

UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN

**Facultad de Ingeniería
Ingeniería Electrónica**



**Circuitos Electrónicos 2D:
Simulación, Control y Refrigeración**

Carlos Eugenio Sauer Ayala

Orientadores:

Prof. M.Sc. Horacio Feliciángeli

Prof. D.Sc. Christian E. Schaerer

Luque, 6 de marzo del 2009

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

*a Papá y Mamá, por cada esfuerzo para darme lo mejor
por el cariño que siempre me hizo falta
y que siempre tuve*

a mi esposa, por iluminar mis sueños cada día

AGRADECIMIENTOS

al incansable Horacio Feliciángeli por sus consejos y críticas constructivas

a Christian Schaerer, por la motivación y el apoyo constante

a Mauricio Poletti y Carlos Galeano, miembros del grupo de trabajo, por acompañar
esta investigación de principio a fin

a mis compañeros y amigos, por tantos momentos compartidos e inolvidables

AGRADECIMIENTOS INSTITUCIONALES

al Rectorado de la UNA,

por financiar parte de esta investigación durante el año 2007

a la Facultad de Ingeniería de la UNA,

por el apoyo institucional y financiero para presentar este trabajo a nivel internacional

(ver Anexo B)

Abstract

We consider the optimal cooling of an electronic circuit subject to heating internal sources. The constitutive equations are obtained modeling the circuit as a 2D parabolic partial differential equation. The Neumann boundary condition (control variable) model the electromechanical cooler system. The spatial discretization is obtained using a standard finite element method while the temporal discretization is obtained by the Backward-Euler method. The discretization results in a large algebraic linear system (state equations) parameterized by the control variable where the unknown is the temperature in the circuit.

To design a controller, we define a constrained minimization problem where a linear quadratic cost function is associated to the state and control variables, and the restrictions are given by the state equations. This minimization with constraint problem yields a large algebraic indefinite saddle point system in the state, control and dual variables. Computational results show that the temperature in the circuit can be efficiently controlled.

Resumen

Este trabajo considera el enfriamiento óptimo de un circuito electrónico sujeto a fuentes internas de calor. Las ecuaciones constitutivas son obtenidas modelando el circuito con una ecuación diferencial parcial parabólica bidimensional. La condición en la frontera de Neumann (variable de control) modela el sistema de enfriamiento electromecánico. La discretización espacial es obtenida usando el método de elementos finitos estándar, mientras que la discretización temporal es obtenida mediante un esquema de Euler retroactivo. La discretización resulta en un sistema lineal algebraico de gran porte (ecuaciones de estado) parametrizado por la variable de control donde la incógnita es la temperatura en la placa.

Para diseñar el controlador, definimos un problema de minimización con restricciones donde una función de costo cuadrático lineal es asociada a las variables de estado y de control, y las restricciones están dadas por las ecuaciones de estado. Este problema de minimización conduce a un sistema algebraico indefinido de gran porte, en las variables de estado, de control y duales. Los resultados muestran que la temperatura en el circuito puede ser controlada eficientemente.

ÍNDICE DE CONTENIDO

1. Introducción	7
1.1. Definición del problema	9
1.1.1. Problema de control óptimo	14
1.2. Originalidad y perspectivas	15
2. Transferencia de calor en circuitos electrónicos	16
2.1. Antecedentes	17
2.2. Evolución de requerimientos de refrigeración	19
2.3. Tendencias y desafíos futuros	23
2.3.1. Ensamble y encapsulado	24
2.3.2. Modelización y Simulación	27
2.4. Modos de transferencia de calor: modelización	28
2.4.1. Modelo de transferencia de calor por conducción	29
2.4.2. Consideraciones simplificadoras	31
2.5. Resolución de la ecuación de Calor	34
2.5.1. La ecuación de Poisson	34

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

2.5.2. La ecuación de Calor	39
3. El problema de control óptimo	44
3.1. Formulación variacional	45
3.2. El problema de control	46
3.3. Discretización espacial: Método de Galerkin	47
3.4. Discretización temporal	49
3.5. Control óptimo	51
4. Resultados Numéricos	53
4.1. Definiciones	54
4.2. Solución de la ecuación de Calor	59
4.2.1. CASO 1	60
4.2.2. CASO 2	64
4.2.3. CASO 3	69
4.3. Control óptimo de temperatura	73
4.3.1. Ajuste del controlador	74
4.3.2. CASO A	79
4.3.3. CASO B	81
4.4. Conclusiones finales y trabajos futuros	83
A. Método de los elementos finitos	85
A.1. Métodos de residuo ponderado	85
A.2. Formulación débil	91
A.3. Funciones aproximantes lineales por partes	92

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

A.4. Discretización de Galerkin	96
A.4.1. Discretización de Galerkin 1D	96
A.4.2. Discretización de Galerkin 2D	99
A.5. Ensamble de matrices	102
B. Presentaciones a nivel internacional	105

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Causas de las fallas en circuitos electrónicos	8
1.2. Ejemplo de placa circuital con distribución de componentes	9
1.3. Esquema circuital	11
1.4. Condiciones de transmisión de calor en los bordes	11
2.1. Costo de la solución térmica para microprocesadores INTEL [9]	18
2.2. Evolución de disipación en microprocesadores INTEL [9]	20
2.3. Previsiones de potencia disipada en un chip en 1993, 1999 y 2002 [9]	21
2.4. Previsiones del flujo de calor en 1993, 1999 y 2002 [9]	22
2.5. Flujos de calor en un elemento de volumen	30
4.1. Discretización temporal	54
4.2. Dimensiones de la placa en estudio	54
4.3. Componentes generadores de calor	55
4.4. Etiqueta de lados para definir fronteras de Neumann	56
4.5. Fronteras de Neumann en NX2	56
4.6. Malla regular 4×4 y malla completa con un componente generador	58
4.7. Evolución de la temperatura en 3 nodos de la placa	62
4.8. Vista superior de la difusión de calor en la placa	62

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

4.9. Distribución de temperaturas en estado estacionario	63
4.10. Evolución de la temperatura en 3 nodos de la placa	65
4.11. Distribución de temperaturas en estado estacionario	65
4.12. Evolución de la temperatura en 3 nodos de la placa para flujo (-100)	66
4.13. Distribución de temperaturas en estado estacionario para flujo (-100)	67
4.14. Evolución de la temperatura en 3 nodos de la placa	70
4.15. Vista superior de la difusión de calor en la placa	70
4.16. Distribución de temperaturas en estado estacionario	72
4.17. Ajuste del controlador: $r/q = 10^{-4}$	75
4.18. Nodos para medición de temperatura en la placa	75
4.19. Ajuste del controlador: $r/q = 10^{-4}$	76
4.20. Ajuste del controlador: $r/q = 10^{-5}$	76
4.21. Ajuste del controlador: $r/q = 10^{-6}$	77
4.22. Ajuste del controlador: $r/q = 10^{-9}$	77
4.23. Evolución de temperaturas en tres nodos para el Caso A de control	80
4.24. Evolución de temperaturas en tres nodos para el Caso B de control	82
A.1. Función lineal por partes para aproximación 1D	93
A.2. Funciones aproximantes para el problema (A.1)	94
A.3. Funciones de forma lineales para un elemento finito 1D	98
A.4. Elemento triangular lineal para el caso 2D	99
A.5. Función de forma para el caso 2D	101
A.6. Malla para discretización 2D	103
A.7. Numeración de nodos para malla 2D	104

ÍNDICE DE TABLAS

4.1. Variables de entrada para el CASO 1	60
4.2. Variables de entrada para el CASO 2	64
4.3. Variables de entrada para el CASO 3	69
4.4. Variables de entrada para el ajuste del controlador	74
4.5. Variables de entrada para el CASO A	79
4.6. Variables de entrada para el CASO B	81
A.1. Comparación de soluciones para (A.1) en $x = 0,5$	88
A.2. Funciones test para los métodos de residuo ponderado[17]	89

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

La continua miniaturización de los sistemas electrónicos se ha traducido en un espectacular aumento de la cantidad de calor generado por unidad de volumen, comparable en magnitud a los encontrados en los reactores nucleares y en la superficie del sol^a.

^aY. Cengel [1]

El avance de la microelectrónica, exige disponer en un espacio cada vez menor, un mayor número de componentes. Esto repercute en los dispositivos electrónicos modernos, en los cuales los componentes son densamente compactados, y en un aumento significativo de la disipación de potencia. Esto se percibe en un aumento excesivo de la temperatura, inclusive en circuitos de baja potencia, ocasionando fallas en los mismos [2].

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

La seriedad del problema se ilustra en la Figura 1.1 (extraída de [2]), en la cual se observan resultados experimentales sobre las causas de las fallas en circuitos micro-electrónicos actuales.

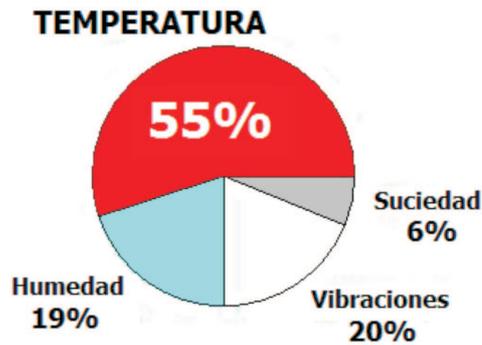


Figura 1.1: Causas de las fallas en circuitos electrónicos

Específicamente, las variaciones de temperatura provocan una alta fatiga térmica en las juntas de los semiconductores y, la temperatura excesiva en la estructura de los semiconductores, disminuye considerablemente su vida útil [2]. Esto ocasiona un grave perjuicio a las economías domésticas que se ven obligadas a desechar aparatos electrónicos por fallas térmicas previsible. Otro factor importante es que un chip funcionando a bajas temperaturas, puede operar a mayores velocidades. Además, las temperaturas más bajas permiten una reducción de las fugas de energía que no sólo desperdicia energía, sino generan más calor a ser disipado [3].

Por lo expuesto, el estudio del comportamiento térmico en los circuitos electrónicos y el control de los factores térmicos se han vuelto cada vez más importantes en el diseño y funcionamiento de los dispositivos electrónicos.

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

1.1. Definición del problema

Considere una placa circuital, en la cual se encuentran distribuidos, cierta cantidad de componentes. Algunos de ellos, generan mucho calor y, aunque es posible que estén diseñados para soportar altas temperaturas, dependiendo de su distribución en la placa, el calor generado podría afectar a componentes más sensibles e inutilizarlos [4]. Resulta así indispensable, disipar adecuadamente la potencia generada en la placa, de modo que el funcionamiento del circuito no se vea afectado. Para ello será estudiado el comportamiento de la temperatura sobre una placa bidimensional, para distintas configuraciones de dispositivos generadores y disipadores de calor.

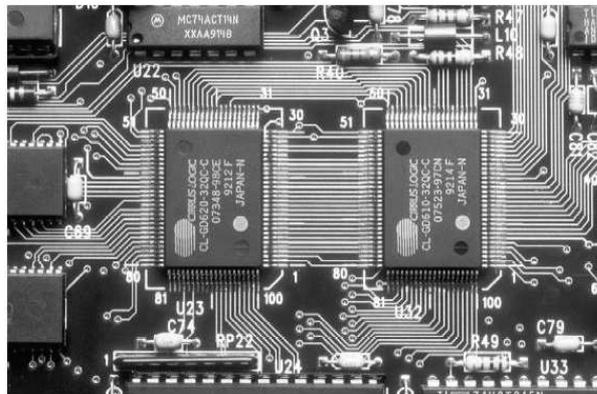


Figura 1.2: Ejemplo de placa circuital con distribución de componentes

Debe resaltarse que existen dos posibles situaciones: los dispositivos que ya existen (o están en fase de comercialización), y los que están en fase de diseño. En el contexto de la segunda situación, resulta imprescindible tomar en consideración el problema de la disipación de calor al iniciarse el proceso de diseño del circuito.

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

Un factor determinante es la disposición inadecuada de los componentes de potencia en el circuito, ya que su distribución puede influir negativamente en su rendimiento y facilitar las fallas por razones térmicas. Así, en este sentido, aquellos elementos de mayor influencia en la temperatura circuital deben ser ubicados de forma a disipar rápidamente el calor local; y los elementos más sensibles a las variaciones térmicas deben ser dispuestos de manera tal a minimizar los efectos del calor en ellos.

En ambos casos, un simulador permitirá entender las situaciones críticas y las posibles configuraciones de los disipadores de calor en tales circuitos. De esta forma, en una primera etapa se analiza via simulación el comportamiento térmico cualitativo en un modelo bi-dimensional de una placa circuital, que se esquematiza en la Figura 1.3. En una segunda etapa se considera la síntesis de un controlador óptimo para la temperatura en el circuito usando disipadores de calor en los bordes de la placa.

En la placa circuital, (ver la Figura 1.3), se encuentran distribuidos componentes generadores de calor, que pueden representar circuitos integrados u otras pastillas. Por simplicidad y de manera a profundizar la comprensión del fenómeno en estudio, se considera una única fuente de calor. Posteriormente, pueden ser consideradas distribuciones con un mayor número de componentes.

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

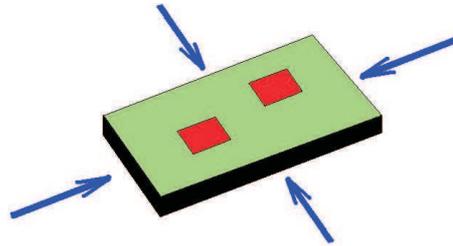


Figura 1.3: Esquema circuital

Se asume que la placa está constituida por un único material isotrópico, con lo cual el coeficiente de conducción térmica puede considerarse constante en toda la placa. Esto linealiza el problema.

Además, se tienen en cuenta condiciones de transmisión de calor isotérmica en parte de la frontera del dominio (frontera de Dirichlet) y condiciones de flujo de calor preestablecidos en el resto (frontera de Neumann) (como ejemplo ver la Figura 1.4). Este flujo de calor, emula la disipación de calor que ocurre en la frontera del circuito. Se resalta que el análisis realizado es cualitativo, aún cuando en algunos casos puedan considerarse parámetros numéricos no muy alejados de la realidad.

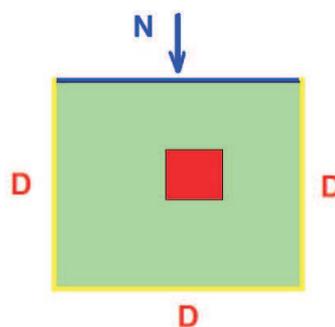


Figura 1.4: Condiciones de transmisión de calor en los bordes

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

Para la obtención de las ecuaciones constitutivas, es utilizada una ecuación diferencial parabólica con coeficientes discontinuos donde cada uno de los elementos de la placa circuital se encuentran acoplados por condiciones de contacto (ver [2, 5, 6]).

En este trabajo, realizamos simplificaciones al modelo (ver capítulo 2) que conllevan a la ecuación diferencial parcial parabólica conocida con el nombre de ecuación de Calor. La solución de esta ecuación usando métodos analíticos puede ser tediosa y dependiendo de la geometría, muy difícil de ser encontrada.

Las técnicas modernas de resolución que envuelven principalmente métodos numéricos y sistemas de computación de gran porte, tienen la ventaja de que pueden abordar geometrías complejas y fuentes puntuales de calor, y producen una solución aproximada que bajo ciertas condiciones converge a la solución de la ecuación de Calor. Usando el Método de Elementos Finitos (MEF), las condiciones de contacto son tratadas adecuadamente, contemplando las condiciones de frontera de Dirichlet y Neumann preestablecidas. De esta forma, las ecuaciones constitutivas son discretizadas en el espacio, usando el MEF clásico, en tanto que el esquema de Euler retroactivo es usado para la discretización temporal. Esto conduce a un sistema lineal algebraico $Ax = b$, donde las incógnitas, representan la temperatura en determinados puntos de la placa.

En general, el MEF considera que la región en la cual está definido el problema, se divide en elementos (subregiones) interconectados para ofrecer una aproximación por partes a la ecuación diferencial que rige el fenómeno en estudio. Esto es, la ecuación

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

diferencial parcial se reduce a un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias cuya solución aproxima la solución de la ecuación original. De este modo, el procedimiento de discretización en elementos finitos reduce el problema continuo a un problema discreto con una cantidad finita de incógnitas, asociadas a puntos específicos del dominio espacial llamados nodos. Como el método permite que los elementos tengan forma arbitraria, es posible discretizar con precisión dominios con geometrías complejas. De hecho usando esta estrategia, el MEF consigue lidiar no sólo con problemas de geometría, sino también permite realizar análisis dinámicos y abordar posibles factores irregulares o arbitrarios del problema.

Se ha escogido el MEF entre otros (cambio de variables, Series de Fourier, Funciones de Green, etc) para resolver la ecuación diferencial que modela el problema, por los siguientes motivos:

1. posee suficiente robustez para tratar geometrías complejas.
2. se puede adaptar a fuentes de energía puntuales y no puntuales.
3. permite estudiar diferentes configuraciones de los disipadores de calor.
4. es posible considerar los casos de coeficientes discontinuos en forma relativamente fácil.

1.1.1. Problema de control óptimo

En una segunda etapa, este trabajo aborda el control de la distribución de temperatura en la placa de circuito con fuentes internas de calor. Para el efecto, las condiciones de Neumann, en algunos sectores de los bordes de la placa, representan las variables de control, modelando el mecanismo de disipación de calor.

En este caso, las ecuaciones constitutivas son discretizadas y parametrizadas por las variables de control, que es el flujo en las fronteras de Neumann. Para sintetizar el controlador, se define un problema de minimización con restricciones, asociando una función de costo cuadrático lineal a las variables de control y considerando como restricciones las ecuaciones de estado. La discretización temporal se realiza utilizando el esquema de Euler retroactivo.

Aplicando las condiciones de optimalidad, se obtiene un sistema algebraico de ecuaciones del tipo Saddle-Point con variables primarias (estado), duales y de control. Resolviendo este sistema, las variables de estado describen la temperatura en los nodos de la placa y las variables de control determinan el flujo de calor que debe establecerse en la frontera de Neumann en cada instante de tiempo, de modo a obtener la distribución de temperatura próxima a la deseada.

