega^e), \Theta_{\Omega^e})$ .

Sea  $\mathcal{T}(\overline{\Omega})$  una triangulación de  $\overline{\Omega}$  construída por elementos triangulares  $\overline{\Omega^e}$ . Dado un entero  $P \geq 1$ , el elemento finito  $(\overline{\Omega_{st}}, \mathcal{P}_P(\overline{\Omega_{st}}), \Theta_{\overline{\Omega_{st}}})$ , donde el elemento estándar  $\overline{\Omega_{st}}$  se define como  $\overline{\Omega_{st}} = \{(\xi_1, \xi_2); -1 \leq \xi_1, \xi_2, \xi_1 + \xi_2 \leq 0\}$  como se muestra en la Figura A.1,  $\mathcal{P}_P(\overline{\Omega_{st}})$  es el espacio de polinomios de orden menor o igual que P definido sobre  $\overline{\Omega_{st}}$ , es sabido que dim $\mathcal{P}_P(\overline{\Omega_{st}}) = \frac{(P+1)(P+2)}{2} = N_m$  (por lo tanto, la base de  $\mathcal{P}_P(\overline{\Omega_{st}})$ debe tener  $N_m$  funciones linealmente independientes) y  $\Theta_{\overline{\Omega_{st}}}$  son los puntos de Fekete (los cuales se detallarán más adelante), estos puntos de  $\overline{\Omega_{st}}$  están asociados con los puntos de los elementos  $\overline{\Omega^e}$  mediante  $\chi$  y por consecuencia se lo asocia con todos los elementos finitos ( $\overline{\Omega^e}, \mathcal{P}_P(\overline{\Omega^e}), \Theta_{\overline{\Omega^e}}$ ) donde  $\overline{\Omega^e} \in \mathcal{T}(\overline{\Omega})$ . Entonces, todo ( $\overline{\Omega^e}, \mathcal{P}_P(\overline{\Omega^e}), \Theta_{\overline{\Omega^e}}$ ) es de clase  $C^0$  y se verifican las condiciones de compatibilidad, siendo de esta manera aplicable el resultado que nos brinda el teorema 3.

## A.2.1. Polinomios de Lagrange como base para $\mathcal{V}^{\delta}$

La base nodal para una región triangular no puede ser definida con una expresión en forma cerrada. Sin embargo, se definirá la base nodal como los polinomios de Lagrange,

Algoritmo Parareal en el estudio de Ondas Electromagnéticas - 2D





denotado por  $L_i^{Nm}(\xi_1, \xi_2)$ , sobre el conjunto de puntos  $\Theta_{\overline{\Omega_{st}}}$  en la región estándar  $\overline{\Omega_{st}}$ , y mediante  $\chi$  en cualquier otra región  $\overline{\Omega^e}$ .

Note que

$$\begin{split} L_i^{N_m}(\overline{\Omega_{st}}) &\subseteq \mathcal{P}_P(\overline{\Omega_{st}}) = \operatorname{span}\mathcal{P}_P(\overline{\Omega_{st}}) = \operatorname{span}\{\xi_1^r \xi_2^s\}_{(r,s)\in\Upsilon},\\ \Upsilon &= \{(r,s); 0 \le r, s, r+s \le P\}, \end{split}$$

Por lo tanto, para que la base nodal  $L_i^{Nm}(\xi_1, \xi_2)$ , sea una base de  $\mathcal{P}_P(\overline{\Omega_{st}})$  es necesario que  $\Theta_{\overline{\Omega_{st}}}$  contenga  $N_m = \frac{(P+1)(P+2)}{2}$  puntos nodales  $(\xi_1, \xi_2)$ . La Figura A.2 muestra la distribución de  $N_m = 6$  nodos sobre  $\overline{\Omega^e}$  y la Figura A.3 muestra un ejemplo de polinomios de Lagrange en un elemento arbitrario  $\overline{\Omega^e}$  para P = 2. (Revisar [19, 27] para mayores detalles).



**Figura A.2:** Elemento genérico  $\overline{\Omega^e}$  con  $N_m = 6$  nodos. Fuente: [27].





**Figura A.3:** Polinomios de Lagrange en un elemento genérico  $\overline{\Omega^e}$  para P = 2. Fuente: [27].

## A.2.2. Minimización de la constante de Lebesgue y los puntos de Fekete

Una elección razonablemente buena para los puntos nodales  $\Theta_{\overline{\Omega^e}} = \{a_i\}_{i=1}^{N_m}$  en el interior de la región triangular, son los puntos que minimizan la constante de Lebesgue. La constante de Lebesgue es una medida que expresa lo bien que el polinomio definido sobre un conjunto de puntos considerado aproxima, en relación al mejor polinomio aproximante a la función objetivo en la norma máxima. Basados en esta idea, una alternativa a la minimización de los puntos electrostáticos es buscar un conjunto de puntos con una constante de Lebesgue pequeña mediante la maximización del determinante de la matriz de Vandermonde. Estos puntos son conocidos como los puntos de Fekete. (Revisar [19] para mayores detalles).

## A.2.3. El polinomio de Lagrange y la constante de Lebesgue

Recordando que  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ , considere el problema de interpolación de una función  $f(\xi)$  en la región estándar  $\overline{\Omega_{st}}$ . Dado un conjunto de puntos  $\Theta_{\overline{\Omega_{st}}}$ , considere la función polinomial  $g(\xi)$  que verifica lo siguiente:

$$g(\xi^i) = f(\xi^i), \quad \forall i, \ 1 \le i \le N_m.$$

Este polinomio puede ser considerado como el polinomio interpolador tal que  $g(\xi) = \mathcal{I}_{\overline{\Omega_{st}}} f(\xi)$ , donde  $\mathcal{I}_{\overline{\Omega_{st}}}$  es el operador de interpolación. La constante de Lebesgue muestra lo

bien que  $\mathcal{I}_{\overline{\Omega_{st}}}$  aproxima a  $f(\xi)$ . Se denota mediante  $p^{\star}(\xi)$  al mejor polinomio aproximante en la norma máxima, definida como