1.2. Originalidad y perspectivas

El problema de la temperatura en circuitos electrónicos es delicado y tiende a agravarse. Las perspectivas de miniaturización para los próximos años exige que la solución acompañe el proceso y se adapte a los nuevos requerimientos de disipación.

Como puede verse en la literatura, el problema de la forma de disipar convenientemente y controlar la temperatura, no es un problema cerrado. Este trabajo avanza la investigación en la implementación de una técnica cualitativa bidimensional usando un método numérico, el cual está basado en el método de elementos finitos, para analizar, comprender y controlar el comportamiento térmico en circuitos electrónicos mediante la simulación del fenómeno.

Este estudio permite tener una herramienta y avanzar en la comprensión del problema de controlabilidad de frontera para los modelos de enfriamiento. Los resultados obtenidos permiten ver que la placa puede ser eficientemente refrigerada bajo ciertas condiciones de frontera. De esta forma, tanto el software desarrollado cuanto los resultados obtenidos auxilian en la elaboración de una teoría sobre la controlabilidad del sistema (este punto sin embargo está fuera del alcance de este trabajo y constituye una extensión del mismo). Es importante resaltar que es un primer paso para la simulación compleja del problema de calor en circuitos. Trabajos posteriores abordan el problema tridimensional, heterogéneo e anisotrópico.

CAPÍTULO 2

TRANSFERENCIA DE CALOR EN CIRCUITOS ELECTRÓNICOS

En este capítulo, se ofrece una visión general del problema de la gestión térmica, su evolución, así como las perspectivas de la ingeniería electrónica-térmica, para los próximos años.

A continuación se desarrolla el modelado matemático de transferencia de calor, hasta llegar a la ecuación de Calor siguiente:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\alpha}{\lambda} \nabla (\lambda \cdot \nabla z) + \frac{\alpha}{\lambda} f \quad \text{en } [t^o, t^f] \times \Omega$$

donde z es la temperatura sobre la placa. Esta es la ecuación que describe el comportamiento térmico en una placa circuital. Posteriormente, se harán ciertas consideraciones de modo a simplificar el modelo.

Finalmente se aplicará el método de elementos finitos a la formulación variacional de la ecuación de Calor, para obtener una solución numérica aproximada.

2.1. Antecedentes

Una de las aplicaciones industriales trascendentales de la transferencia de calor en la ciencia y la ingeniería electrónica ha sido el control de temperatura. Impulsado por el incesante aumento de la densidad espacial de dispositivos microelectrónicos, la potencia de los circuitos integrados se multiplicó por un factor de 100 en las últimas décadas, con un aumento algo menor del flujo de calor. El enfoque tradicional de refrigeración, utilizando convección natural y forzada de aire, es cada vez menos viable.

Si bien la revolución de los semiconductores de estado sólido repercutió en una caída acelerada de la energía necesaria para la conmutación del transistor, los requerimientos de refrigeración de componentes microelectrónicos no han disminuido. Los progresos en integración térmica se adaptaron continuamente a la Ley de Moore en la tecnología de los semiconductores, que afirma que el número de transistores que se pueden incorporar en un circuito integrado crece exponencialmente, y aproximadamente ese número se dobla cada dos años. Cuarenta años de mejoras en los componentes electrónicos impulsada por la Ley de Moore ha convertido a casi todos los sistemas electrónicos de rendimiento relativamente alto en comparación a los sistemas de años pasados. Incluso, la potencia que muchos juguetes de hoy en día consumen supera ampliamente aquella de los primitivos ordenadores personales [7].

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

A inicios del siglo 21, la disipación de potencia en un chip de alta performance excedía los $100W$, unas mil veces la disipación en un chip SSI (baja escala de integración) de 1960. Se espera que para la segunda década de este siglo, chips de $200W$ se transformen en una realidad cotidiana [8].

Los actuales esfuerzos de investigación, repercuten en una nueva generación de tecnologías de enfriamiento impulsadas por la necesidad de remover grandes cantidades de calor, con dispositivos compactos y de alta fiabilidad. Los principales objetivos de diseño de cualquier solución térmica son el rendimiento, costo, tamaño físico, y la fiabilidad. Paralelamente, el costo de refrigeración está empezando a ser reconocido como un problema importante (ver Figura 2.1). De este modo, se requiere invertir esfuerzos en la investigación y desarrollo en el área de refrigeración para la electrónica.

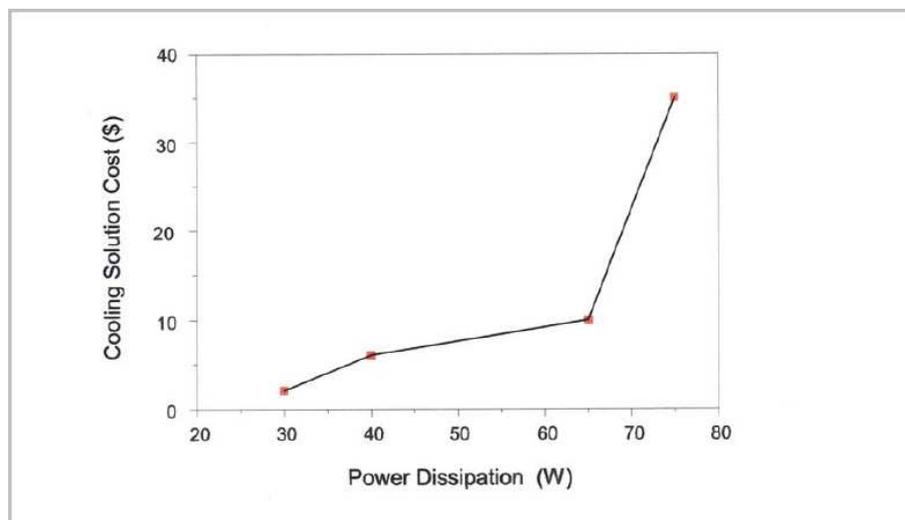


Figura 2.1: Costo de la solución térmica para microprocesadores INTEL [9]

2.2. Evolución de requerimientos de refrigeración

En los años 60, los requerimientos de disipación de calor en un chip de silicio de 0,2 a 0,3 *cm* estaban usualmente en el rango de 0,1 a 0,3*W*. A mediados de los 80, el incremento de chips transistorizados y las densidades funcionales llevaron la disipación de potencia en LSI (gran escala de integración) de un chip de 0,5 *cm* a 5*W*.

Históricamente, los parámetros de confiabilidad para chips bipolares de silicio, establecían un límite superior de 110–125°C para la temperatura en la junta. No obstante, los parámetros de confiabilidad y performance de los años 80, redujeron este nivel a 65 – 85°C para aplicaciones comerciales. Considerando la temperatura del ambiente en 27°C, esto redujo a la mitad el aumento de temperatura permisible en el chip, por encima de la del ambiente. El flujo de calor resultante en el chip LSI, cercano a $25 \times 10^4 \text{W}/\text{m}^2$ (25*W/cm*²), combinado con el menor tope de temperatura en la junta, requirió el desarrollo de nuevos sistemas de refrigeración y planteó un enorme desafío para la comunidad de ensamblaje electrónico.

A mediados de los años 90, la sed del mercado de mayores velocidades y funcionalidades en los circuitos integrados, llevó la disipación de potencia en un chip microprocesador CMOS, al rango de 15 a 30*W*. Esto requirió la utilización de una tecnología de ventilación más intensa [10].

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

A finales de la década de los 90, los chips de alto rendimiento, llegaron a disipar habitualmente $75W$, con los flujos de calor aproximándose a $25 \times 10^4 W/m^2$. Reconociendo las mejoras en los dispositivos de silicio, la temperatura admisible en la junta aumentó a valores cercanos a los $100^\circ C$.

Con el objetivo de ilustrar el problema, se consideran microprocesadores de alto desempeño, elemento clave en el diseño moderno de un ordenador. La Figura 2.2 muestra la evolución de disipación de potencia en los procesadores INTEL x86.

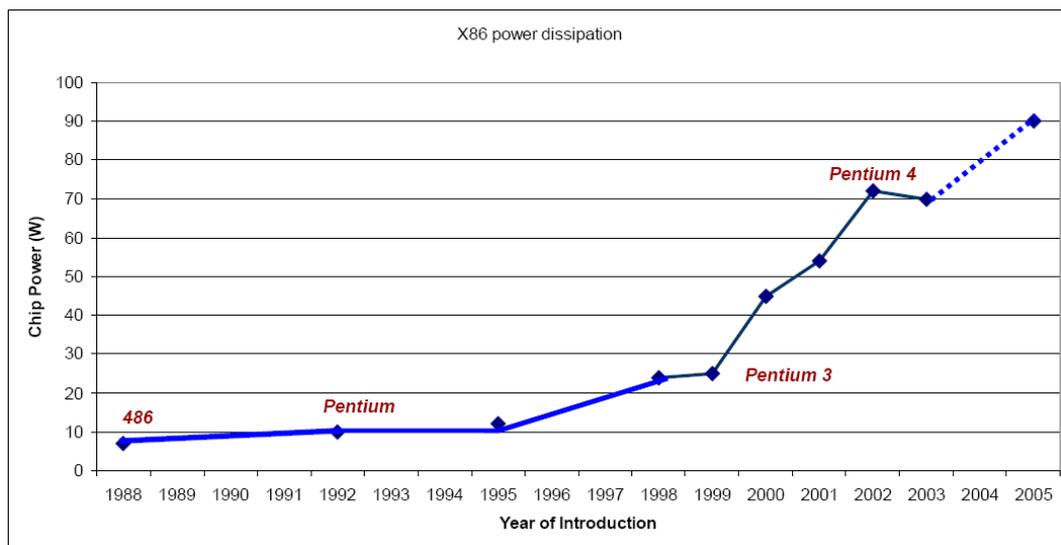


Figura 2.2: Evolución de disipación en microprocesadores INTEL [9]

En general, para dispositivos de tecnología CMOS, la disipación de energía es proporcional a la capacitancia de los elementos lógicos, el cuadrado de la oscilación del voltaje y la frecuencia de operación [9]:

$$P_d \sim NCV^2f$$

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

Si bien la capacitancia disminuye con el tamaño, y los voltajes se han reducido significativamente, el aumento en el número de dispositivos por chip (N) y la frecuencia de operación han llevado la disipación de potencia de microprocesadores a niveles muy altos.

En la Figura 2.3, se muestran las previsiones en 1993, 1999 y 2002 para la potencia que, según la industria de semiconductores, sería disipada por dispositivos como microprocesadores en ésta década. Hoy en día se ha superado ampliamente la barrera de los 100W por chip. Nótese que también las propias expectativas para la disipación de energía han aumentando con el paso del tiempo.

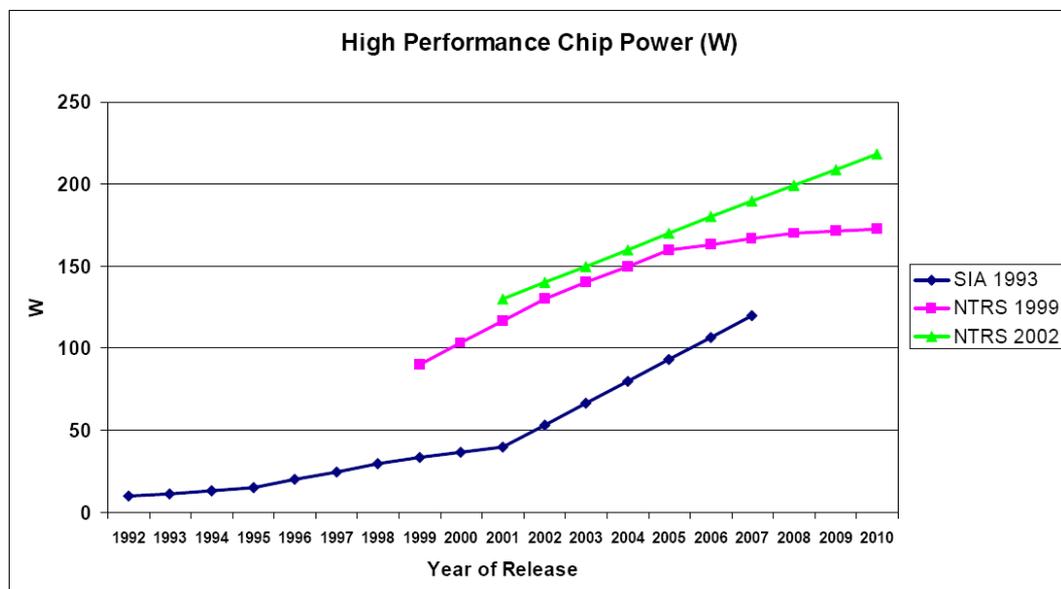


Figura 2.3: Previsiones de potencia disipada en un chip en 1993, 1999 y 2002 [9]

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

La Figura 2.4 presenta previsiones similares para el flujo de calor en un chip, realizadas en la década pasada:

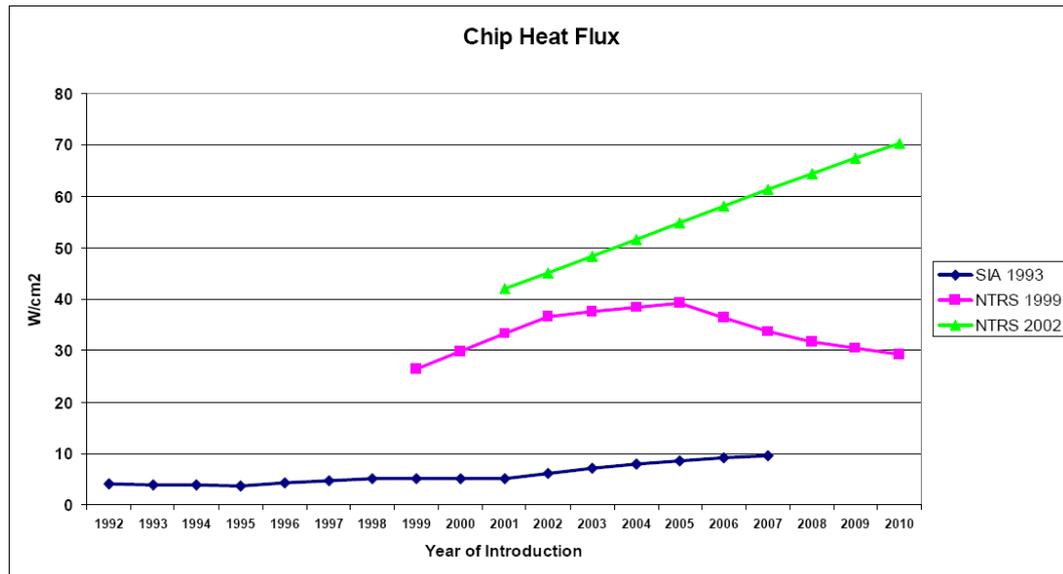


Figura 2.4: Previsiones del flujo de calor en 1993, 1999 y 2002 [9]

La solución térmica para los microprocesadores utilizados en computadoras de escritorio a menudo se basó en disipadores de calor de aluminio y otros, acoplados a los chips, enfriados por ventiladores situados a gran distancia. Pero, con la potencia de chip superando los 100W en esta década, el encapsulado térmico para esta categoría de producto requiere diseños cada vez más refinados, así como menores resistencias térmicas en la interfaz de los materiales.

A inicios de esta década, en un intento por minimizar la brecha de rendimiento entre las computadoras portátiles (notebooks) y las de escritorio, comenzaron a utilizarse ventiladores para la disipación de calor. Sin embargo, a lo largo de gran parte de esta década, la limitación en la energía de la batería, volvió necesario el uso de la convección natural del aire, circulando a través de difusores y tubos de calor. Hoy en día, con las notebooks de última generación, los chips de gran potencia y la relación costo/rendimiento, se plantean grandes retos para la comunidad de ingeniería electrónica-térmica.

En el caso de los actuales dispositivos portátiles a batería, el uso apropiado de un esparcidor de calor en general hace que sea posible para mantener los circuitos integrados a temperaturas por debajo de $115^{\circ}C$. En esta categoría debe notarse que la capacidad de gestión térmica debe mantener un delicado equilibrio con la energía disponible de la batería, para posibilitar un mayor tiempo de operación.

2.3. Tendencias y desafíos futuros

Para comprender mejor las tendencias en las necesidades futuras de refrigeración de componentes microelectrónicos, resulta útil examinar el amplio consenso surgido de la industria, que define una hoja de ruta para las actividades, como por ejemplo, la Semiconductor Industry Association (SIA) y la International Technology Roadmap for Semiconductors (ITRS). Cada año la ITRS publica un documento que en el que describe los desafíos y tendencias para la industria de semiconductores. A continuación se presentan algunas ideas importantes de dos tópicos de la última edición relacionados con este trabajo (para más detalles ver [4] y [11]):

2.3.1. Ensamble y encapsulado

Las predicciones de que la Ley de Moore ha llegado a su límite han demostrado ser prematuras. Como el avance tecnológico se encuentra en los límites físicos de la escala de integración CMOS, los nuevos requerimientos del mercado y el crecimiento industrial no pueden seguir basándose únicamente en la Ley de Moore. Bajo el lema “More than Moore” se refleja la necesidad de una integración de sistemas complejos al nivel de encapsulado. Antes, la mayor integración espacial ha permitido mejorar el rendimiento, consumir menos potencia, disminuir el tamaño y los costos. Hoy en día, esa filosofía de integración no garantiza el éxito en estos cuatro factores.

La disipación de potencia que la ITRS proyecta para chips de alto rendimiento de la generación $14nm$ en escala CMOS es mayor a $100W$ por cada cm^2 .

La clave para abordar el problema térmico a nivel de disipadores de calor es aumentar el coeficiente de transmisión de calor entre el fluido interfaz y la superficie del disipador de calor. Con este fin, el uso de canales de fluidos microscópicos con refrigeración líquida forzada, ofrece una amplia gama de posibilidades para el coeficiente de transmisión de calor y de órdenes mucho mayores que una posible refrigeración forzada con aire. De este modo, según la ITRS 2007, disipadores de calor con microcanales de fluidos y refrigeración líquida forzada resultan esenciales para la integración 3D de los microprocesadores.

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

Sin embargo, aún hay muchos desafíos técnicos relacionados con su aplicación, que incluyen la forma de integrar los disipadores de microcanales con los chips electrónicos, cómo hacer llegar el líquido al encapsulado y la manera de generar el flujo de fluidos a la presión requerida.

La ITRS 2007 afirma que la nueva generación de ensamble es el de los Sistemas Encapsulados (SiP¹) y lo define como una combinación de diversos componentes electrónicos activos de diferentes funcionalidades, integrados en una sola unidad que ofrecerá múltiples funciones asociadas con un sistema o subsistema. Los SiP opcionalmente pueden incluir componentes pasivos, sistemas microelectromecánicos (MEMS), componentes ópticos y otros dispositivos.

Los productos que impulsan la demanda de componentes SiP son los teléfonos celulares, Bluetooth, WiFi, sensores CMOS, placas gráficas, redes conmutadas por paquetes y aplicaciones inalámbricas, de radiofrecuencia y de memoria.

Por otra parte, un sistema sobre chip (SoC²) es un circuito integrado para una aplicación específica. Incluye en un único chip una máquina computadora, memoria y lógica. Los SoC son productos diseñados para penetrar en un mercado maduro, de elevado volumen en el cual la expectativa potencial de vida de un producto es relativamente larga. Eso implica que no será necesario mejorarlos constantemente. La combinación adecuada de los SiP y SoC, permitirá implementar con éxito la filosofía "More than Moore".

¹SiP: System in Package

²SoC: System on Chip

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

El diseño térmico de los SiP debe tener en cuenta tanto la disipación total de energía como la disipación individual de sus componentes, obligando a un gerenciamiento local y global de los problemas térmicos. Además, el diseño deberá considerar las interacciones entre componentes, entre sistemas y con el ambiente en el que operan.

El paso siguiente es optimizar el diseño térmico. Deben desarrollarse simuladores capaces de variar la posición de las fuentes de calor en un plano o en una pila, con el fin de minimizar las temperaturas pico. Esto requiere de modelos parametrizados e interacción con herramientas de optimización. Otras necesidades para simuladores incluyen:

- Simuladores para soluciones avanzadas de refrigeración, como refrigeración termoeléctrica, spray, cambio de fase, etc.
- Modelos de difusión y migración de electrones, dependientes del tiempo y la temperatura, principalmente en dimensiones cada vez más pequeñas.
- Acoplamiento multifísico electro-termo-mecánico lo más sencillo y eficiente posible, pues la mayoría de los procesos, fatigas y fallos dependen de la temperatura.

2.3.2. Modelización y Simulación

Modelar y simular sistemas permite arraigar el conocimiento y la comprensión de los fenómenos y resulta una herramienta útil para el desarrollo tecnológico, optimización y para formación de recursos humanos. Estimular los avances en tecnologías de modelización y simulación es una de las formas de reducir drásticamente los costos y el tiempo para cada ciclo de innovaciones, siempre que la simulación es usada de modo eficiente: del 2005 al 2007 los costos se han reducido en un 40 %¹.

Los desafíos para la próxima generación de dispositivos, respecto a la modelización de encapsulados e interconexiones electro-termo-mecánicas se enumeran en la actualización 2008 de [11]:

- Modelización de propiedades termomecánicas, termodinámicas y eléctricas para materiales de baja y alta conductividad, para un encapsulado eficiente incluyendo gestión térmica e impacto sobre estas propiedades.
- Modelización térmica para circuitos integrados 3D y evaluación de herramientas de modelo útiles para diseños 3D.
- Modelización de efectos que influyen en la fiabilidad de interconexiones y encapsulados incluyendo la integración 3D.
- Modelos para predecir la adherencia en interfaces (homogéneas y heterogéneas).
- Simulación de adherencia y características de resistencia a fracturas en encapsulados e interfaces.

¹ITRS Winter Conference 2007, Makuhari-Japan

- Modelos de transporte de electrones en interconexiones ultrafinas.

El documento señala que los modelos tienen fundamentos físicos que generalmente se reducen a un sistema de Ecuaciones Diferenciales Parciales en coordenadas espaciales y que el objetivo principal es la optimización en su resolución. Además, describe las necesidades de la industria de semiconductores en cuanto a métodos numéricos, como generación de mallas 3D robustas y eficientes incluyendo fronteras móviles, algoritmos más eficientes para solución de sistemas lineales, esquemas de discretización alternativos, etc.

2.4. Modos de transferencia de calor: modelización

La transferencia de calor estudia el transporte de energía entre cuerpos materiales debido a la diferencia de temperatura entre ellos. Los tres modos transferencia son:

- **Conducción.** Ocurre debido al intercambio de energía cinética de una molécula a otra, no habiendo desplazamiento de ambas, o bien ocurre debido al movimiento de electrones libres presentes [10]. La energía se transmite por el interior del cuerpo estableciéndose un flujo de calor que depende fuertemente de las propiedades del medio, específicamente de la conductividad térmica de los materiales, teniendo lugar en sólidos, líquidos y gases siempre que exista diferencia de temperatura.
- **Convección.** Ocurre debido a la libertad de movimiento que poseen las moléculas presentes en líquidos y gases. Así, el movimiento transporta energía de una región caliente a una fría. Según el movimiento se produzca por diferencia de temperatura o factores externos, la convección puede ser libre, forzada o mixta.

- **Radiación.** Consiste en la propagación de energía emitida por la superficie del cuerpo y transportada por ondas electromagnéticas. Cuando estas ondas chocan otras superficies se refleja una parte, otra se transmite y el resto se absorbe. Todos los cuerpos emiten radiación térmica a cualquier temperatura. Es el único modo que no requiere de un medio material para que ocurra la transferencia de calor.

Todos los modos de transferencia de calor están generalmente presentes en distintos grados en un problema físico real. Un aspecto importante al resolver problemas de transferencia de calor consiste en identificar los modos significativos y decidir en qué casos el calor transportado por otros modos puede ser despreciado.

2.4.1. Modelo de transferencia de calor por conducción

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ para $d = 2, 3$, es decir Ω es un dominio bi o tridimensional que representa el dominio espacial del circuito. Sea $[t^o, t^f]$ un intervalo de tiempo y $z(t, x)$ la temperatura en el tiempo $t \in [t^o, t^f]$ en el punto $x \in \Omega$. El proceso de conducción de calor es gobernado por la Ley de Fourier que establece que el flujo de calor (cantidad neta de calor transferido por unidad de tiempo) es proporcional al gradiente de la temperatura:

$$q = -\lambda \cdot \nabla z \quad (2.1)$$

donde q es el flujo de calor (W/m^2), λ es el coeficiente de conducción de calor ($W/K.m$), z es la temperatura (K) y ∇z es el gradiente de la temperatura (K/m).

Se considera un elemento de volumen $d_{vol} := dx_1 dx_2 dx_3$. Sea q_{x_1} el flujo de calor entrante en la cara transversal a la dirección dx_1 , y $q_{x_1+dx_1}$ el saliente en la cara opuesta como se muestra en la Figura 2.5.

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

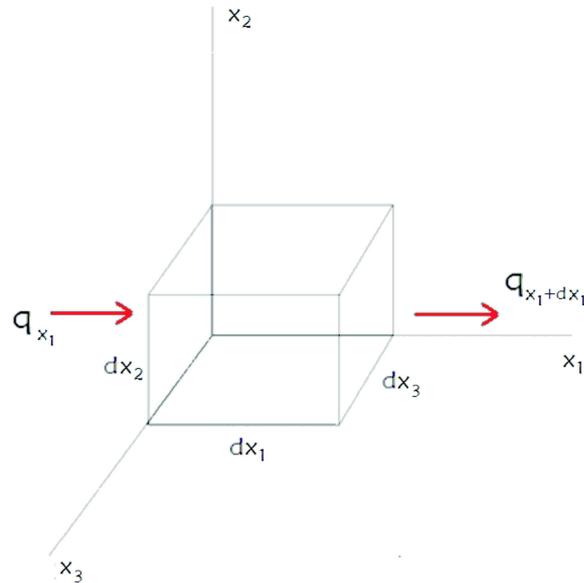


Figura 2.5: Flujos de calor en un elemento de volumen

Usando (2.1), se calculan:

$$q_{x_1} = -\lambda \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_2 dx_3$$

$$q_{x_1+dx_1} = -\left[\lambda \frac{\partial z}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\lambda \frac{\partial z}{\partial x_1} \right) \right] dx_2 dx_3, \quad (2.2)$$

El balance energético para ese volumen permite escribir:

$$q_{x_1} + q_{x_2} + q_{x_3} + q_{gen} = q_{x_1+dx_1} + q_{x_2+dx_2} + q_{x_3+dx_3} + \frac{dE_{int}}{dt} \quad (2.3)$$

donde q_{gen} y dE_{int}/dt representan el calor generado y la variación de energía interna, respectivamente, y son dados por:

$$q_{gen} = f dx_1 dx_2 dx_3$$

$$\frac{dE_{int}}{dt} = \rho c dx_1 dx_2 dx_3 \frac{\partial z}{\partial t}, \quad (2.4)$$

donde f es la densidad de calor volumétrico generado (W/m^3), ρ es la densidad (kg/m^3) y c el calor específico ($J/kg.K$) del material.

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

El modelo físico completo del intercambio de calor para el circuito basado en la Ley de Fourier de la conducción y el balance energético para un elemento de volumen, puede obtenerse de las ecuaciones (2.2), (2.3) y (2.4) y se resume en la ecuación tridimensional de Calor siguiente [5]:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\alpha}{\lambda} \nabla (\lambda \cdot \nabla z) + \frac{\alpha}{\lambda} f \quad \text{en } [t^o, t^f] \times \Omega \quad (2.5)$$

En la ecuación (2.5), t es el tiempo (s), $\alpha = \lambda/\rho c$ es el coeficiente de difusión térmica (m/s^2), λ es el coeficiente de transferencia de calor, ρ es la densidad del material de la placa y c el calor específico. La función $f(t, x)$ representa las fuentes de calor en el interior del circuito en función del tiempo y la posición.

2.4.2. Consideraciones simplificadorias

En este trabajo, se realizan ciertas simplificaciones en el modelo (2.5). Se asume que el fenómeno de transferencia de calor en el circuito es de carácter bidimensional (el circuito se considera un objeto 2D). De esta forma los efectos de convección y radiación en la dimensión ortogonal al plano no son considerados. Esto constiyuye una limitación al modelo considerado.

También de forma a emular el dispositivo de enfriamiento, se considera un flujo de calor en algunos de los bordes de la placa (fronteras del dominio), como fuera ilustrado en la Figura 1.4. Este hecho impone una condición para la frontera de Neumann en la ecuación (2.5). En caso de haber fronteras adiabáticas (sin intercambio de calor), la condición de Neumann es nula. El resto de la frontera se supone sujeta a cierta temperatura dada (condición de Dirichlet).

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

Por otro lado, no se consideran los efectos de la radiación, debido a que en el rango de temperaturas en la cual ocurre el proceso, ésta resulta despreciable [5, 6].

De este modo, la ecuación diferencial parcial que modela el comportamiento térmico en la placa considerada es:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\alpha}{\lambda} \nabla (\lambda \cdot \nabla z) + \frac{\alpha}{\lambda} f \quad \text{en } [t^o, t^f] \times \Omega, \quad (2.6)$$

sujeto a

$$\left\{ \begin{array}{l} z(t, x) = z_d(x) \quad \text{sobre } [t^o, t^f] \times (\partial\Omega \setminus \Gamma_N), \\ \frac{\partial z}{\partial \eta}(t, x) = g(t, x) \quad \text{sobre } [t^o, t^f] \times \Gamma_N, \\ z(0, x) = z_o(x) \quad \text{sobre } \Omega, \end{array} \right. \quad (2.7)$$

donde $\frac{\partial z}{\partial \eta}(t, x)$ es la derivada normal de z , $g(t, x)$ es el flujo de calor en la frontera de Neumann Γ_N , $z_d(x)$ es la condición isotérmica en la frontera restante $\Gamma_D = \partial\Omega \setminus \Gamma_N$ (Dirichlet) y $z_o(x)$ es la condición inicial de la temperatura. Aquí, ∇ es el operador Nabla en coordenadas cartesianas 2D, es decir:

$$\nabla z = \left[\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right]^T.$$

Nótese además que en la ecuación (2.6) el coeficiente λ puede depender de la temperatura z de la placa, y esta dependencia puede ser no lineal. La dependencia no lineal es lo que generalmente ocurre. Para el análisis cualitativo, objeto de este trabajo, se considerará que el material de la placa es homogéneo e isotrópico, entonces el coeficiente de conductividad térmica es constante en toda la región.

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

Esto linealiza la ecuación (2.6), que se reduce a:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \alpha \nabla^2 z + \frac{\alpha}{\lambda} f \quad \text{en} \quad [t^o, t^f] \times \Omega \quad (2.8)$$

donde $\Delta = \nabla^2$ es el operador Laplaciano y en coordenadas cartesianas 2D, es definido por:

$$\Delta z := \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Como α y λ son constantes, con el objetivo de no recargar innecesariamente la notación, se supondrá que $\alpha = \lambda = 1$. No obstante, en los experimentos numéricos, éstas constantes serán reconsideradas con valores aproximados a los de la realidad.

Con las simplificaciones mencionadas, el modelo de transferencia de calor a ser estudiado en este trabajo sobre la placa circuital considerada, se reduce a:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \alpha \nabla^2 z + \frac{\alpha}{\lambda} f \quad \text{en} \quad [t^o, t^f] \times \Omega \quad (2.9)$$

sujeto a

$$\left\{ \begin{array}{l} z(t, x) = z_d(x) \quad \text{sobre} \quad [t^o, t^f] \times \Gamma_D, \\ \frac{\partial z}{\partial \eta}(t, x) = g(t, x) \quad \text{sobre} \quad [t^o, t^f] \times \Gamma_N, \\ z(0, x) = z_o(x) \quad \text{sobre} \quad \Omega. \end{array} \right. \quad (2.10)$$

En la siguiente sección se discute el método de resolución de la ecuación (2.9) sujeta a las condiciones (2.10).

2.5. Resolución de la ecuación de Calor

En esta sección, introducimos inicialmente la formulación de elementos finitos, para obtener una solución numérica aproximada para el problema de Poisson y posteriormente extendemos la formulación para la ecuación de Calor. Para una descripción detallada y general del método de elementos finitos, ver el Anexo A.

2.5.1. La ecuación de Poisson

La ecuación de Poisson describe numerosos fenómenos físicos de campo, como por ejemplo la conducción del calor, el flujo de potencia, la diferencia de potencial, etc. El interés por la misma radica en el hecho de que la ecuación de Poisson corresponde a la solución en régimen estacionario de la ecuación de Calor.

A continuación se definen algunos espacios necesarios para enunciar y resolver el problema de Poisson. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio acotado del plano. Se definen:

$$L^2(\Omega) := \left\{ v \in L^2(\Omega); \int_{\Omega} v^2 dx < \infty \right\}$$
$$H^1(\Omega) := \left\{ v \in L^2(\Omega); \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, 2 \right\}$$

Los espacios $L^2(\Omega)$ y $H^1(\Omega)$ son tipos de Espacios de Hilbert, pero al nivel de profundidad de este trabajo, pueden ser interpretados como espacios vectoriales de funciones definidas en Ω (para más detalles consultar [12]). Adicionalmente se define el espacio $H_D^1(\Omega)$ como:

$$H_D^1(\Omega) := \{ v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ sobre } \Gamma_D \}. \quad (2.11)$$

Las funciones del espacio $H_D^1(\Omega)$ se anulan sobre la frontera Γ_D .

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

El problema de la ecuación de Poisson puede enunciarse como [13]:

Problema de la ecuación de Poisson. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio acotado con frontera poligonal Γ . Sea un subconjunto cerrado Γ_D de la frontera, con medida positiva, donde se asumen condiciones de Dirichlet, mientras que se asumen condiciones de Neumann en la parte restante $\Gamma_N := \Gamma \setminus \Gamma_D$. Dados $f \in L^2(\Omega)$, $z_d \in H^1(\Omega)$ y $g \in L^2(\Gamma_N)$, buscamos $z \in H^1(\Omega)$ tal que:

$$\begin{cases} -\Delta z = f & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} = g & \text{sobre } \Gamma_N \\ z = z_d & \text{sobre } \Gamma_D \end{cases} \quad (2.12)$$

Aquí, f representa una función perturbadora, z_d la condición de Dirichlet, g la condición de Neumann y η es el vector unitario normal saliente a la frontera de Neumann.

La formulación fuerte de este problema, dada por la integración del residuo ponderado de la ecuación diferencial es:

$$-\int_{\Omega} \Delta z \omega \, dx = \int_{\Omega} f \omega \, dx \quad (2.13)$$

donde $\omega \in H_D^1(\Omega)$ es una función test (o de ponderación). La resolución de la ecuación de Poisson en su forma clásica (2.13) requiere encontrar una solución cuya segunda derivada sea integrable. Esto porque para su verificación como solución se requerirá integrar el Laplaciano. Una solución de este tipo para la ecuación (2.13) es difícil de encontrar y eventualmente puede no existir solución. Una forma de encontrar soluciones más gene-ales consiste en simplificar esta condición usando una formulación débil.

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

Para ello se recurre a la integración por partes del término $\int_{\Omega} \Delta z \omega dx$, obteniendo:

$$\int_{\Omega} \Delta z \omega dx = - \int_{\Omega} \nabla z \cdot \nabla \omega dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial z}{\partial \eta} \omega ds. \quad (2.14)$$

Esta identidad es llamada 1ª *Identidad de Green*.

Utilizando la Identidad de Green en la formulación (2.13) resulta la formulación débil siguiente:

$$\int_{\Omega} \nabla z \cdot \nabla \omega dx = \int_{\Omega} f \omega dx + \int_{\Gamma_N} g \omega ds \quad (2.15)$$

Nótese que la solución buscada es tal que $z \in H^1(\Omega)$. Las condiciones no-homogéneas de Dirichlet asociadas a la frontera de Dirichlet Γ_D (la solución z restringida a la frontera Γ_D es dato) son incorporadas reformulando el problema de Poisson. Usando la descomposición $v = z - z_D$, se homogenizan las condiciones de Dirichlet, de modo que $v \in H_D^1(\Omega)$, es decir $v = 0$ sobre Γ_D . La función $z_D \in H^1(\Omega)$ es tal que su restricción a Γ_D es $z_D|_{\Gamma_D} = z_d$.