$$||f(\xi)||_{\infty} = \max_{\xi \in \overline{\Omega_{st}}} |f(\xi)|.$$

La constante  $\Lambda_{N_m} = ||\mathcal{I}_{\overline{\Omega_{st}}}||_{\infty}$ , donde  $||\mathcal{I}_{\overline{\Omega_{st}}}||_{\infty} = \max_{||f(\xi)||_{\infty}=1} ||\mathcal{I}_{\overline{\Omega_{st}}}f||_{\infty}$  es conocida como la *constante de Lebesgue*. La constante de Lebesgue es una medida de lo bien que aproxima  $\mathcal{I}_{\overline{\Omega_{st}}}f$ , en relación al mejor polinomio aproximante  $p^*$  en la norma máxima. Elecciones de conjuntos de puntos nodales como ser los equi-espaciados son conocidos por tener una constante de Lebesgue que crece exponencialmente. (Revisar [19] para mayores detalles).

Si se representa la aproximación polinomial en términos de los polinomios de Lagrange, i.e.,  $\mathcal{I}_{\overline{\Omega_{st}}}f(\xi) = \sum_{i=1}^{N_m} f(\xi^i) L_i^{N_m}(\xi)$ , donde  $L_i^{N_m}(\xi^j) = \delta_{ij}$  y  $\delta_{ij}$  es el delta de Kronecker, luego se sabe que

$$\Lambda_{N_m} = \max_{\xi \in \overline{\Omega_{st}}} \sum_{i=1}^{N_m} |L_i^{N_m}(\xi)|.$$

Por lo tanto, evaluando el polinomio de Lagrange a travez de una región triangular,  $\xi \in \overline{\Omega_{st}}$ , ayuda a tener una interpretación gráfica de la función de Lebesgue. La mayor cota de esta función sobre la región triangular es la constante de Lebesgue  $\Lambda_{N_m}$ . La función de Lebesgue es ilustrada en la Figura A.4 donde se muestra  $\Lambda_{N_m}$  para distribuciones de puntos equi-espaciados y distribuciones de puntos de Fekete, cuando  $N_m = 15$  (o P = 4). En este caso, los puntos equi-espaciados y los puntos de Fekete tienen una constante de Lebesgue de  $\Lambda_{N_m} = 3,47$  y  $\Lambda_{N_m} = 2,72$ , respectivamente.



(a) Puntos equi-espaciados, caso  $N_m = 15$ . (b) Puntos de Fekete, caso  $N_m = 15$ .

# **Figura A.4:** Distribución espacial de la función de Lebesgue. El máximo de la función de Lebesgue proporciona la constante de Lebesgue $\Lambda_{N_m}$ . Fuente: [19].

Orden	Puntos	Puntos	Puntos
Polinomial, P	Electrostáticos	de Fekete	Equi-espaciados
6	4.08	4.17	8.45
7	4.77	4.91	14.35
8	5.85	5.90	24.01
9	6.87	6.80	40.92
10	8.44	7.75	70.89
11	10.08	7.89	124.53
12	12.63	8.03	221.41
13	15.34	9.21	397.7
14	22.18	9.72	720.7
15	29.69	9.97	1315.9
16	41.73	12.10	2418.5

Algoritmo Parareal en el estudio de Ondas Electromagnéticas - 2D



Observando el Cuadro A.1, se puede ver que las constantes de Lebesgue para los puntos de Fekete son menores que las constantes de Lebesgue para la distribución de puntos equi-espaciados, y un poco mayores que las constantes de Lebesgue para los puntos electrostáticos para polinomios de bajo orden P, pero para polinomios de mayor orden, los puntos de Fekete poseen la menor constante de Lebesgue. Por lo cual se utilizarán polinomios de Lagrange definidos sobre los puntos de Fekete (como se muestra en la Figura A.5) como funciones base para  $\mathcal{V}^{\delta}$ , porque pueden aproximar mejor las funciones definidas en el región elemental.



Figura A.5: Puntos de Fekete. Fuente: [19].
# **APÉNDICE B** MÉTODO DE CONDENSACIÓN ESTÁTICA

El método de condensación estática o método de condensación se refiere a la contracción/reducción en la cantidad de grados de libertad, mediante operaciones matemáticas sobre las ecuaciones ensambladas. Este método reducirá el costo computacional para resolver el problema mostrado en la ec. (4.32), la cual puede ser escrita nuevamente como:

$$\begin{bmatrix} +\frac{1}{2}\mathbf{A} + \frac{\Delta t}{3}\mathbf{B} & \frac{1}{2}\mathbf{A} + \frac{\Delta t}{6}\mathbf{B} \\ \hline \\ -\frac{1}{2}\mathbf{A} + \frac{\Delta t}{6}\mathbf{B} & \frac{1}{2}\mathbf{A} + \frac{\Delta t}{3}\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1^{\delta} \\ \hline \\ \mathbf{Y}_2^{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N_1^n, \mathbf{q})_n + \mathbf{A}\mathbf{Y}^{\delta}(t_n^-) \\ \hline \\ (N_2^n, \mathbf{q})_n \end{bmatrix}.$$
(B.1)