De este modo, la formulación débil para el problema de Poisson con condiciones de Dirichlet homogéneas, se puede expresar como:

Problema homogenizado de Poisson (débil). Hallar $v \in H_D^1(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla \omega dx = \int_{\Omega} f \omega dx + \int_{\Gamma_N} g \omega ds - \int_{\Omega} \nabla z_D \cdot \nabla \omega dx \quad (2.16)$$

donde $\omega \in H_D^1(\Omega)$ para el método de Galerkin (para más detalles ver el Anexo A).

Discretización de Galerkin para la ecuación de Poisson

Para la implementación computacional, el problema (2.16) es discretizado usando el método de Galerkin, donde los espacios $H^1(\Omega)$ y $H_D^1(\Omega)$ son reemplazados por espacios de dimensión finita Z_h y $V_h = Z_h \cap H_D^1(\Omega)$, respectivamente. El problema discreto puede entonces ser expresado como:

Problema discreto de Poisson. *Hallar $v_h \in V_h$ tal que*

$$\int_{\Omega} \nabla v_h \cdot \nabla \omega_h dx = \int_{\Omega} f \omega_h dx + \int_{\Gamma_N} g \omega_h ds - \int_{\Omega} \nabla z_{Dh} \cdot \nabla \omega_h dx \quad (2.17)$$

donde $w_h \in V_h$ y $z_{Dh} \in Z_h$ es una función que aproxima a z_D cuya restricción aproxima z_d sobre Γ_D .

La base de elementos finitos para Z_h es dada por $\{\phi_j\}_{j=1}^{\hat{n}}$ de donde se retiran las funciones correspondientes a los $(\hat{n} - \hat{m})$ nodos que están en Γ_D . Así se obtiene una base $\{\phi_i\}_{i \in I}$ para el espacio de aproximación $V_h = Z_h \cap H_D^1(\Omega)$, donde $I = \{i_1, \dots, i_{\hat{m}}\} \subseteq \{1, \dots, \hat{n}\}$ es un conjunto de índices de cardinalidad $\hat{m} \leq \hat{n} - 2$.

Para cada $i \in I$ resulta la siguiente expresión:

$$\int_{\Omega} \nabla v_h \cdot \nabla \phi_i dx = \int_{\Omega} f \phi_i dx + \int_{\Gamma_N} g \phi_i ds - \int_{\Omega} \nabla z_{Dh} \cdot \nabla \phi_i dx \quad (2.18)$$

Escribiendo

$$v_h = \sum_{i \in I} v_i \phi_i \quad \text{y} \quad z_{Dh} = \sum_{j=1}^{\hat{n}} z_{Dj} \phi_j, \quad (2.19)$$

el problema se reduce a resolver un sistema de ecuaciones $Ax = b$, en el cual

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

$$A = (a_{is})_{i,s \in I} \in \mathbb{R}^{\hat{m} \times \hat{m}}$$

$$b = (b_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^{\hat{m}}$$

vienen dados por:

$$a_{is} = \int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_s \, dx,$$
$$b_i = \int_{\Omega} f \phi_i \, dx + \int_{\Gamma_N} g \phi_i \, ds - \sum_{j=1}^{\hat{n}} z_{Dj} \int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j \, dx.$$

La matriz de coeficientes A es esparsa, simétrica y definida positiva, de modo que el sistema posee una única solución $\hat{v} \in \mathbb{R}^{\hat{m}}$ que determina la solución de Galerkin $z_h \in Z_h$ para el problema de Poisson de la forma:

$$z_h = z_{Dh} + v_h = \sum_{j=1}^{\hat{n}} z_{Dj} \phi_j + \sum_{i \in I} v_i \phi_i.$$

A lo largo del trabajo, $z_h \in Z_h$ ($v_h \in V_h$) y $\underline{z} = [z_1, \dots, z_{\hat{n}}]^T \in \mathbb{R}^{\hat{n}}$ ($\underline{v} = [v_1, \dots, v_{\hat{m}}]^T \in \mathbb{R}^{\hat{m}}$) se usarán para denotar la función de elementos finitos y su representación vectorial correspondiente.

2.5.2. La ecuación de Calor

El enunciado formal del problema a resolver es el siguiente:

Problema de la ecuación de Calor. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio acotado con frontera poligonal Γ . En un subconjunto cerrado Γ_D de la frontera, con medida positiva, se asumen condiciones de Dirichlet, mientras que se asumen condiciones de Neumann en la parte restante $\Gamma_N := \Gamma \setminus \Gamma_D$. Dados $f \in [t^o, t^f] \times L^2(\Omega)$, $z_d \in [t^o, t^f] \times H^1(\Omega)$, $g \in [t^o, t^f] \times L^2(\Gamma_N)$ y $z^o \in H^1(\Omega)$ se busca obtener $z \in [t^o, t^f] \times H^1(\Omega)$ tal que:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial z}{\partial t} = \Delta z + f & \text{en } [t^o, t^f] \times \Omega \\ z = z_d & \text{sobre } [t^o, t^f] \times \Gamma_D \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} = g & \text{sobre } [t^o, t^f] \times \Gamma_N \\ z(0, x) = z^o(x) & \text{sobre } \Omega \end{array} \right. \quad (2.20)$$

Como en este capítulo el interés radica sólo en resolver la ecuación de Calor, se discretizará directamente en el tiempo usando un esquema de diferencias finitas. En el siguiente capítulo, sin embargo, se usará separación de variables, discretizando primero en espacio y posteriormente en tiempo.

Por simplicidad y sin pérdida de generalidad, se asume que $t^o = 0$ y $t^f = T$ y se divide el intervalo $[0, T]$ en \hat{l} sub-intervalos iguales de longitud $\delta t = T / \hat{l}$. Se denota por $z^k := z(t^k, x)$ a la aproximación de z en el tiempo $t^k = k \delta t$. Análogamente son definidos $f^k = f(t^k, x)$ y $g^k = g(t^k, x)$.

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

Para la discretización temporal se usa un esquema de Euler retroactivo, es decir, la derivada temporal se aproxima por:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{z^k - z^{k-1}}{\delta t} \quad (2.21)$$

Así, el problema (2.20), discretizado temporalmente se enuncia como:

Problema de Calor discreto (tiempo).

Hallar $z^k \in H^1(\Omega)$ ($k = 1, \dots, \hat{l}$) tal que

$$z^k - \delta t \Delta z^k = \delta t f^k + z^{k-1} \quad (2.22)$$

sujeta a las condiciones iniciales y de frontera como en (2.20).

La ecuación (2.22) es una ecuación en diferencias de primer orden con k variando de 1 a \hat{l} . A partir de la solución inicial z^0 es posible calcular las demás soluciones z^k en forma recursiva. La integración del residuo ponderado de esta ecuación conduce a:

$$\int_{\Omega} z^k \omega dx - \delta t \int_{\Omega} \Delta z^k \omega dx = \delta t \int_{\Omega} f^k \omega dx + \int_{\Omega} z^{k-1} \omega dx \quad (2.23)$$

donde $\omega \in H_D^1(\Omega)$ es una función test.

Utilizando la 1ª *Identidad de Green* se obtiene:

$$\int_{\Omega} \Delta z^k \omega dx = - \int_{\Omega} \nabla z^k \cdot \nabla \omega dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial z^k}{\partial \eta} \omega ds \quad (2.24)$$

donde $\frac{\partial z^k}{\partial \eta}$ corresponde al valor de $\frac{\partial z}{\partial \eta}$ en el tiempo t^k .

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

La formulación débil para la ecuación de Calor, discreta en tiempo, resulta al reemplazar la ecuación (2.24) en (2.23):

Formulación débil para la ecuación de Calor discreta (tiempo).

Hallar $z^k \in H^1(\Omega)$ ($k = 1, \dots, \hat{l}$) tal que

$$\int_{\Omega} z^k \omega dx + \delta t \int_{\Omega} \nabla z^k \cdot \nabla \omega dx = \delta t \int_{\Omega} f^k \omega dx + \int_{\Omega} z^{k-1} \omega dx + \delta t \int_{\Gamma_N} g^k \omega ds \quad (2.25)$$

donde $\omega \in H_D^1(\Omega)$ es una función test.

De modo a homogeneizar las condiciones de Dirichlet, se considera la descomposición $v = z - z_D$, donde $z_D \in H^1(\Omega)$ es tal que su restricción a Γ_D es $z_D|_{\Gamma_D} = z_d$. Entonces $v \in H_D^1(\Omega)$, espacio que fuera definido en (2.11), y la formulación débil para el problema de Calor discretizado temporalmente, con condiciones de Dirichlet homogéneas se expresa como:

Problema homogéneo de Calor discreto (tiempo)(forma débil).

Hallar $v^k \in H_D^1(\Omega)$ ($k = 1, \dots, \hat{l}$) tal que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v^k \omega dx + \delta t \int_{\Omega} \nabla v^k \cdot \nabla \omega dx &= \delta t \int_{\Omega} f^k \omega dx + \int_{\Omega} v^{k-1} \omega dx \\ &+ \delta t \int_{\Gamma_N} g^k \omega ds - \delta t \int_{\Omega} \nabla z_D \cdot \nabla \omega dx \end{aligned}$$

donde $\omega \in H_D^1(\Omega)$.

Discretización de Galerkin para la ecuación de Calor

El método de Galerkin, permite encontrar espacios de aproximación Z_h y $V_h = Z_h \cap H_D^1(\Omega)$ para los espacios de dimensión infinita $H^1(\Omega)$ y $H_D^1(\Omega)$, respectivamente, de

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

modo que la formulación débil discreta en tiempo y espacio, con condiciones de Dirichlet homogéneas, se enuncia como:

Problema homogéneo de Calor discreto (tiempo y espacio)(forma débil).

Hallar $v_h^k \in V_h$ ($k = 1, \dots, \hat{l}$) tal que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v_h^k \omega_h dx + \delta t \int_{\Omega} \nabla v_h^k \cdot \nabla \omega_h dx &= \delta t \int_{\Omega} f^k \omega_h dx + \int_{\Omega} v_h^{k-1} \omega_h dx \\ &+ \delta t \int_{\Gamma_N} g^k \omega_h ds - \delta t \int_{\Omega} \nabla z_{Dh} \cdot \nabla \omega_h dx \end{aligned}$$

donde $\omega_h \in V_h$ y $z_{Dh} \in Z_h$ es una función que aproxima a z_D cuya restricción aproxima a z_d sobre Γ_D .

La base de elementos finitos para Z_h es dada por $\{\phi_j\}_{j=1}^{\hat{n}}$ de donde se retiran las funciones correspondientes a los $(\hat{n} - \hat{m})$ nodos que están en Γ_D . Así se obtiene una base $\{\phi_i\}_{i \in I}$ para el espacio de aproximación $V_h = Z_h \cap H_D^1(\Omega)$, donde $I = \{i_1, \dots, i_{\hat{m}}\} \subseteq \{1, \dots, \hat{n}\}$ es un conjunto de índices de cardinalidad $\hat{m} \leq \hat{n} - 2$.

Para cada $i \in I$ resulta la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v_h^k \phi_i dx + \delta t \int_{\Omega} \nabla v_h^k \cdot \nabla \phi_i dx &= \delta t \int_{\Omega} f^k \phi_i dx + \int_{\Omega} v_h^{k-1} \phi_i dx \\ &+ \delta t \int_{\Gamma_N} g^k \phi_i ds - \delta t \int_{\Omega} \nabla z_{Dh} \cdot \nabla \phi_i dx \end{aligned}$$

Escribiendo

$$v_h^k = \sum_{i \in I} v_i^k \phi_i \quad \text{y} \quad z_{Dh} = \sum_{j=1}^{\hat{n}} z_{Dj} \phi_j, \quad (2.26)$$

el problema se reduce a resolver la ecuación de recurrencia matricial:

$$(\mathbf{B} + \delta t \mathbf{A}) \mathbf{x}^k = \delta t \mathbf{b}^k + \mathbf{B} \mathbf{x}^{k-1} \quad (2.27)$$

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

en la cual $\mathbf{x}^k = (v_i^k)_{i \in I} \in \mathbb{R}^{\hat{m}}$ y donde $\mathbf{A} = (A_{is})_{i,s \in I} \in \mathbb{R}^{\hat{m} \times \hat{m}}$, $\mathbf{B} = (B_{is})_{i,s \in I} \in \mathbb{R}^{\hat{m} \times \hat{m}}$ y $\mathbf{b}^k = (b_i^k)_{i \in I} \in \mathbb{R}^{\hat{m}}$ se definen por:

$$A_{is} = \int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_s dx$$

$$B_{is} = \int_{\Omega} \phi_i \phi_s dx \quad (2.28)$$

$$b_i^k = \int_{\Omega} f^k \phi_i dx + \int_{\Gamma_N} g^k \phi_i ds - \sum_{j=1}^{\hat{n}} z_{Dj} \int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j dx$$

Conociendo la solución inicial \mathbf{x}^0 , se resuelve sucesivamente para cada $k = 1, \dots, \hat{l}$ obteniéndose una solución aproximada discreta en el tiempo:

$$z_h^k = z_{Dh} + v_h^k = \sum_{j=1}^{\hat{n}} z_{Dj} \phi_j + \sum_{i \in I} v_i^k \phi_i$$

La rutina desarrollada en el entorno Matlab implementa este método para calcular una solución numérica aproximada para el problema de Calor bidimensional con condiciones de frontera mixtas.

Los resultados numéricos para la ecuación de Calor con condiciones dadas de función perturbadora y fronteras de Neumann y Dirichlet se presentan en el capítulo 4. Esto permite realizar un análisis cualitativo para una gran variedad de casos, siendo posible variar la disposición de generadores de calor y las condiciones de flujo en los bordes de la placa.

CAPÍTULO 3

EL PROBLEMA DE CONTROL ÓPTIMO

En esta sección se pretende controlar la temperatura en la placa, ajustando el flujo de calor en los bordes. Para ello, se procede a discretizar la ecuación de Calor en el espacio para llegar a una ecuación de estado en la forma:

$$\begin{cases} \hat{M}\dot{\underline{z}} = \hat{A}\underline{z} + \hat{f} + \hat{B}\underline{u} & t \in (t^o, t^f) \\ \underline{z}(t^o) = \underline{z}_o \end{cases} \quad (3.1)$$

donde $\underline{z}, \hat{f} \in \mathbb{R}^{\hat{n}}$, $\underline{u} \in \mathbb{R}^{\hat{m}}$, $\hat{A}, \hat{M} \in \mathbb{R}^{\hat{n} \times \hat{n}}$ y $\hat{B} \in \mathbb{R}^{\hat{n} \times \hat{m}}$.

Para determinar el controlador, se asocia un funcional de costo cuadrático lineal que penaliza el error y el vector de control. El error está asociado a la rapidez con que la solución se aproxima a la deseada y el vector de control a la cantidad de energía necesaria para controlar el sistema. El problema de control óptimo buscará obtener $\underline{z} \in \mathbb{R}^{\hat{n}}$ y $\underline{u} \in \mathbb{R}^{\hat{m}}$ para cada t satisfaciendo (3.1) y minimizando el funcional asociado.

3.1. Formulación variacional

Se considera el problema enunciado en (2.20) del capítulo anterior:

Problema de la ecuación de Calor. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio acotado con frontera poligonal Γ . En un subconjunto cerrado Γ_D de la frontera, con medida positiva, se asumen condiciones de Dirichlet, mientras que se asumen condiciones de Neumann en la parte restante $\Gamma_N := \Gamma \setminus \Gamma_D$. Dados $f \in [t^o, t^f] \times L^2(\Omega)$, $z_d \in [t^o, t^f] \times H^1(\Omega)$, $g \in [t^o, t^f] \times L^2(\Gamma_N)$ y $z^o \in H^1(\Omega)$ se busca obtener $z \in [t^o, t^f] \times H^1(\Omega)$ tal que:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial z}{\partial t} = \Delta z + f & \text{en } [t^o, t^f] \times \Omega \\ z = z_d & \text{sobre } [t^o, t^f] \times \Gamma_D \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} = g & \text{sobre } [t^o, t^f] \times \Gamma_N \\ z(0, x) = z^o(x) & \text{sobre } \Omega \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Sin perder generalidad, se supondrá que la condición de Dirichlet es nula, de modo que el problema ya está homogeneizado y la solución z pertenece al espacio $[t^o, t^f] \times Z$, donde $Z = H_D^1(\Omega)$. La integración del residuo ponderado de esta ecuación conduce a la formulación fuerte:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial z}{\partial t} \omega dx - \int_{\Omega} \Delta z \omega dx = \int_{\Omega} f \omega dx \quad (3.3)$$

donde $\omega \in H_D^1(\Omega)$ es una función test.

Utilizando la 1ª Identidad de Green se obtiene:

$$\int_{\Omega} \Delta z \omega dx = - \int_{\Omega} \nabla z \cdot \nabla \omega dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial z}{\partial \eta} \omega ds \quad (3.4)$$

La formulación débil para la ecuación de Calor resulta al reemplazar la expresión (3.4) en la ecuación (3.3), y se enuncia como:

Formulación débil para la ecuación de Calor

Hallar $z \in [t^o, t^f] \times Z$ tal que:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial z}{\partial t} \omega dx = - \int_{\Omega} \nabla z \cdot \nabla \omega dx + \int_{\Omega} f \omega dx + \int_{\Gamma_N} g \omega ds \quad (3.5)$$

donde $\omega \in H_D^1(\Omega)$.

Vale la pena hacer énfasis que en esta formulación débil, $z = z(t, x) \in [t^o, t^f] \times Z$, $f = f(t, x) \in [t^o, t^f] \times L^2(\Omega)$ y $g = g(t, x) \in [t^o, t^f] \times L^2(\Gamma_N)$, dependen continuamente del tiempo y espacio. Por el contrario, $\omega = \omega(x) \in H_D^1(\Omega)$ es independiente del tiempo. Esto permitirá separar las variables, como se verá en la sección 3.3. No obstante, por simplicidad, en este trabajo se considera que la generación de calor f también es constante en el tiempo.

3.2. El problema de control

El flujo g a través de la frontera Γ_N es la variable de control desconocida que pertenece a un espacio de control $U = L^2(\Gamma_N)$ para cada $t \in [t^o, t^f]$. La perturbación f , que en este trabajo se interpreta como la generación de calor constante en el tiempo, pertenece al espacio $L^2(\Omega)$. Según [14, 15], se asume para cada $z(t, x)$, que este problema está correctamente formulado.

3.3. Discretización espacial: Método de Galerkin

Como el dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tiene una frontera poligonal, podemos cubrir $\bar{\Omega}$ con una triangularización regular $\tau_h(\Omega)$, esto es, $\bar{\Omega} = \bigcup_{\mathcal{T} \in \tau_h(\Omega)} \mathcal{T}$, donde \mathcal{T} es un triángulo cerrado. Además, $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ donde Γ_D y Γ_N corresponden a las fronteras de Dirichlet y Neumann, respectivamente. Llamaremos E , a los elementos de frontera de la triangularización $\tau_h(\Omega)$, es decir, los lados de $\mathcal{T} \in \tau_h(\Omega)$ que pertenecen a Γ . Esto permitirá desacoplar las variables en tiempo y espacio, aplicando el método de los elementos finitos a la formulación débil (3.5), para cada $t \in [t^o, t^f]$ fijo.

Sean $Z_h \subset Z \equiv H_D^1(\Omega)$ y $U_h \subset U \equiv L^2(\Gamma_N)$ los espacios de elementos finitos en Ω y Γ_N , para obtener aproximaciones de $z(t, x)$ y $g(t, x)$, respectivamente. Por tanto, una semi-discretización de (3.5), para $t \in [t^o, t^f]$ se escribe como:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial z_h}{\partial t} \omega_h dx &= - \int_{\Omega} \nabla z_h \cdot \nabla \omega_h dx + \int_{\Omega} f_h \omega_h dx + \int_{\Gamma_N} g_h \omega_h ds \\ z_h(t^o) &= z_{ho} \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde $\omega_h \in Z_h$ y $z_{ho} \in Z_h$ se considera como una $L^2(\Omega)$ -proyección de $z(t^o)$.

En dichos espacios, se considera $\{\phi_1(x), \dots, \phi_{\hat{n}}(x)\} \subset Z_h$ una base lineal por partes y $\{\psi_1(x), \dots, \psi_{\hat{m}}(x)\} \subset U_h$ una base constante por partes, de modo que se pueda representar, separando las variables de tiempo y espacio:

$$z_h(t, x) = \sum_{j=1}^{\hat{n}} z_j(t) \phi_j(x) \quad g_h(t, x) = \sum_{k=1}^{\hat{m}} u_k(t) \psi_k(x). \quad (3.7)$$

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

Entonces, la formulación débil para la ecuación de Calor (3.6), es equivalente a:

Problema de Calor discreto (espacio)(forma débil).

Hallar para cada $t \in [t^o, t^f]$, $z_h \in Z_h$ tal que

$$\sum_{j=1}^{\hat{n}} \dot{z}_j(t) \int_{\Omega} \phi_i \phi_j dx = - \sum_{j=1}^{\hat{n}} z_j(t) \int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j dx + \int_{\Omega} f \phi_i dx + \sum_{k=1}^{\hat{m}} u_k(t) \int_{\Gamma_N} \phi_i \psi_k ds$$

para cada $i \in \{1, \dots, \hat{n}\}$.

Cabe resaltar que todas las integrales sólo dependen de variables espaciales y no temporales. Entonces, denotando por $\underline{z} = (z_j(t)) \in \mathbb{R}^{\hat{n}}$ y $\underline{u} = (u_k(t)) \in \mathbb{R}^{\hat{m}}$ a los vectores de estado y de control, respectivamente, las ecuaciones precedentes corresponden al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{cases} \hat{M} \dot{\underline{z}} = \hat{A} \underline{z} + \hat{f} + \hat{B} \underline{u} & t \in (t^o, t^f) \\ \underline{z}(t^o) = z_o \end{cases} \quad (3.8)$$

donde las matrices de masa $\hat{M} = (M_{ij}) \in \mathbb{R}^{\hat{n} \times \hat{n}}$, la de coeficientes $\hat{A} = (A_{ij}) \in \mathbb{R}^{\hat{n} \times \hat{n}}$ la de ponderación de control $\hat{B} = (B_{ik}) \in \mathbb{R}^{\hat{n} \times \hat{m}}$ y el vector $\hat{f} = (f_j) \in \mathbb{R}^{\hat{n}}$ que representa la perturbación vienen dados por:

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \int_{\Omega} \phi_i \phi_j dx \\ A_{ij} &= - \int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j dx \\ B_{ik} &= \int_{\Gamma_N} \phi_i \psi_k ds \\ f_j &= \int_{\Omega} f \phi_j dx \end{aligned}$$

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

Según la discretización de Ω , podemos obtener las matrices y vectores mencionados, integrando por separado en cada elemento \mathcal{T} del dominio y E de la frontera, para luego sumarlos, es decir:

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \sum_{\mathcal{T} \in \tau_h(\Omega)} \int_{\mathcal{T}} \phi_i \phi_j dx \\ A_{ij} &= - \sum_{\mathcal{T} \in \tau_h(\Omega)} \int_{\mathcal{T}} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j dx \\ B_{ik} &= \sum_{E_k \subset \Gamma_N} \int_{E_k} \phi_i \psi_k ds \\ f_j &= \sum_{\mathcal{T} \in \tau_h(\Omega)} \int_{\mathcal{T}} f \phi_j dx \end{aligned}$$

3.4. Discretización temporal

Se discretiza el dominio del tiempo usando una malla de $\hat{l} - 1$ puntos interiores de modo que los intervalos de tiempo son iguales a $\delta t = (t^f - t^o)/\hat{l}$ y $t^l = l\delta t$. La variable de estado \underline{z} , y el vector de perturbación \hat{f} en el tiempo t^l , son denotados por $z^l := \underline{z}(t^l)$ y $\hat{f}^l := \hat{f}(t^l)$, respectivamente. Se asume que el controlador discreto \underline{u} es constante en cada intervalo $[t^l, t^{l+1})$ con el valor $u^l := \underline{u}((l + 1/2)\delta t)$.

Usando un esquema de Euler retroactivo como en (2.21), una discretización estable del sistema (3.8) puede escribirse como:

$$\left(\hat{M} - \delta t \hat{A} \right) z^{l+1} = \hat{M} z^l + \delta t \hat{f}^l + \delta t \hat{B} u^l \quad (3.9)$$

para $l = 0, 1, \dots, \hat{l} - 1$.

3.5. Control óptimo

Según [16], para determinar el controlador \underline{u} (o equivalentemente g) se asocia el funcional:

$$J(\underline{z}, \underline{u}) = \int_{t^o}^{t^f} \left[(\underline{z} - \underline{z}^*)^T Q (\underline{z} - \underline{z}^*) + \underline{u}^T R \underline{u} \right] dt, \quad (3.13)$$

donde $\underline{z}^* \in \mathbb{R}^{\hat{n}}$ es la función objetivo dada, $Q \in \mathbb{R}^{\hat{n} \times \hat{n}}$ y $R \in \mathbb{R}^{\hat{m} \times \hat{m}}$.

El problema de control óptimo buscará obtener $\underline{z} \in \mathbb{R}^{\hat{n}}$ y $\underline{u} \in \mathbb{R}^{\hat{m}}$ para cada t satisfaciendo (3.8) y minimizando el funcional (3.13), esto es:

$$\begin{cases} \min & J(\underline{z}, \underline{u}) \\ \text{s.a.} & (3.8) \end{cases} \quad (3.14)$$

En este trabajo, las matrices Q y R se consideran como matrices escalares de la forma $Q = rI$ y $R = qI$, donde r y q son parámetros cuya relación establece el compromiso entre gasto de energía y eficiencia del controlador.

El funcional (3.13) se discretiza en espacio y tiempo, con el mismo método aplicado anteriormente, obteniéndose matrices $K \in \mathbb{R}^{\hat{n} \times \hat{n}}$ y $G \in \mathbb{R}^{\hat{m} \times \hat{m}}$ tales que:

$$J(\underline{z}, \underline{u}) = (\underline{z} - \underline{z}^*)^T \mathbf{K} (\underline{z} - \underline{z}^*) + \underline{u}^T \mathbf{G} \underline{u} \quad (3.15)$$

donde $\underline{z}, \underline{u}$ fueron definidos en la sección anterior y \underline{z}^* es definido de manera análoga.

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

Por tanto, el problema de control (3.14) se transforma en un problema discreto de minimización con restricciones, expresado como:

$$\begin{cases} \min & (\mathbf{z} - \mathbf{z}^*)^T \mathbf{K} (\mathbf{z} - \mathbf{z}^*) + \mathbf{u}^T \mathbf{G} \mathbf{u} \\ \text{s.a.} & \mathbf{E} \mathbf{z} + \mathbf{N} \mathbf{u} = \mathbf{b} \end{cases} \quad (3.16)$$

De modo a satisfacer las restricciones mencionadas, se utiliza el método de los multiplicadores de Lagrange. Así, si $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{\hat{n}l}$ es el multiplicador de Lagrange, el problema (3.16) se reduce a minimizar el Lagrangiano discreto:

$$\mathcal{L}_h(\mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2}((\mathbf{z} - \mathbf{z}^*)^T \mathbf{K} (\mathbf{z} - \mathbf{z}^*) + \mathbf{u}^T \mathbf{G} \mathbf{u}) + \mathbf{p}^T (\mathbf{E} \mathbf{z} + \mathbf{N} \mathbf{u} - \mathbf{b}), \quad (3.17)$$

Calculando las derivadas parciales en \mathbf{z} , \mathbf{u} y \mathbf{p} , e igualando a cero, resulta el sistema lineal siguiente:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} & \mathbf{E}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{G} & \mathbf{N}^T \\ \mathbf{E} & \mathbf{N} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}^* \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

La matriz de coeficientes del sistema (3.18), denotada por la matriz \mathbf{H} , es simétrica, esparsa pero indefinida y mal condicionada. La elaboración de un preconditionador para su solución por un método iterativo está fuera del alcance de este trabajo. Para mayores detalles ver [16]. En el contexto de este trabajo se usará un método directo para la resolución de (3.18).

CAPÍTULO 4

RESULTADOS NUMÉRICOS

En este capítulo se presentan los resultados numéricos de la simulación computacional del fenómeno de disipación de calor en la placa, definido por el problema (2.20):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial z}{\partial t} = \Delta z + f \quad \text{en} \quad [t^o, t^f] \times \Omega \\ z = z_d \quad \text{sobre} \quad [t^o, t^f] \times \Gamma_D \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} = g \quad \text{sobre} \quad [t^o, t^f] \times \Gamma_N \\ z(0, x) = z^o(x) \quad \text{sobre} \quad \Omega \end{array} \right.$$

Posteriormente se implementa el controlador desarrollado en el capítulo anterior, se analiza el ajuste del mismo y se resuelve el problema de control de temperatura en la placa para algunos casos. Finalmente se presentan las conclusiones y trabajos futuros.

4.1. Definiciones

A continuación se definen algunos elementos y variables de entrada de la rutina desarrollada, para especificar los casos a ser simulados:

- **Tiempo de simulación y discretización temporal:**

El tiempo de simulación (T) que será considerado debe definirse en segundos.

Para la discretización temporal (L) se utiliza un esquema de diferencias finitas, dividiendo el tiempo de simulación $[0, T]$ en L intervalos iguales.

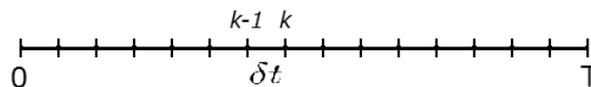


Figura 4.1: Discretización temporal

Obs: En el cálculo de la solución existe un bucle de precisión para identificar el estado estacionario, tras lo cual puede opcionalmente interrumpirse el tiempo redundante de simulación.

- **Dimensiones de la placa rectangular:**

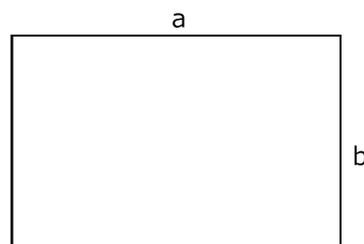


Figura 4.2: Dimensiones de la placa en estudio

Obs: en unidades de metros $[m]$.

■ **Componentes generadores de calor:**

Se determinarán mediante una matriz F , en la cual cada fila, corresponde a un componente. La cantidad de filas, indicará cuántos componentes se consideran.

Ejemplo para el componente F_1 : Se asume que los componentes son rectangulares, de modo que deben indicarse el vértice inferior izquierdo (x_1, y_1) y el superior derecho (x_2, y_2) , del componente F_1 .

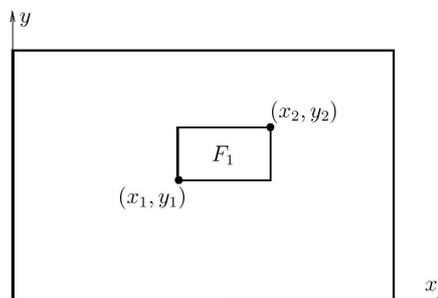


Figura 4.3: Componentes generadores de calor

La notación a ser utilizada es:

$$F(1, :) = [x_1, y_1, x_2, y_2]; \quad \dots \quad F(k, :) = [, , ,];$$

Obs1: se deben indicar los k componentes que existan.

Obs2: en unidades de metros $[m]$.

■ **Densidad de calor generado en cada componente (perturbación):**

Para cada componente generador de calor, debe indicarse la densidad de calor generado por unidad de área (el modelo es 2D). La notación a ser utilizada es:

$$f(1) = valor_1; \quad \dots \quad f(k) = valor_k;$$

Obs1: se debe indicar para los k componentes que existan.

Obs2: en unidades de Watts por metro cuadrado $[W/m^2]$

■ **Fronteras de Neumann en los cuatro lados:**

Cada lado se etiqueta como se muestra en la figura:



Figura 4.4: Etiqueta de lados para definir fronteras de Neumann

En cada lado, debe establecerse si existe frontera de Neumann y, en caso afirmativo, determinar en qué subintervalos del lado se encuentra.

Ejemplo para la frontera $NX2$ (análogo para las otras fronteras): Sólo se indica dónde inicia y acaba la frontera de Neumann en un lado. Pueden tenerse varios sectores en un mismo lado. La notación usada es:

$NX2 = [a_1, b_1]$; (si hay un solo sector)

$NX2 = [a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n]$; (si hay n sectores)

$NX2 = [0, 0]$; (si no hay frontera de Neumann)

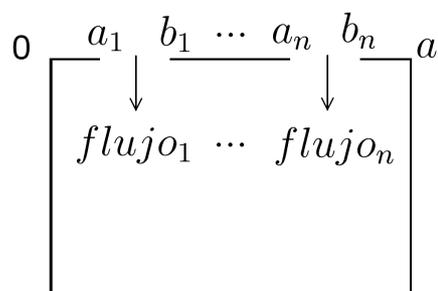


Figura 4.5: Fronteras de Neumann en $NX2$

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

Obs1: es claro que los valores a_i, b_i , deben estar entre 0 y a .

Obs2: en unidades de metros [m].

■ **Flujos en la frontera de Neumann:**

Debe establecerse el flujo de calor en cada sector de la frontera de Neumann. La sección transversal es 1D, porque el modelo es 2D.

Ejemplo para la frontera NX2: El flujo en la frontera NX2, estará dado por el vector $nx2$, que contendrá el flujo en cada uno de los n sectores de la frontera NX2, definido antes, y en el mismo orden.

La notación usada es:

Si $NX2 = [a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n]$; entonces $nx2 = [flujo_1, flujo_2, \dots, flujo_n]$.

Si $NX2 = [a_1, b_1]$; entonces $nx2 = [flujo_1]$.

Si $NX2 = [0, 0]$; entonces $nx2 = [0]$ (valor irrelevante).

Obs: en unidades de Watts por metro [W/m].

■ **Solución en la frontera de Dirichlet:**

No es necesario delimitar esta frontera, puesto que se asume en este trabajo que todo sector de frontera que no es de Neumann, es de Dirichlet. Sin embargo, es necesario definir la solución preestablecida para la frontera de Dirichlet. Por simplicidad, la misma será aplicada a toda la frontera y no por sectores.

Obs: en unidades de grados Kelvin [K].

■ **Refinamiento de la malla en los ejes X e Y:**

La malla regular, tendrá n_1 subdominios en el eje X, y n_2 en el eje Y.

Se denomina malla regular, a la que es independiente de los nodos fijos dados por otros componentes, como vértices de los componentes generadores de calor, nodos fijos de la frontera de Neumann, etc. Ellos serán incorporados automáticamente durante el programa para formar la malla completa. En la Figura 4.6, se observa un ejemplo de malla regular y completa.

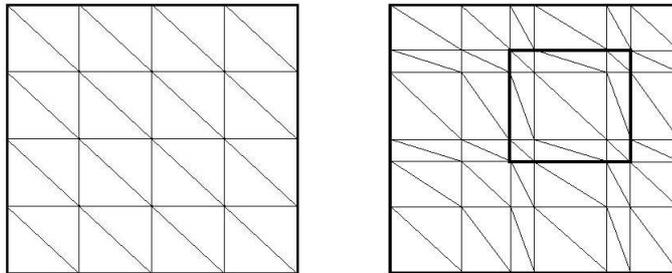


Figura 4.6: Malla regular 4×4 y malla completa con un componente generador

■ **Condición inicial de temperatura en la placa:**

Es el valor de la temperatura en toda la placa, al iniciarse la simulación.

Obs: en unidades de grados Kelvin [K].

4.2. Solución de la ecuación de Calor

En esta sección se presentan los resultados y comparaciones para algunos de los casos que fueron simulados. La placa modelo a ser utilizada es cuadrada con 5cm de lado. Por simplicidad se considera un solo componente generador de calor, de modo a visualizar el fenómeno de disipación, aunque puede ser considerada una distribución cualesquiera de ellos. El componente modelo es cuadrado con 2cm de lado y una densidad de calor generado de $4 \times 10^5 \text{W}/\text{m}^2$. En otras palabras, este componente representa a un chip que disipa 160W .