El objetivo será eliminar los grados de libertad de  $\mathbf{Y}_1^{\delta}$ . Recordando las identidades mostradas en la ec. (4.4), se sigue que la ec. (B.1) toma la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \left( \begin{array}{c} \frac{c^{2}\Delta t}{3}\mathbf{K} & \frac{1}{2}\mathbf{M} \\ \frac{1}{2}\mathbf{I} & -\frac{\Delta t}{3}\mathbf{I} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} \frac{c^{2}\Delta t}{6}\mathbf{K} & \frac{1}{2}\mathbf{M} \\ \frac{1}{2}\mathbf{I} & -\frac{\Delta t}{6}\mathbf{I} \end{array} \right) \\ \hline \left( \begin{array}{c} \frac{c^{2}\Delta t}{6}\mathbf{K} & -\frac{1}{2}\mathbf{M} \\ -\frac{1}{2}\mathbf{I} & -\frac{\Delta t}{6}\mathbf{I} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} \frac{c^{2}\Delta t}{3}\mathbf{K} & \frac{1}{2}\mathbf{M} \\ \frac{1}{2}\mathbf{I} & -\frac{\Delta t}{3}\mathbf{I} \end{array} \right) \\ \hline \left( \begin{array}{c} \frac{c^{2}\Delta t}{3}\mathbf{K} & \frac{1}{2}\mathbf{M} \\ \frac{1}{2}\mathbf{I} & -\frac{\Delta t}{3}\mathbf{I} \end{array} \right) \\ \hline \left( \begin{array}{c} \frac{(N_{1}^{n}, \mathbf{b})_{n} + \mathbf{M}\mathbf{V}(t_{n}^{-})}{\mathbf{U}(t_{n}^{-})} \end{array} \right) \\ \hline \left( \begin{array}{c} \frac{(N_{1}^{n}, \mathbf{b})_{n}}{\mathbf{U}(t_{n}^{-})} \end{array} \right) \\ \hline \end{array} \right) \\ \hline \end{array} \right]. \quad (B.2)$$

Por conveniencia se intercambia la 2° fila con la 3° fila en la ec. (B.2), como sigue:

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{c^{2}\Delta t}{3}\mathbf{K} & \frac{1}{2}\mathbf{M} \\ \frac{c^{2}\Delta t}{6}\mathbf{K} & -\frac{1}{2}\mathbf{M} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{c^{2}\Delta t}{6}\mathbf{K} & \frac{1}{2}\mathbf{M} \\ \frac{c^{2}\Delta t}{3}\mathbf{K} & \frac{1}{2}\mathbf{M} \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\mathbf{I} & -\frac{\Delta t}{3}\mathbf{I} \\ -\frac{1}{2}\mathbf{I} & -\frac{\Delta t}{6}\mathbf{I} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\mathbf{I} & -\frac{\Delta t}{6}\mathbf{I} \\ \frac{1}{2}\mathbf{I} & -\frac{\Delta t}{3}\mathbf{I} \end{pmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{1}^{\delta} \\ \hline \mathbf{Y}_{2}^{\delta} \end{bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} (N_{1}^{n}, \mathbf{b})_{n} + \mathbf{M}\mathbf{V}(t_{n}^{-}) \\ (N_{2}^{n}, \mathbf{b})_{n} \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} \mathbf{U}(t_{n}^{-}) \\ 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix}. \quad (B.3)$$

Luego, la ec. (B.3) puede volver a escribirse como:

Desarrollando las operaciones indicadas en la ec. (B.4), se tiene:

$$\mathbf{D}\mathbf{Y}_1^\delta + \mathbf{E}\mathbf{Y}_2^\delta = \mathbf{H},\tag{B.5}$$

$$\mathbf{F}\mathbf{Y}_1^\delta + \mathbf{G}\mathbf{Y}_2^\delta = \mathbf{T}.\tag{B.6}$$

De esta manera, se puede obtener  $\mathbf{Y}_1^{\delta}$  a partir de la ec. (B.6), según se muestra:

$$\mathbf{Y}_{1}^{\delta} = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{T} - \mathbf{G}\mathbf{Y}_{2}^{\delta}), \tag{B.7}$$

y se lo reemplaza en la ec. (B.5) para obtener  $\mathbf{Y}_2^{\delta}$ , como se muestra:

$$(\mathbf{E} - \mathbf{D}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{G})\mathbf{Y}_2^{\delta} = \mathbf{H} - \mathbf{D}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{T}.$$
 (B.8)

Note que los grados de libertad de  $\mathbf{Y}_{1}^{\delta}$  eliminados, pueden recuperarse luego de resolver la ec. (B.8). Aunque, las diversas manipulaciones sobre las matrices hacen que estas sean menos dispersas, son manejables por el computador, puesto que los requerimientos de memoria quedan reducidos.

## **B.1.** Cálculos Auxiliares

Es sabido que:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{c^2 \Delta t}{3} \mathbf{K} & \frac{1}{2} \mathbf{M} \\ \frac{c^2 \Delta t}{6} \mathbf{K} & -\frac{1}{2} \mathbf{M} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \frac{c^2 \Delta t}{6} \mathbf{K} & \frac{1}{2} \mathbf{M} \\ \frac{c^2 \Delta t}{3} \mathbf{K} & \frac{1}{2} \mathbf{M} \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \mathbf{I} & -\frac{\Delta t}{3} \mathbf{I} \\ -\frac{1}{2} \mathbf{I} & -\frac{\Delta t}{6} \mathbf{I} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \mathbf{I} & -\frac{\Delta t}{6} \mathbf{I} \\ \frac{1}{2} \mathbf{I} & -\frac{\Delta t}{3} \mathbf{I} \end{pmatrix}, \qquad (B.9)$$
$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} (N_1^n, \mathbf{b})_n + \mathbf{M} \mathbf{V}(t_n^-) \\ (N_2^n, \mathbf{b})_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}(t_n^-) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se puede verificar fácilmente que:

$$\mathbf{F}^{-1} = \left(-\frac{4}{\Delta t}\right) \begin{bmatrix} -\frac{\Delta t}{6}\mathbf{I} & \frac{\Delta t}{3}\mathbf{I} \\ \\ \hline \\ \\ \frac{1}{2}\mathbf{I} & \frac{1}{2}\mathbf{I} \end{bmatrix}, \qquad (B.10)$$

$$\mathbf{D}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -\frac{c^{2}\Delta t}{9}\mathbf{K} - \frac{1}{\Delta t}\mathbf{M} & \frac{(c\Delta t)^{2}}{9}\mathbf{K} + \frac{1}{2}\mathbf{M} \\ \\ \hline \\ -\frac{c^{2}\Delta t}{18}\mathbf{K} + \frac{1}{\Delta t}\mathbf{M} & \frac{(c\Delta t)^{2}}{18}\mathbf{K} - \frac{1}{2}\mathbf{M} \end{bmatrix},$$
(B.11)

$$\mathbf{D}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{T} = \left(-\frac{4}{\Delta t}\right) \begin{bmatrix} \frac{\left[-\frac{(c\Delta t)^{2}}{18}\mathbf{K} + \frac{1}{4}\mathbf{M}\right]\mathbf{U}(t_{n}^{-})}{\left[\frac{\left[-\frac{(c\Delta t)^{2}}{18}\mathbf{K} + \frac{1}{4}\mathbf{M}\right]\mathbf{U}(t_{n}^{-})}{\left[\frac{\left[-\frac{(c\Delta t)^{2}}{36}\mathbf{K} - \frac{1}{4}\mathbf{M}\right]\mathbf{U}(t_{n}^{-})}\right]}, \quad (B.13)$$

$$\mathbf{H} - \mathbf{D}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} (N_1^n, \mathbf{b})_n + \mathbf{M}\mathbf{V}(t_n^-) + \left[\frac{-2c^2\Delta t}{9}\mathbf{K} + \frac{1}{\Delta t}\mathbf{M}\right]\mathbf{U}(t_n^-) \\ \\ \hline \\ (N_2^n, \mathbf{b})_n + \left[\frac{-c^2\Delta t}{9}\mathbf{K} - \frac{1}{\Delta t}\mathbf{M}\right]\mathbf{U}(t_n^-) \end{bmatrix}.$$
(B.14)

Luego, se obtiene:

$$\begin{bmatrix}
\frac{5c^{2}\Delta t}{18}\mathbf{K} + \frac{1}{\Delta t}\mathbf{M} & -\frac{(c\Delta t)^{2}}{9}\mathbf{K} \\
\frac{1}{2}\frac{7c^{2}\Delta t}{18}\mathbf{K} - \frac{1}{\Delta t}\mathbf{M} & -\frac{(c\Delta t)^{2}}{18}\mathbf{K} + \mathbf{M}
\end{bmatrix}
\underbrace{\left[\begin{array}{c}
\mathbf{Y}_{2}^{\delta}\\
\mathbf{\hat{s}}
\end{array}\right]}_{\hat{\mathbf{R}}} = \\
\underbrace{\left[\begin{array}{c}
(N_{1}^{n}, \mathbf{b})_{n} + \mathbf{M}\mathbf{V}(t_{n}^{-}) + \left[\frac{-2c^{2}\Delta t}{9}\mathbf{K} + \frac{1}{\Delta t}\mathbf{M}\right]\mathbf{U}(t_{n}^{-}) \\
(N_{2}^{n}, \mathbf{b})_{n} + \left[\frac{-c^{2}\Delta t}{9}\mathbf{K} - \frac{1}{\Delta t}\mathbf{M}\right]\mathbf{U}(t_{n}^{-})
\end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{L}}}.$$
(B.15)

Finalmente se tiene que resolver el siguiente sistema:

$$\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{L}},\tag{B.16}$$

donde  $\hat{\mathbf{R}} \in \mathbb{R}^{2N_{dof} \times 2N_{dof}}$ ,  $\hat{\mathbf{S}} \in \mathbb{R}^{2N_{dof} \times 1}$  y  $\hat{\mathbf{L}} \in \mathbb{R}^{2N_{dof} \times 1}$ .

## APÉNDICE C PRESENTACIONES NACIONALES E INTERNACIONALES

A lo largo del desarrollo del presente trabajo, los resultados parciales del mismo han sido presentados en eventos a los cuales hemos sometido el trabajo. En el presente anexo mostraremos los desarrollos parciales que se han presentado a lo largo de la investigación.

La primera presentación fue hecha en el primer *CMAC-SE* (Congresso de Matemática Aplicada e Computacional - Sudeste), realizado por la DAMAT, FAMAT, PETMAT y las regionales 6, 7, 8, 9 y 10 de la *SBMAC* (Sociedad Brasilera de Matemática Aplicada y Computacional). Dicho congreso fue llevado a cabo en la Universidad Federal de Uberlândia – Campus Santa Mônica en la ciudad de Uberlândia, estado de Minas Gerais, Brasil, entre el 20 y el 23 de setiembre del 2011. La modalidad de presentación del trabajo en dicha ocasión fue de presentación de poster de iniciación científica, con consultas del público asistente y distribución de handouts con resúmenes del trabajo, en carácter de representantes de la FIUNA.

La segunda presentación fue hecha en la ETyC (Exposición Tecnológica y Científica), realizado por la FPUNA (Facultad Politécnica - UNA). Dicho congreso fue llevado a cabo en el campus de la Universidad Nacional de Asunción en la ciudad de San Lorenzo, Paraguay, entre el 20 y el 23 de setiembre del 2011. La modalidad de presentación del trabajo en dicha ocasión fue de presentación de poster de iniciación científica, con consultas del público asistente y distribución de handouts con resúmenes del trabajo en el stand de la FIUNA (Facultad de Ingeniería - UNA), en carácter de representantes de la FIUNA.

#### On the Parareal method for the wave equation

Eduardo A. De Los Santos, Juan E. Gavilán

National University of Asuncion - Faculty of Engineering, San Lorenzo - Paraguay E-mail: eduardo.santos.nunez@gmail.com, juan.ggavilan@gmail.com,

Christian E. Schaerer

National University of Asuncion - Polytechnic Faculty Campus de la UNA, P.O.Box: 2111 SL San Lorenzo - Paraguay E-mail: cschaer@pol.una.py

Key Words: Discontinuous Galerkin; Spectral Element Method; Parareal method; Wave equation.

The wave equation arises in many physical and engineering applications. Mathematically, the progress of solving the wave equation largely depends on the progress of developing effective methods and algorithms, taking in consideration its hyperbolic behavior [2].