En esta etapa de simulación (sin controlador), el valor del flujo en la frontera de Neumann es preestablecido y constante en el tiempo. El calor generado internamente es conducido hacia los bordes y este flujo es el que representa al agente disipador de calor en los bordes de la placa.

Como el objeto de este trabajo es un análisis cualitativo, los valores numéricos utilizados para la simulación son simbólicos. No obstante, en la mayoría de los casos, se utilizan valores numéricos de orden cercanos a la realidad.

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

4.2.1. CASO 1

A continuación se detallan las variables de entrada para este caso:

Tabla 4.1: Variables de entrada para el CASO 1

Tiempo [s] y discretización	T=30	L=60
Dimensiones de la placa [m]	a=0.05	b=0.05
Generadores de calor [m]	F(1,:)=0.05*[0.5,0.5,0.7,0.7]	
Densidad de calor generado [W/m^2]	f(1)=400000	
Fronteras de Neumann [m]	NX1=0.05*[0 , 0] NX2=0.05*[0 , 0] NY1=0.05*[0 , 0] NY2=0.05*[0 , 0]	
Flujos (Neumann) [W/m]	nx1=[0]	nx2=[0]
	ny1=[0]	ny2=[0]
Solución en la frontera de Dirichlet [K]	dirichlet = 300	
Refinamiento de la malla	n1=50	n2=50
Condición inicial de temperatura [K]	inicial = 300	

Nótese que la situación inicial (y la condición de Dirichlet) están preestablecidas en temperatura ambiente de $300K$ ($27^{\circ}C$). Además, no existe frontera de Neumann: todos los bordes de la placa se mantienen a $300K$ durante todo el tiempo de simulación.

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

En la Figura 4.7, se observa la evolución de la temperatura en tres nodos específicos de la placa: en un extremo, en el centro de la placa y en el centro del generador de calor.

El extremo de la placa esta sujeta a $300K$ por condición de dirichlet. El pico de temperatura es de $312,62K$ en estado estacionario en el centro del generador, lo cual no reviste peligro para el problema de calor en la placa. El tiempo de establecimiento es de $16s$ (para llegar al estado estacionario con una precisión de 10^{-4}). El estado estacionario de la solución de la ecuación de Calor corresponde a la solución de la ecuación de Poisson).

En la Figura 4.8, vista superior del proceso de difusión de calor, se observa cierta geometría elíptica, como un frente de calor avanzando hacia los bordes. Esto se debe a que el componente no está centrado en la placa y tiene una interacción más rápida con los dos bordes más cercanos.

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

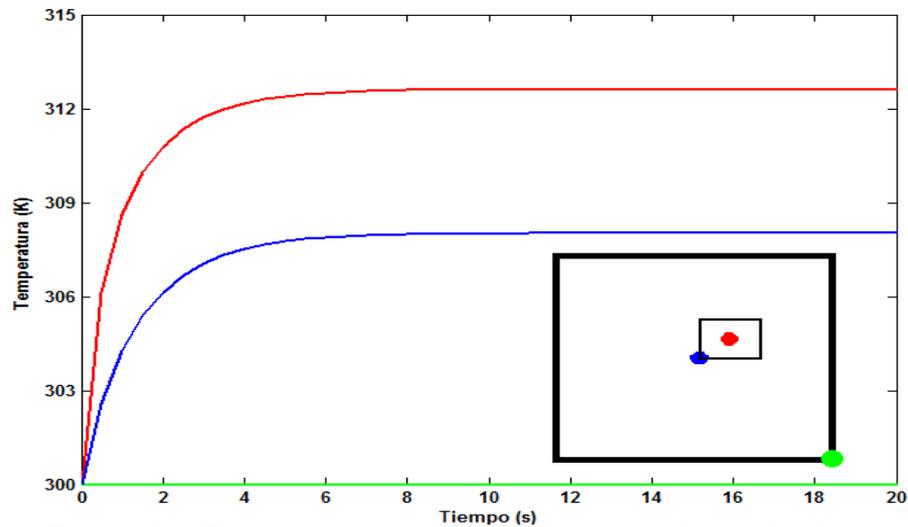


Figura 4.7: Evolución de la temperatura en 3 nodos de la placa

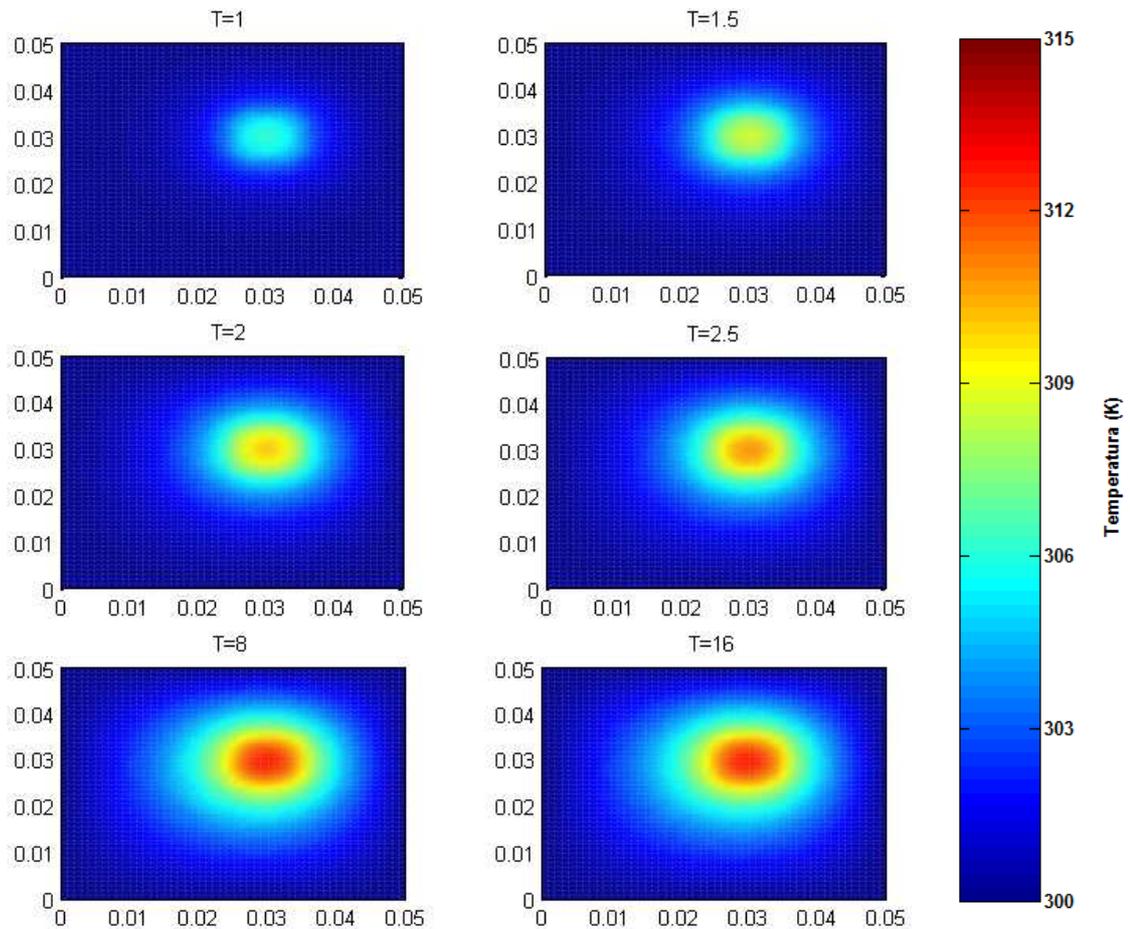


Figura 4.8: Vista superior de la difusión de calor en la placa

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

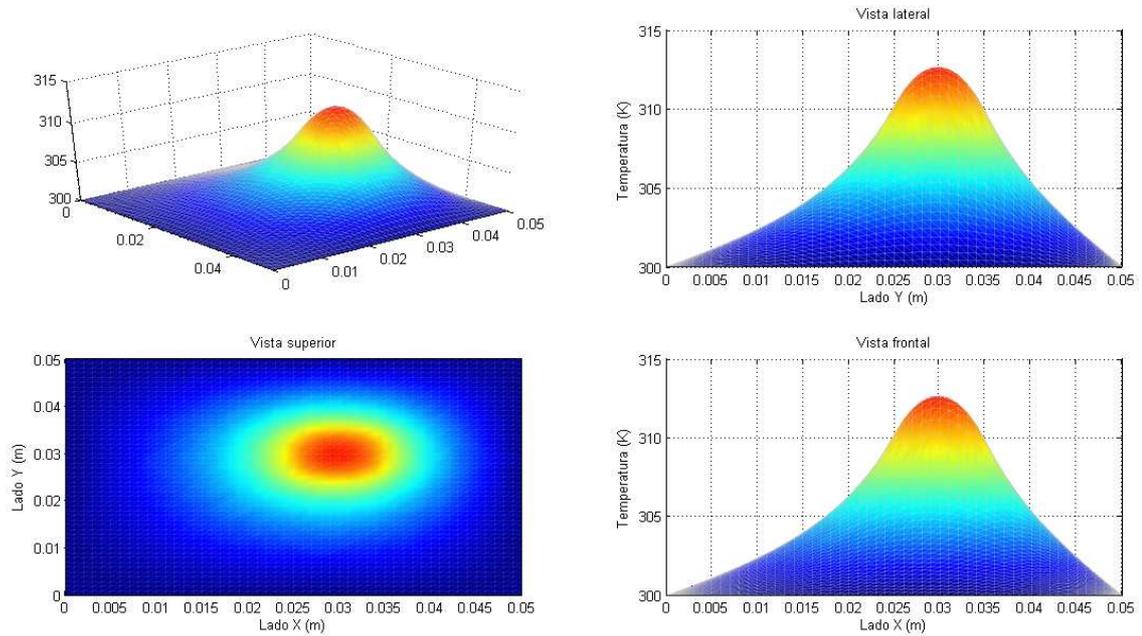


Figura 4.9: Distribución de temperaturas en estado estacionario

Lo que no se puede concluir a partir de este caso, es cómo se disipa el calor al llegar a los bordes, dado que éstos están sujetos a una condición de Dirichlet de $300K$. Sin embargo, debe existir algún tipo de disipación en los bordes, puesto que si la frontera fuese adiabática (sin intercambio de calor), la continua generación de calor en el interior no permitiría llegar a un estado estable.

En los siguientes casos, se aumentará progresivamente la presencia de fronteras de Neumann con flujos preestablecidos de disipación, para comprender mejor el mecanismo de disipación en las fronteras de Dirichlet.

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

4.2.2. CASO 2

A continuación se detallan las variables de entrada para este caso:

Tabla 4.2: Variables de entrada para el CASO 2

Tiempo [s] y discretización	T=100	L=200
Dimensiones de la placa [m]	a=0.05	b=0.05
Generadores de calor [m]	F(1,:)=0.05*[0.5,0.5,0.7,0.7]	
Densidad de calor generado [W/m^2]	f(1)=400000	
Fronteras de Neumann [m]	NX1=0.05*[0 , 1] NX2=0.05*[0 , 1] NY1=0.05*[0 , 0] NY2=0.05*[0 , 1]	
Flujos (Neumann) [W/m]	nx1=[-10]	nx2=[-10]
	ny1=[-10]	ny2=[-10]
Solución en la frontera de Dirichlet [K]	dirichlet = 300	
Refinamiento de la malla	n1=50	n2=50
Condición inicial de temperatura [K]	inicial = 300	

En este caso, sólo uno de los lados de la placa está sujeto a condiciones de Dirichlet, y el resto a condiciones de Neumann. Nótese que la temperatura inicial (y la condición de Dirichlet) están preestablecidas en temperatura ambiente de $300K$ ($27^{\circ}C$). El flujo para disipación de calor en los bordes es relativamente bajo ($-10W/m$). Se pretende comprender el efecto que tiene en la disipación la presencia de la frontera de Dirichlet.

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

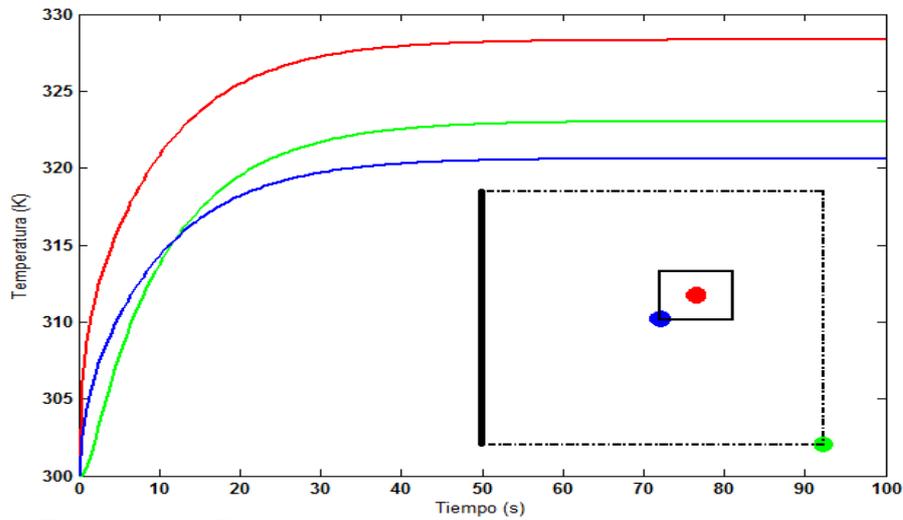


Figura 4.10: Evolución de la temperatura en 3 nodos de la placa

Se observa en la Figura 4.10, que las curvas de temperatura han aumentado. El pico de temperatura en la placa es de $328,67K$. Para llegar al estado estable, el sistema demora $98s$.

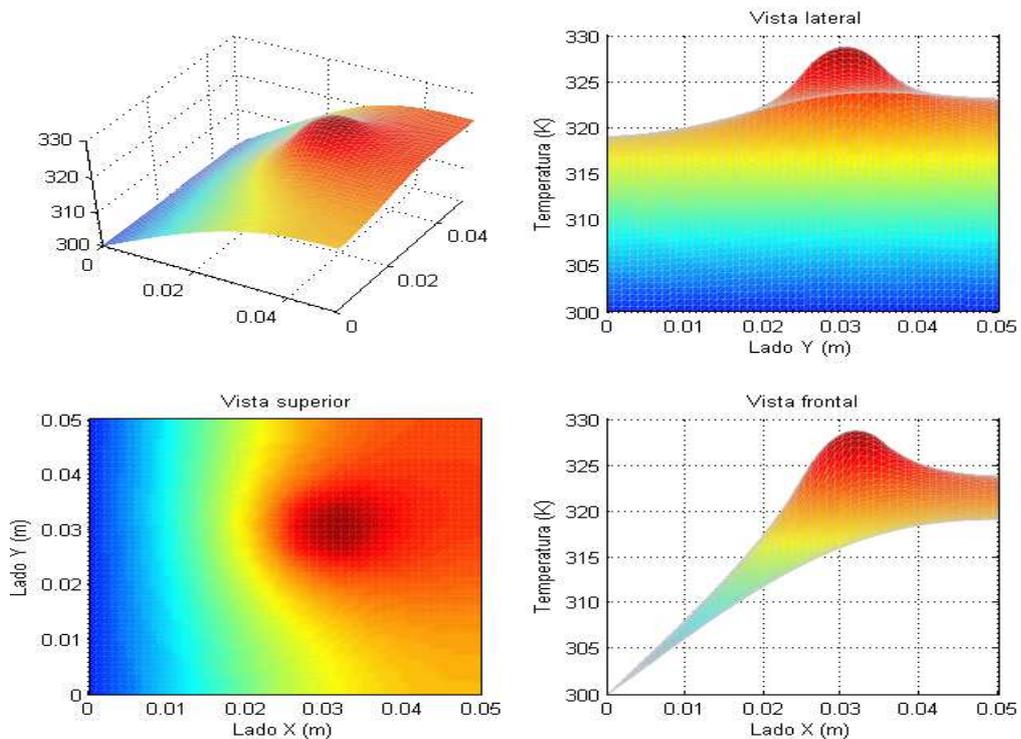


Figura 4.11: Distribución de temperaturas en estado estacionario

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

Nótese que el calor no logra disiparse adecuadamente en las fronteras de Neumann (el flujo de $-10W/m$ establecido es relativamente bajo), por lo cual la temperatura aumenta sustancialmente cerca de tales bordes. Sin embargo, en la frontera de Dirichlet la disipación es apropiada para evacuar el calor y mantener la temperatura de $300K$ en dicho borde. Adicionalmente en este caso, se aumenta el flujo de disipación en los bordes a $-100W/m$, esperando que la evacuación de calor mejore en las fronteras de Neumann. Esto físicamente implica un mayor uso de energía para disipar el calor.

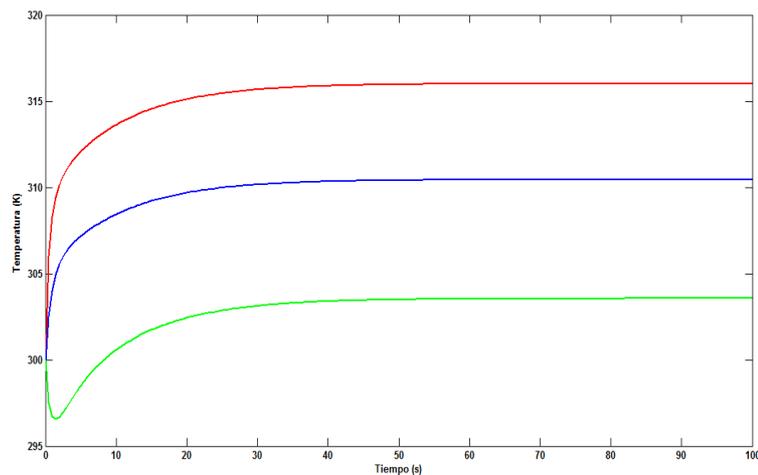


Figura 4.12: Evolución de la temperatura en 3 nodos de la placa para flujo (-100)

El tiempo de establecimiento no ha variado significativamente, siendo aproximadamente de $86,5s$, aunque las temperaturas se encuentran en el orden del CASO 1, con un pico de $316K$.

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

En relación al CASO 2 con flujo (-10) , observe como el calor es evacuado con mayor rapidez en las fronteras de Neumann, permitiendo mantener la temperatura en los márgenes del CASO 1.

Nótese la similitud de la siguiente figura con la Figura 4.9 del CASO 1. Esto indica que la disipación en la frontera de Dirichlet está en el orden de $-100W/m$, aunque no lo sabemos con precisión, pues un agente externo se encarga de mantener la temperatura de la frontera en $300K$.

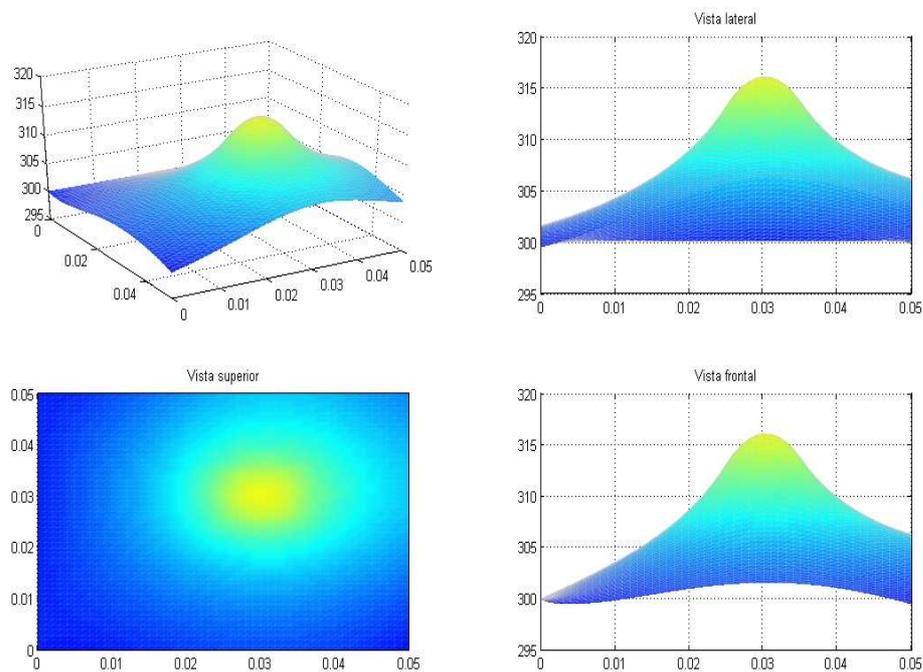


Figura 4.13: Distribución de temperaturas en estado estacionario para flujo (-100)

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

Sin embargo, este agente externo, puede interpretarse como un controlador que ajusta el flujo en la frontera de Dirichlet según lo requiera, de modo a mantener una temperatura constante en el borde. Si dicho controlador existiera físicamente, bastaría aplicarlo en toda la placa para resolver el problema.

Por otro lado, las fronteras de Neumann ofrecen varios grados de libertad en cuanto a especificar el flujo de disipación y sí pueden ser usadas para sintetizar un controlador. Por tanto, como el objetivo es estudiar el control del fenómeno de disipación de calor, se evitará el uso de fronteras de Dirichlet. Esto se presenta a continuación.

4.2.3. CASO 3

A continuación se detallan las variables de entrada para este caso:

Tabla 4.3: Variables de entrada para el CASO 3

Tiempo [s] y discretización	T=400	L=400
Dimensiones de la placa [m]	a=0.05	b=0.05
Generadores de calor [m]	F(1,:)=0.05*[0.5,0.5,0.7,0.7]	
Densidad de calor generado [W/m^2]	f(1)=400000	
Fronteras de Neumann [m]	NX1=0.05*[0 , 1] NX2=0.05*[0 , 1] NY1=0.05*[0 , 0.96] NY2=0.05*[0 , 1]	
Flujos (Neumann) [W/m]	nx1=[-10] nx2=[-10] ny1=[-10] ny2=[-10]	
Solución en la frontera de Dirichlet [K]	dirichlet = 300	
Refinamiento de la malla	n1=50	n2=50
Condición inicial de temperatura [K]	inicial = 300	

Nótese que la situación inicial (y la condición de Dirichlet) están preestablecidas en temperatura ambiente de $300K$ ($27^{\circ}C$), el flujo para disipación de calor en los bordes es relativamente bajo ($-10W/m$). La presencia de una pequeña frontera de Dirichlet, es indispensable para satisfacer las hipótesis del problema de la ecuación de Calor, descrito en (2.20). Bajo determinadas condiciones, como en el problema de control óptimo, puede prescindirse totalmente de esta frontera.

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

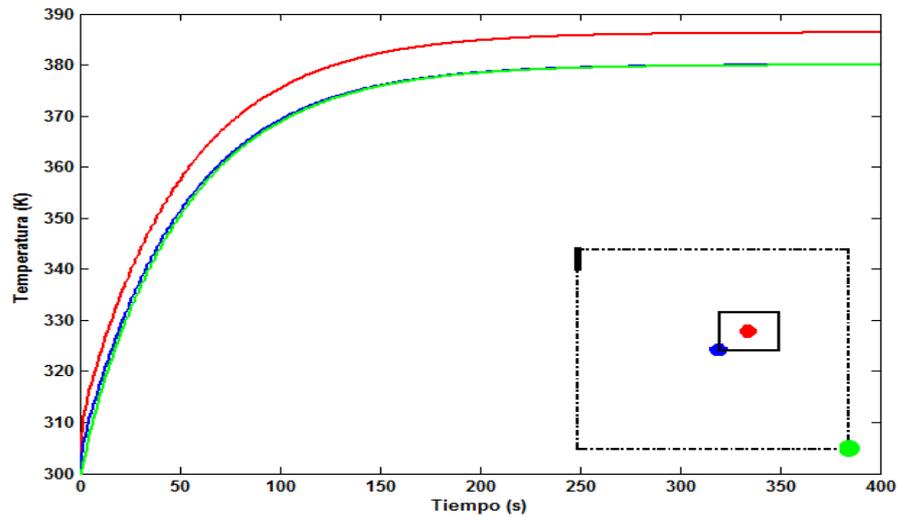


Figura 4.14: Evolución de la temperatura en 3 nodos de la placa

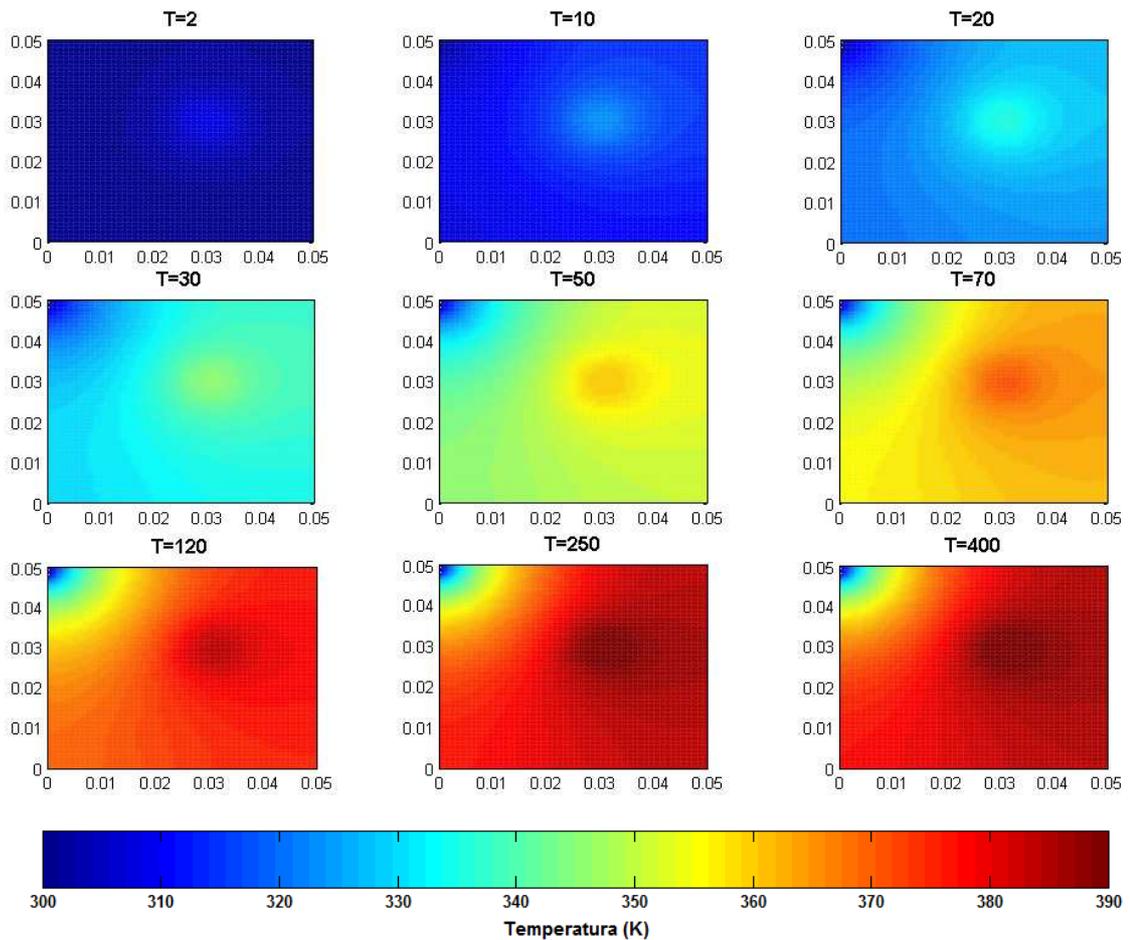


Figura 4.15: Vista superior de la difusión de calor en la placa

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

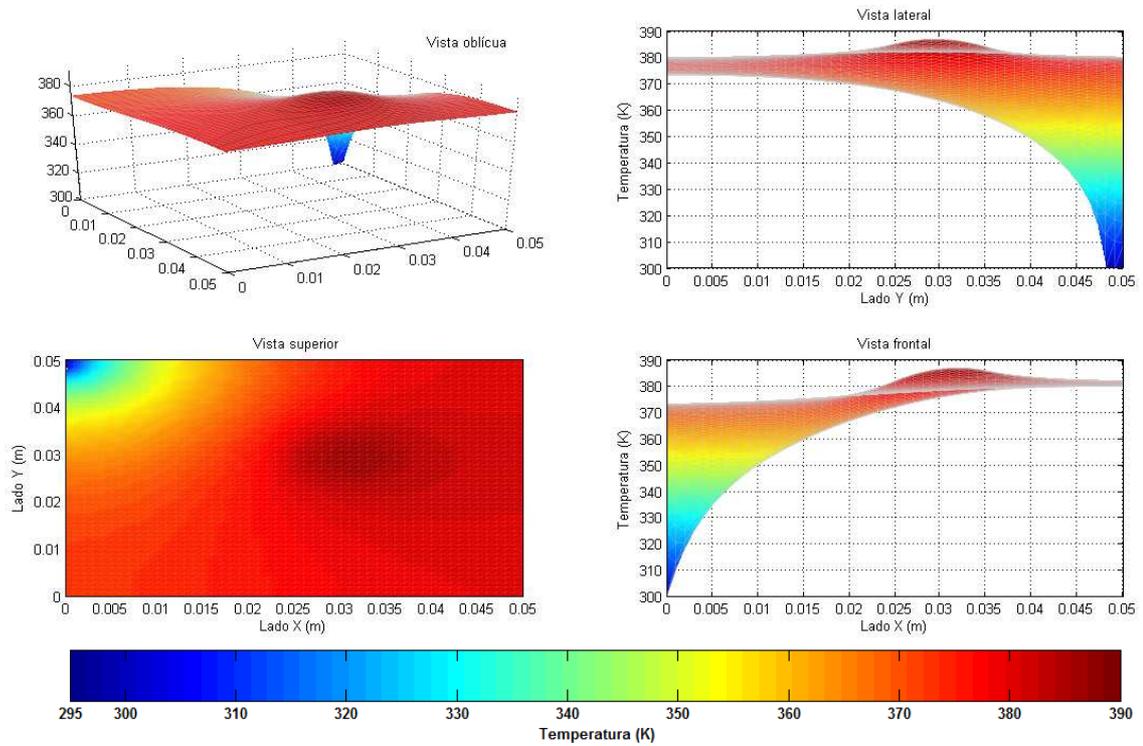
Considerando que casi toda la frontera es de Neumann, y los flujos de disipación en los bordes son pequeños, no resulta sorprendente que la temperatura alcance niveles muy altos, con un pico de temperatura en el centro del generador de $386,73K$.

Además, la presencia de la pequeña frontera de Dirichlet, altera la distribución de temperatura en esa región de la placa, forzándola a una variación brusca y no natural. Por ello, la solución que puede tenerse en cuenta para el análisis, es la que se observa en regiones alejadas de la frontera de Dirichlet.

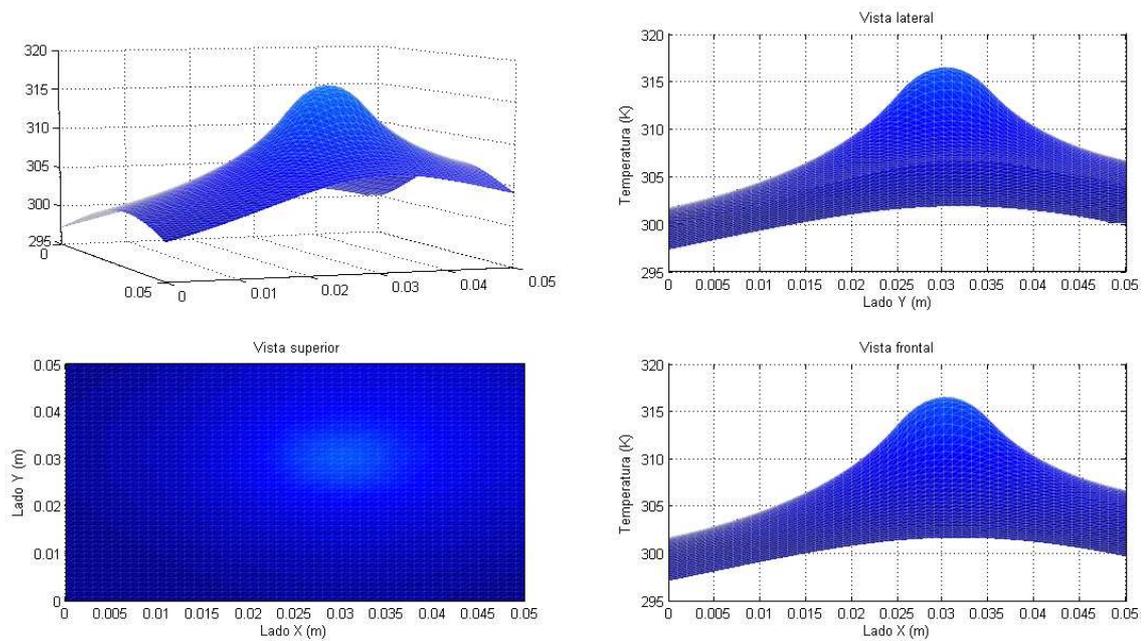
Se considera ahora el mismo CASO 3, pero aumentando el flujo de disipación de (-10) a (-100). Se espera un descenso considerable de la temperatura, aunque lo que se está haciendo básicamente, es un controlador de prueba-error. En las Figuras 4.16a y 4.16b, se comparan ambos estados estacionarios. Claramente, el aumento del flujo de disipación permite mantener la temperatura, en cierto rango en torno de la del ambiente, en perjuicio de un mayor gasto energético.

En conclusión, cuando el objetivo es el control de temperatura, la simulación es físicamente más coherente evitando las fronteras de Dirichlet. Además, la implementación de un controlador óptimo de temperatura, donde el flujo de disipación es la variable de control, permitiría obtener resultados deseados de temperatura, con el menor uso de energía posible. Esto se verá en la siguiente sección.

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN



(a) Flujo (-10)



(b) Flujo (-100)

Figura 4.16: Distribución de temperaturas en estado estacionario

4.3. Control óptimo de temperatura

En esta sección se presentarán los resultados numéricos relativos a algunos casos de control de temperatura en la placa.

La placa modelo a ser utilizada es la misma que en la sección anterior, cuadrada con 5cm de lado, un componente generador de calor cuadrado con 2cm de lado y una densidad de calor generado de $4 \times 10^5 \text{W}/\text{m}^2$. Esto equivale a un chip disipando 160W . Se reitera que podría considerarse cualquier distribución de componentes generadores de calor, pues corresponden a variables de entrada para el simulador.

Como ilustración del proceso de enfriamiento, se considera una condición inicial de temperatura de 360K , con el objetivo de enfriar la placa hasta los 330K . Debido a los altos requerimientos de memoria del Sistema Saddle-Point y su resolución por el método directo, el refinamiento de la malla se reducirá a 10×10 .

En el caso de control, la unicidad de la solución para la ecuación de Calor no exige la presencia de una frontera de Dirichlet de medida positiva. La unicidad está garantizada por el método de optimización empleado. Por ello, a partir de ahora toda la frontera será de Neumann.

4.3.1. Ajuste del controlador

Los valores de r y q , corresponden a las condiciones de performance que se desean satisfacer. El valor de r penaliza el gasto energético, en cambio el valor de q , penaliza el error entre la solución obtenida y la deseada. La razón r/q establece la relación de compromiso entre el gasto de energía y la rapidez y eficiencia con que la temperatura se aproxima a la de la solución objetivo. Se variará el cociente r/q , a partir de un caso básico, para observar el comportamiento del controlador.

A continuación se detallan las variables de entrada para el ajuste:

Tabla 4.4: Variables de entrada para el ajuste del controlador

Tiempo [s] y discretización	$T=variable$ $L=50$
Ajuste del controlador	$r=1$ $q=variable$
Condición inicial de temperatura [K]	inicial = 360
Condición objetivo de temperatura [K]	objetivo = 330
Dimensiones de la placa [m]	$a=0.05$ $b=0.05$
Generadores de calor [m]	$F(1,:) = 0.05 * [0.5, 0.5, 0.7, 0.7]$
Densidad de calor generado [W/m^2]	$f(1) = 400000$
Refinamiento de la malla	$n1=10$ $n2=10$

Para analizar el comportamiento del controlador respecto al ajuste, se consideran cuatro valores distintos para el cociente r/q .