This work aims the parallelization in time of the resolution of the 2D homogeneous wave equation. This problem can be expressed as follows:

$$u_{tt} - c^{2}\Delta u = 0 \qquad \text{in} \qquad \Omega \times [0, T], \quad \Omega \subset \mathbb{R}^{2},$$

$$u(x, t) = 0 \qquad \text{on} \qquad \partial\Omega \times [0, T],$$

$$u(x, 0) = 0 \qquad \text{on} \qquad \partial\Omega,$$

$$u_{t}(x, 0) = \pi\sqrt{2}\sin(\pi x_{1})\sin(\pi x_{2}) \qquad \text{on} \qquad \partial\Omega,$$
(1)

where  $x = (x_1, x_2)$ ,  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ ,  $T = \sqrt{2}$  and c = 1. To obtain a high order approximation scheme, the equation (1) is spatially discretized using the spectral element method. Nodal basis functions for each element of the triangulation  $\mathcal{T}(\Omega)$  of the domain  $\Omega$  are defined by Lagrange polynomials throughout electrostatic points in each element. This results in the follows system

$$\mathbf{M}\underline{\dot{v}} + \mathbf{K}\underline{u} = 0, \qquad (2)$$
$$\underline{v} = \underline{\dot{u}},$$

where  $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$  are the displacement and velocity field respectively and n is the number of free nodes of the spatial discretization, also  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  and  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  are the assembled mass and stiffness matrices.

For the time discretization is implemented the discontinuous Galerkin method. The method is based on a variational formulation in time of the semi-discrete problem of equation (2). At each time step, a residual equation in the interval  $I_n = (t_n, t_{n+1})$  is constructed as

$$\int_{I_n} \phi_1(\mathbf{M}\underline{\dot{v}} + \mathbf{K}\underline{u})dt + \int_{I_n} \phi_2(\mathbf{K}(\underline{\dot{u}} - \underline{v}))dt + \phi_1(t_n) \cdot \mathbf{K}[\underline{u_n}] + \phi_2(t_n) \cdot \mathbf{M}[\underline{v_n}] = 0, \quad (3)$$

where  $[\underline{u_n}] = \underline{u_n}^+ - \underline{u_n}^-$  represents the discontinuity (jump) of  $\underline{u}$  at time  $t_n$ , and  $\phi_1, \phi_2$  are the test functions for the displacement and velocity fields, respectively. We use discontinuous polynomials of first order as basis functions.

In this work we explore the implementation of the Parareal method for the temporal parallelization of the equation (3). The Parareal method is based on a decomposition of the time interval in a coarse grid, determining subdomains. It involves a serial prediction step based on a coarse solver  $\mathcal{G}$  on the coarse

Figura C.1: Resumen sometido al CMAC-SE. Pág. 1. Fuente: Elaboración Propia.

grid, and a correction step associated to a fine solver  $\mathcal{F}$  (which can be computed in parallel) on the fine grid at each subdomain. Both the coarse and fine solvers use the Discontinuous Galerkin method. The Parareal method can be interpreted as a predictor-corrector scheme where the predictor phase at iteration k+1 is sequentially computed, and the correction term is computed in parallel depending only on results at iteration k.

This is a scientific initiation ongoing work and the implementation of the Parareal method for hyperbolic equations is an open area of research. Preliminary results shows that the method decreases the stability problem of the classical Parareal scheme, however, it seems to be coarse mesh dependent. The results encourage the research in this direction. At the moment, the authors are involved in the analysis of the method.

#### References

- G. Em Karnadiakis, S. Sherwin, *Expectral/hp Element Method for Computational Fluid Dynamics*, Oxford Science Publications, Oxfort University Press, 2005.
- [2] X. Feng, H. Wu, Discontinuous Galerkin methods for the Helmholtz equation with large wave number, arXiv: 0810.1475v1 [math.NA], 8 Oct 2008.
- [3] J. L Lions, Y. Maday, G. Turinici, A parareal in time discretization of PDE's, C.R. Acad. Sci. Paris, Serie I, 2001.
- [4] Y. Maday, G. Turinici, *The Parareal in Time Iterative Solver: a Further Direction to Parallel Implementation*, in "Proceedings of the 15th International Domain Decomposition Conference", pp. 441-448. Berlin Germany (2003)
- [5] D. Mercerat, L. Guillot, J-P. Vilotte, Application of the parareal algorithm for acoustic wave propagation, ICNAAM, 2009.

Figura C.2: Resumen sometido al CMAC-SE. Pág. 2. Fuente: Elaboración Propia.



São Carlos, Segunda-feira 25 de Julho de 2011.

### TRABALHO ACEITO

Declaramos que o trabalho intitulado: "On The Parareal Method For The Wave Equation", dos autores: *Eduardo Antonio de Los Santos Nuñez, Juan Emilio Gavilán Garay, Christian E. Schaerer*, pertencente à categoria: "Categoria 1. Resumos de até três páginas para trabalhos de Iniciação Científica"; foi aceito para apresentação na Sessão de Painéis de Iniciação Científica no CMAC-SE 2011 - Congresso de Matemática Aplicada e Computacional.



Geraldo Nunes Silva

presidente da SBMAC

Figura C.3: Carta de aceptación del trabajo para el congreso. Fuente: SBMAC.





Handout

CMAC-SE-2011

# On the Parareal method for the Wave Equation

Eduardo A. De Los Santos N.<sup>†</sup>, Juan E. Gavilán G.<sup>‡</sup>, Miki Saito\* National University of Asuncion - Faculty of Engineering San Lorenzo - Paraguay E-mail: eduardo.santos.nunez@gmail.com<sup>†</sup>, juan.ggavilan@gmail.com<sup>‡</sup>,

miki.arimoto@gmail.com\*

Christian E. Schaerer

National University of Asuncion - Polytechnic Campus de la UNA, P.O.Box: 2111 SL

San Lorenzo - Paraguay

E-mail: cschaer@pol.una.py

#### Abstract

This work aims the parallelization in time of the resolution of the 2D wave equation, by applying the Parareal algorithm. It is based on a decomposition of the time interval in coarse time domains. The Parareal algorithm involves a serial prediction step based on a coarse approximation on the coarse time domain, and a correction step (computed in parallel) based on a fine approximation within each coarse time domain. In this work, the spatial discretization of the wave equation is performed using the Spectral Element Method (SEM) and the time discretization is performed using the Discontinuous Galerkin method (DGM) in both course and fine grid.

#### 1 Introduction

 $u_{tt}$ 

The wave equation can be expressed as follows:

$$\begin{array}{lll} -c^2\Delta u &=& f(x,t) \quad \text{in} \quad \Omega \times (0,T], \ \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u(x,t) &=& g(x,t) \quad \text{on} \quad \partial\Omega \times (0,T], \\ u(x,0) &=& p_0(x) \quad \text{in} \quad \Omega, \\ u(t,x,0) &=& p_1(x) \quad \text{in} \quad \Omega, \end{array}$$
(1)

where  $x = (x_1, x_2)$ ,  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$  and  $c \in \mathbb{R}$  is a constant. Equation (1) arises in many physical and engineering applications. Mathematically, the progress of solving the wave equation depends on the progress of developing effective methods and algorithms, taking in consideration its hyperbolic behavior [5].

To obtain a high order approximation scheme, the equation (1) is spatially discretized using the spectral element method. Nodal basis functions for each element of the triangulation  $\mathcal{T}(\Omega)$ of the domain  $\Omega$  are defined by Lagrange polynomials throughout Fekete points in each element. This results in the follows system:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \dot{\boldsymbol{v}} + \mathbf{K} \boldsymbol{u} &= \boldsymbol{b}, \\ \boldsymbol{v} &= \dot{\boldsymbol{u}}, \end{aligned}$$
 (2)

where  $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^r$  are the displacement and velocity field, respectively; r is the number of free nodes of the spatial discretization,  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{r \times r}$  and  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{r \times r}$  are the assembled mass and stiffness matrices.

1

Figura C.5: Handout presentado al CMAC-SE. Pág. 1. Fuente: Elaboración Propia.

Handout CMAC-SE-2011

Time discretization is implemented throughout the discontinuous Galerkin method. The method is based on a variational formulation in time of the semi-discrete problem of equation (2). At each time step, a residual equation in the interval  $I_n = (t_n, t_{n+1})$  is formulated as:

$$\int_{I_n} w(\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{y}} + \mathbf{B}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{q})dt + w(t_n^+) \cdot \mathbf{A}[\boldsymbol{y}_n] = 0,$$
(3)

where  $[\boldsymbol{y}_n] = \boldsymbol{y}_n^+ - \boldsymbol{y}_n^-$  represents the discontinuity (jump) of  $\boldsymbol{y}$  at time  $t_n, w = \{N_1, N_2\}$  is the test and basis function, and:

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{y} = \left( \begin{array}{c} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \end{array} \right), & \mathbf{A} = \left( \begin{array}{c} \mathbf{0} & \mathbf{M} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{array} \right), & \mathbf{B} = \left( \begin{array}{c} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{array} \right), \\ \mathbf{q} = \left( \begin{array}{c} \boldsymbol{b} \\ \mathbf{0} \end{array} \right), & N_1 = \frac{t_{n+1} - t_n}{t_{n+1} - t_n}, & N_2 = \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n}. \end{array}$$

Discontinuous polynomials basis functions of first order are used for the implementation of DGM. This leads to the following system:

 $\mathbf{Z}\boldsymbol{\lambda}_n$ 

$$=\mathbf{Q},$$

(4)

where:

$$\begin{split} \mathbf{Z} &= \left(\begin{array}{c} \frac{1}{2}\mathbf{A} + \frac{\Delta t}{3}\mathbf{B} & \frac{1}{2}\mathbf{A} + \frac{\Delta t}{3}\mathbf{B} \\ -\frac{1}{2}\mathbf{A} + \frac{\Delta t}{6}\mathbf{B} & \frac{1}{2}\mathbf{A} + \frac{\Delta t}{3}\mathbf{B} \end{array}\right), \qquad \boldsymbol{\lambda}_n = \left(\begin{array}{c} \boldsymbol{y}(t_n^+) \\ \boldsymbol{y}(t_{n+1}^-) \end{array}\right), \\ \mathbf{Q} &= \left(\begin{array}{c} \int_{I_n} N_1 \boldsymbol{q} dt + \mathbf{A} \boldsymbol{y}(t_n^-) \\ \int_{I_n} N_2 \boldsymbol{q} dt \end{array}\right). \end{split}$$

#### 2 Parareal Algorithm.

The Parareal method is based on a decomposition of the time interval in a coarse grid, determining subdomains. It involves a serial prediction step  $\mathcal{G}_{\Delta t}$  on the coarse grid, and a correction step associated to  $\mathcal{F}_{\delta t}$  on the fine grid at each subdomain. In both cases for the operators  $\mathcal{G}_{\Delta t}$  and  $\mathcal{F}_{\delta t}$  are used the DGM.



#### Figure 1: Graphic scheme of the Parareal

The Parareal method can be interpreted as a predictor-corrector scheme where the predictor phase at iteration k + 1 is sequentially computed, and the correction term is computed in parallel depending only on results at iteration k.





Figura C.6: Handout presentado al CMAC-SE. Pág. 2. Fuente: Elaboración Propia.

Handout

CMAC-SE-2011

#### **3** Numerical Results.

**Experiment 1:** To analyze the precision of the serial implementation of the SEM-DG, a comparison between an analytical solution of (1) and the numerical solution obtained with the SEM-DG was performed. The numerical solution is obtained using c = 1 and T = 1 second. The domain  $\Omega$  is discretized using 50 elements and the temporal discretization is discretized using 200 time steps. Figure 2 shows the max-norm error for several polynomials orders in the spatial discretization.



Figure 2: Max-norm error between sequential numerical results and analytic solutions for polynomials of different orders.

**Experiment 2:** A comparison between the serial and parareal solution using third order polynomials at the spatial discretization is presented at Figure 3. For the spatial discretization is used 50 elements and a tolerance of  $10^{-8}$  is used as the parareal stopping criterion.



Figure 3: Max-norm error between sequential solution and parareal solution for  $\hat{k}=128.$ 

3

Figura C.7: Handout presentado al CMAC-SE. Pág. 3. Fuente: Elaboración Propia.

Handout

CMAC-SE-2011

The scalability of the parareal method in the context of the wave equation are presented at Tables 1 and 2. In both cases third order polynomials are used for the spatial discretization and a tolerance of  $10^{-8}$  is used as stopping criterion. In Table 1 the size of the problem remains as a

$\hat{k}$	32	64	128	256	512	1024
Î	128	64	32	16	8	4
r = 64	18	8	4	2	1	1
r = 121	28	15	6	3	2	1
r = 265	31	31	11	4	2	1
r = 508	31	45	16	5	2	1

Table 1: Iterations of the Parareal algorithm, the size of the problem has kept constant

constant while the ratio  $\hat{l} = \frac{\Delta T}{\delta t}$  is decreased, therefore the number of subdomains is increased. In Table 2 the ratio  $\hat{l} = \frac{\Delta T}{\delta t}$  remains as a constant while the size of the problem is increased.

$\hat{k}$	16	32	64	128	256	512
î	32	32	32	32	32	32
r = 64	15	18	8	4	2	1
r = 121	15	21	15	6	3	2
r = 265	15	31	31	11	4	2
r = 508	15	31	45	16	5	2

Table 2: Iterations of the Parareal algorithm, the size of the problem is increasing

#### References

- G.Bal, On the convergence and the stability of the parareal algorithm to solve partial differential equations, Proceedings of the 15th International Domain Decomposition Conference, Springer, Lecture Notes in Comp. Science and Engrg.; (2003).
- [2] G. Em Karnadiakis, S. Sherwin, Expectral/hp Element Method for Computational Fluid Dynamics, Oxford Science Publications, Oxfort University Press; (2005).
- [3] J. R. Fleitas, D. H. Stalder, C. E. Schaerer, *Optimal Boundary control parareal algorithm for cooling electronics circuits*, Workshop on Computational and Applied Mathematics for Engineering. Engineering Faculty-UNA, Paraguay; (2010).
- [4] M. Gander and M. Petcu; Analysis of a Krylov subspace enhanced parareal algorithm for linear problems; Proc. Vol. 25, pp. 114-129; (2008).
- [5] X. Feng, H. Wu, Discontinuous Galerkin methods for the Helmholtz equation with large wave number, arXiv: 0810.1475v1 [math.NA], (2008).
- [6] T. B. Mathew, M. Sarkis and C. E. Schaerer, Analysis of block paraeal preconditioners for parabolic control problems. SIAM J. Sci. Comput. 32:1180-1200; (2010).
- [7] D. Mercerat, L. Guillot, J-P. Vilotte, Application of the parareal algorithm for acoustic wave propagation, ICNAAM, 2009.

4

Figura C.8: Handout presentado al CMAC-SE. Pág. 4. Fuente: Elaboración Propia.



## CERTIFICADO

A Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional (SBMAC) confere o presente certificado a **Eduardo Antonio De Los Santos Nuñez**, expedido de acordo com dispositivos legais, por ter:

- Apresentado o(s) Trabalho(s): (0226) "On the Parareal method for the wave equation" de autoria de Eduardo Antonio

de Los Santos Nuñez, Juan Emilio Gavilán Garay e Christian E. Schaerer na Sessão de Painéis de Iniciação Científica

- Frequentado o Minicurso MC6 - Fundamentos de Computação Paralela para a Restauração de Imagens de Microscópios de Força Atômica (Antônio J. Silva Neto e Dalmo Stutz)

- Frequentado o Minicurso MC4 - Equações de diferenças e sistemas com aplicações biológicas (Prof. Dr. Geraldo Lúcio Diniz)

- Coordenado a Sessão Técnica de Painéis ST7 Matemática Aplicada à Engenharia
- Coordenado a Sessão Técnica de Painéis ST17 Ensino
- Participado

no I Congresso de Matemática Aplicada e Computacional da Região Sudeste, realizado no período de 20 a 23 de setembro de 2011.

Uberlândia, 23 de Setembro de 2011



Figura C.9: Certificado de participación en el congreso. Fuente: SBMAC.

# BIBLIOGRAFÍA

- [1] J-M. Jin, D.J. Riley, *Finite Element Analysis of Antennas and Arrays.*, Wiley. IEEE PRESS, USA New Jersey; (2009).
- [2] C. Vollaire, L. Nicolas, L. Nicolas, *Parallel Computing for Electromagnetic Field Computation*, IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS. VOL. 34. NO. 5. CE-GELY UPRESA CNRS 5005 Ecole Centrale de Lyon, France; (September 1998)
- [3] J-L. Lions, Y. Maday and G. Turinici; *A "parareal" in time discretization of PDE's* ; C.R. Acad. Sci.Paris, Serie I, Math 332; (2001).
- [4] G.A. Staff, *The Parareal Algorithm. A survey of present work*, Norwegian University of Science and Technology. Department of Mathematical Sciences; (Summer 2003).
- [5] C. Farhat, J. Cortial; A time-parallel implicit methodology for the near-real-time solution of systems of linear oscillators.; In Real-Time PDE-Constrained Optimization, Biegler L, Ghattas O, Heinkenschloss M, Keyes D, van Bloemen Waanders B (eds). SIAM: Philadelphia, PA; (2006).
- [6] I. Ortiz; Formulación de Control para el Problema de Esparcimiento de Helmholtz.; Trabajo Final de Grado; Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Asunción; (2010).
- [7] M. Duarte, M. Massot, S. Descombes, T. Dumont, *Adaptive Time-Space Algorithms for the Simulation of Multi-scale Reaction Waves*, HAL, Ecole Centrale Paris, Université de Nice Sophia Antipolis, Universite de Lyon, France; (2011).
- [8] P. Amodio, L. Brugnano, *Parallel solution in time of ODEs: some achievements and perspectives*, Dipartimento di Matematica, Via Orabona 4, 70125 Bari, Italy; Dipartimento di Matematica "U. Dini", Viale Morgagni 67/A, 50134 Firenze, Italy; (2009).
- [9] A. Kayi, Y. Yao, T. El-Ghazawi and G. Newby; *Experimental Evaluation of Emer*ging Multi-core Architectures; 1-4244-0910-1/07 IEEE, (2007).
- [10] C. Farhat and J. Cortial; A Time-Parallel Implicit Method for Accelerating the Solution of Nonlinear Structural Dynamics Problems; Int. J. Numer. Meth. Engng; 0:1–25; (2008).

- [11] C. Harden; *REALTIME COMPUTING WITH THE PARAREAL ALGORITHM*; Tesis for the degree of Master of Science; (2008).
- [12] D. Mercerat, L. Guillot, J-P. Vilotte, *Application of the parareal algorithm for acoustic wave propagation*, ICNAAM; (2009).
- [13] J. R. Fleitas, D. H. Stalder, C. E. Schaerer, *Optimal Boundary control parareal algorithm for cooling electronics circuits*, Workshop on Computational and Applied Mathematics for Engineering. Engineering Faculty-UNA, Paraguay; (2010).
- [14] T. B. Mathew, M. Sarkis and C. E. Schaerer, *Analysis of block parareal preconditioners for parabolic control problems*. SIAM J. Sci. Comput. 32:1180-1200; (2010).
- [15] M. Gander and M. Petcu; *Analysis of a Krylov subspace enhanced parareal algorithm for linear problems*; Proc. Vol. 25, pp. 114-129; (2008).
- [16] M. Gander; ANALYSIS OF THE PARAREAL ALGORITHM APPLIED TO HYPER-BOLIC PROBLEMS USING CHARACTERISTICS; Bol. Soc. Esp. Mat. Apl; 21–35; (2008)
- [17] C. Farhat, J. Cortial, C. Dastillung and H. Bavestrello; *Time-parallel implicit inte-grators for the near-real-time prediction of linear structural dynamic responses*; Int. J. Numer. Meth. Engng; 67:697–724; (2006).
- [18] G. Bal, Y. Maday; A "parareal" time discretization for non-linear PDE's with application to the pricing of an American put.; In Recent Developments in Domain Decomposition Methods, Pavarino LF, Toselli A (eds), Lecture Notes in Computer Science and Engineering, vol. 23. Springer: Berlin; 189–202; (2002).
- [19] G. Em Karnadiakis, S. Sherwin, *Expectral/hp Element Method for Computational Fluid Dynamics*, Oxford Science Publications, Oxfort University Press; (2005).
- [20] C. T. A. Johnk; TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA Principios y Aplicaciones; LIMU-SA; México D.F., México; (1988).
- [21] M. Khayat, Computational Electromagnetics (CEM) Laboratory: Simulation Planning Guide, National Aeronautics and Space Administration, Lyndon B. Johnson Space Center, Houston, Texas 77058, USA.
- [22] P. Monk, FEM for Maxwell's equations, Elsevier, New York, USA; (2008).
- [23] J.M. Cabrera, F. J. López, *Óptica Electromagnética, Vol.* 1, Addsison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, Delawere, USA; (1993).
- [24] J. M. Cabrera, F. J. López, F. A. López, *Óptica electromagnética*, Vol. 2, Addsison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, Delawere, USA, 1993.

- [25] M. R. Spiegel, Análisis vectorial, McGraw Hill, USA, 2005.
- [26] J. Alberty, C. Cartensen, S. A. Funken, *Remarks around 50 lines of Matlab: short finite element implementation*, Mathematisches Seminar, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel, Ludewin-Meyn-Str. 4, D-24098 Kiel, Germany; (1999).
- [27] L. Ferragut Canals, M. Asensio Sevilla, *Métodos Numéricos para Ecuaciones en Derivadas Parciales*, Universidad de Salamanca; (2007).
- [28] F. Ihlenburg, *Finite Element Analysis of Acousting Scattering*, Springer, USA; (1998).
- [29] P. Kunthong and L. Thompson; An efficient solver for the high-order accurate timediscontinuous Galerkin (TDG) method for the second-order hyperbolic system; Finite Elements in Analysis and Design, pp. 729-762; (2005).
- [30] A. Schneebeli, Interior Penalty Discontinuous Galerkin Methods for Electromagnetic and Acoustic Wave Equations, Inaugural dissertation to obtain the dignity of Doctor of Philosophy for the Faculty of Natural Sciences at the University of Basel. Zürich, Switzerland; (2006).
- [31] B.Q. Li; *Discontinuous Finite Elements in Fluid Dynamics and Heat Transfers*; Computational Fluid and Solid Mechanics Series, Springer, Germany; (2006).
- [32] S. Adjerid, D. Issaev, Superconvergence of the Local Discontinuous. Galerkin Method Applied to Diffusion Problems, Virginia Tech, Department of Mathematics, Blacksburg, USA; (2004).
- [33] B. Cockburn, G. E. Karnadiakis, C-W. Shu, *Discontinuous Galerkin Methods*. *Theory, Computation and Applications*, Springer, Lecture Notes in Comp. Science and Engrg.; (2000).
- [34] G.M. Hulbert, *The Finite Element Methods For Structural Dynamics*, International Journal For Numerical Methods In Engineering, vol. 33, 307 331; (1992).
- [35] X. Li and N-E. Wiberg; ADAPTIVE DISCONTINUOUS GALERKIN FE PROCE-DURES FOR LINEAR AND NONLINEAR STRUCTURAL DYNAMICS; Computational Mechanics, CINME, Barcelona, Spain; (1998).
- [36] B. Rivière, *Discontinuous Galerkin Methods for Solving Elliptic and Parabolic Equations: theory and implementation*, Rice University, Houston, Texas, SIAM; (2008).
- [37] D. Ruprecht, R. Krause, *Parallel-in-time integration of an Acoustic-Advection System*, Institute of Computational Science University of Lugano; (2011).

[38] D.E. Newman, D. Samaddar, R. Sánchez, *Parallelization in time of numerical simulation of fully-developed plasma turbulence using the parareal algorithm*, in Journal of Computational Physics, Elsevier; (2010).