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

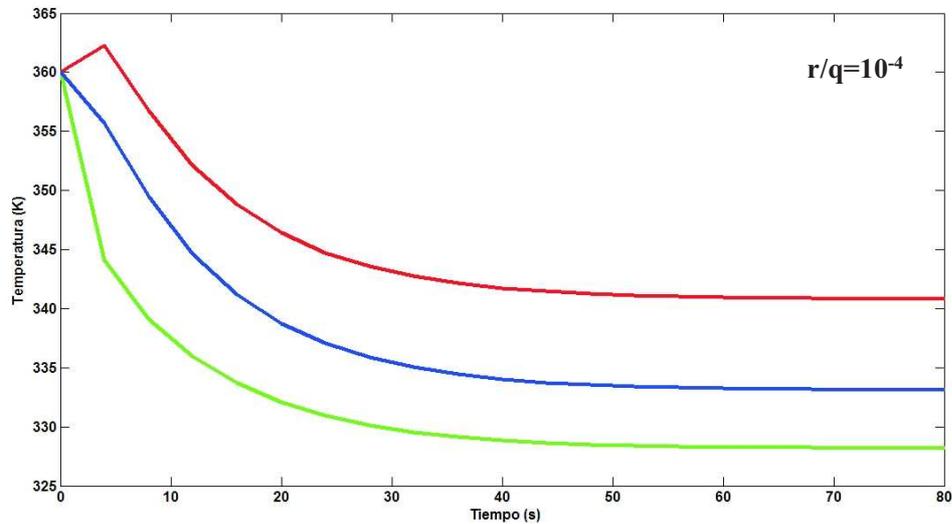


Figura 4.17: Ajuste del controlador: $r/q = 10^{-4}$

Para este valor de r/q , el tiempo necesario para llegar al estado estable (en este caso con precisión de $0,1K$) es de aproximadamente $70s$. Tal como en la sección anterior, las curvas de temperatura corresponden a los siguientes nodos en la placa:

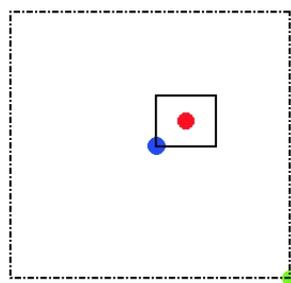


Figura 4.18: Nodos para medición de temperatura en la placa

La respuesta del controlador no es oscilatoria y si bien no alcanza exactamente la solución deseada, representa una curva de enfriamiento razonable.

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

A continuación se compara el caso $r/q = 10^{-5}$ con el anterior, tras un apropiado cambio de escala:

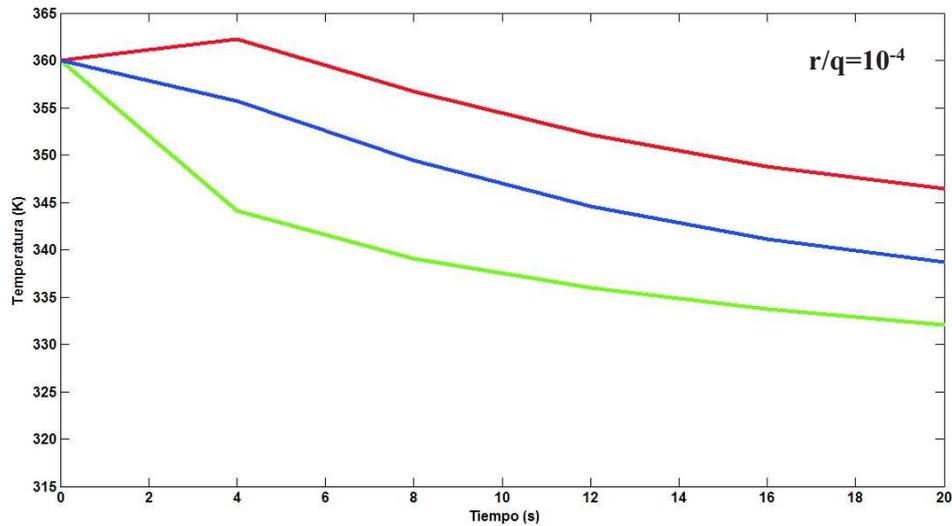


Figura 4.19: Ajuste del controlador: $r/q = 10^{-4}$

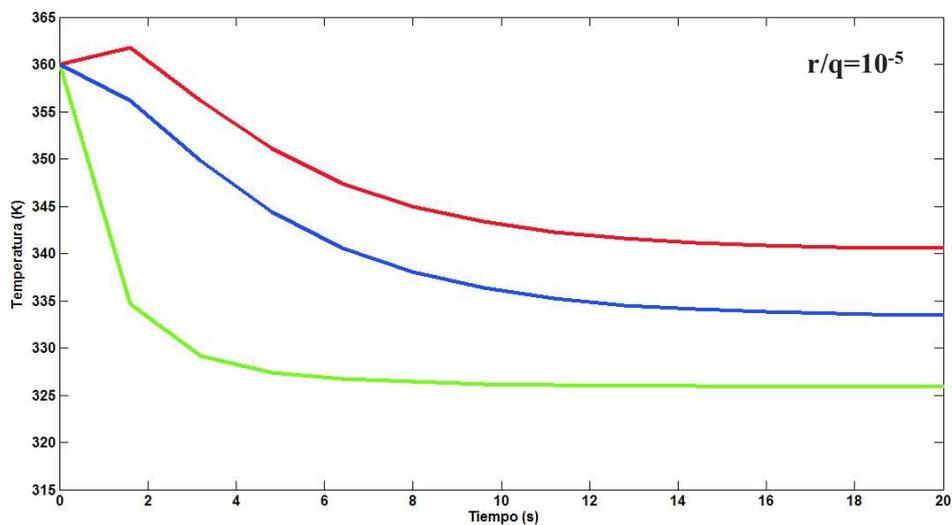


Figura 4.20: Ajuste del controlador: $r/q = 10^{-5}$

El tiempo de establecimiento se redujo drásticamente a unos 25s y las curvas de enfriamiento están ligeramente más cerca de los 330K.

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

Exigiendo aún más al controlador, se consideran los dos casos siguientes, respetando las escalas anteriores para poder hacer una comparación coherente:

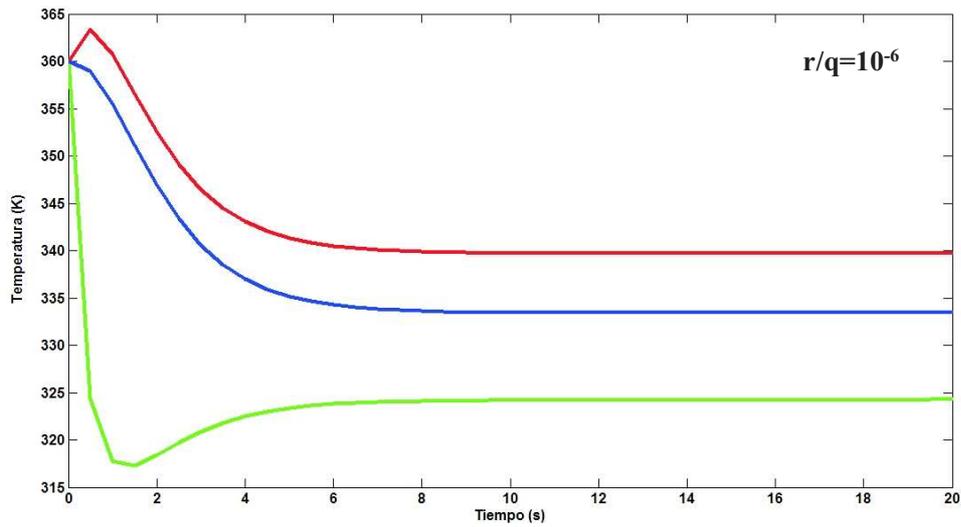


Figura 4.21: Ajuste del controlador: $r/q = 10^{-6}$

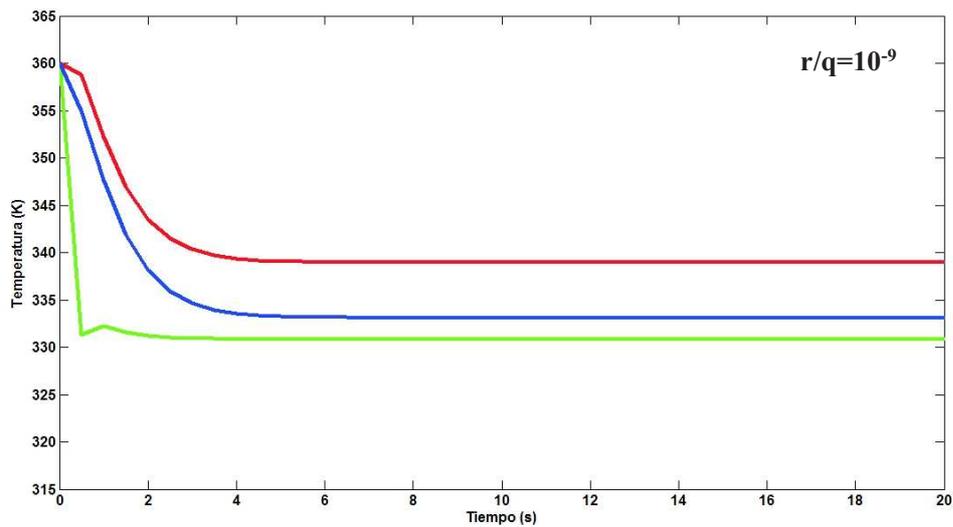


Figura 4.22: Ajuste del controlador: $r/q = 10^{-9}$

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

Los tiempos de establecimiento para estos dos casos, son de aproximadamente $10s$ y $7s$, respectivamente. A partir del caso $r/q = 10^{-6}$ se observa un comportamiento sobreamortiguado en la temperatura de un extremo de la placa. Esto se va moderando y prácticamente se amortigua en el caso $r/q = 10^{-9}$.

A juzgar por las curvas de temperatura de las 4 figuras anteriores, puede concluirse que la mayor inversión energética se realiza en los primeros instantes de la acción del controlador. No obstante, nótese que en todos los casos, las curvas correspondientes al centro del generador de calor (rojo) y el centro de la placa (azul) poseen una variación más lenta y suave que la curva correspondiente al extremo de la placa (verde). Esto se explica con el hecho de que el controlador diseñado posee como variable de control al flujo de calor en las fronteras de la placa, con lo cual sus efectos no son inmediatos en los nodos ubicados en la región interior de la placa.

Además, a medida que el cociente r/q va disminuyendo, se observa que la penalización del error (esto es, la diferencia entre la temperatura obtenida y la deseada) va cobrando mayor importancia. En otras palabras, el controlador está exigiendo que la solución se acerque lo más rápido posible a la temperatura deseada, en perjuicio quizás de un mayor gasto energético. Esto significa que el controlador óptimo está actuando de acuerdo a lo diseñado.

Seguidamente se presentan dos casos extremos para el controlador implementado.

4.3.2. CASO A

A continuación se detallan las variables de entrada para este caso:

Tabla 4.5: Variables de entrada para el CASO A

Tiempo [<i>s</i>] y discretización	T=25	L=50
Ajuste del controlador	r=1	q=10 ¹⁰
Condición inicial de temperatura [<i>K</i>]	inicial = 390	
Condición objetivo de temperatura [<i>K</i>]	objetivo = 300	
Dimensiones de la placa [<i>m</i>]	a=0.05	b=0.05
Generadores de calor [<i>m</i>]	F(1,:)=0.05*[0.5,0.5,0.7,0.7]	
Densidad de calor generado [<i>W/m</i> ²]	f(1)=400000	
Refinamiento de la malla	n1=10	n2=10

Nótese que la condición inicial de temperatura fue incrementada hasta los 390*K*, mientras que la temperatura deseada es ahora de 300*K*. Esto pone a prueba al controlador, puesto que la brecha del proceso de enfriamiento es más amplia.

Además, $r/q = 10^{-10}$, lo que en base a las conclusiones de la sección anterior, exigirá una respuesta aún más rápida al controlador para llegar a la temperatura deseada.

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

En la siguiente figura se presentan los resultados obtenidos para el caso A, en tres nodos de la placa:

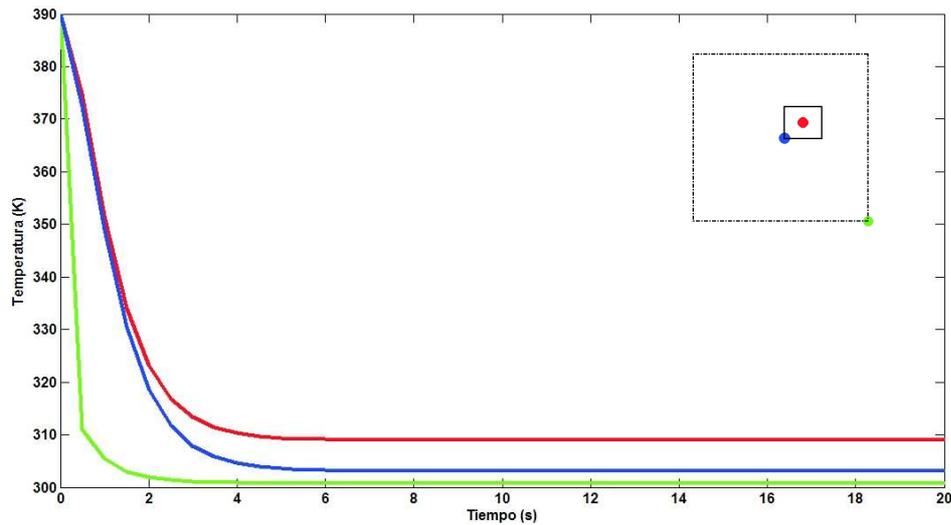


Figura 4.23: Evolución de temperaturas en tres nodos para el Caso A de control

Se observa, que la respuesta llega al estado estable en un tiempo menor a 5 segundos. Del punto de vista puramente teórico, la respuesta del controlador es excelente.

Sin embargo, esta variación brusca de temperatura en un lapso de tiempo reducido, utiliza una cantidad abismal de energía, lo cual no sólo requeriría de una implementación física compleja sino que además la relación costo-beneficio sería poco rentable.

En la siguiente sección, de modo a enfatizar estas conclusiones, se presenta el mismo caso pero con el ajuste de controlador opuesto.

4.3.3. CASO B

A continuación se detallan las variables de entrada para este caso:

Tabla 4.6: Variables de entrada para el CASO B

Tiempo [<i>s</i>] y discretización	T=1600	L=50
Ajuste del controlador	r=1	q=10 ²
Condición inicial de temperatura [<i>K</i>]	inicial = 390	
Condición objetivo de temperatura [<i>K</i>]	objetivo = 300	
Dimensiones de la placa [<i>m</i>]	a=0.05	b=0.05
Generadores de calor [<i>m</i>]	F(1,:)=0.05*[0.5,0.5,0.7,0.7]	
Densidad de calor generado [<i>W/m</i> ²]	f(1)=400000	
Refinamiento de la malla	n1=10	n2=10

El caso B se diferencia del caso A, únicamente en el ajuste r/q y el tiempo de simulación considerado. Como el ajuste r/q ahora es de 10^{-2} , es decir, la penalización del error disminuyó notablemente, se espera que el controlador priorice el ahorro energético, teniendo como contrapartida una respuesta más lenta.

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

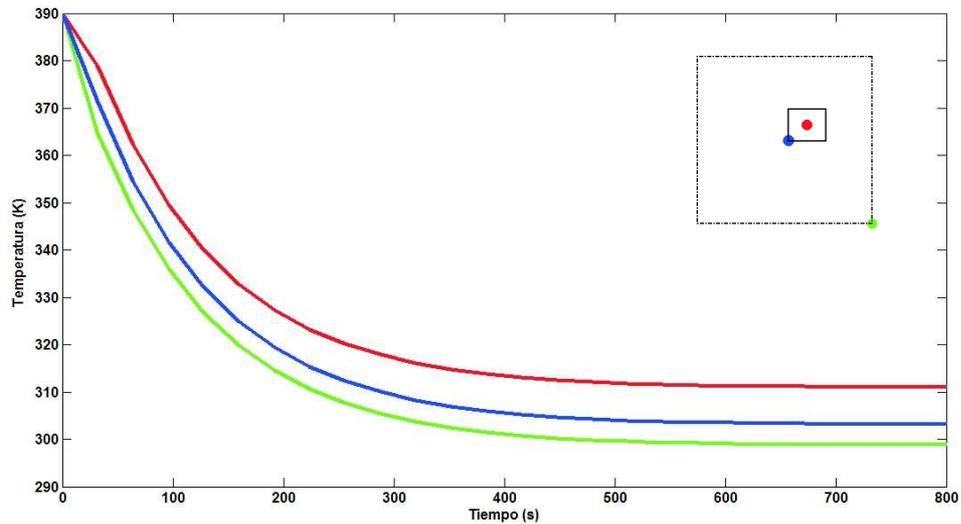


Figura 4.24: Evolución de temperaturas en tres nodos para el Caso B de control

Como se observa en la Figura 4.24 el controlador lleva a la solución al estado estable deseado en aproximadamente 10 minutos. Teniendo en cuenta los tiempos de operación de los circuitos, resulta ser un tiempo razonable para una curva de enfriamiento.

Además, esto permite que la temperatura deseada sea alcanzada mediante un balance óptimo entre energía y tiempo de establecimiento, objetivo inicial de este trabajo.

4.4. Conclusiones finales y trabajos futuros

Se ha desarrollado un simulador 2D para la temperatura en una placa circuital homogénea, que permite variar la posición y el tamaño de las fuentes de calor. Además el simulador permite establecer las condiciones de frontera de Dirichlet y de Neumann. Esto permite el análisis cualitativo de la distribución de temperatura, estudiar la disipación mediante conducción del calor a los bordes y representa una herramienta fundamental para futuros trabajos de optimización en la ubicación espacial de los generadores de calor.

Del punto de vista del control, la frontera de Dirichlet carece de sentido, y en lo posible, se prefiere la de Neumann. Deben ser estudiadas otras condiciones de frontera, y condiciones de controlabilidad correspondientes.

El controlador óptimo diseñado e implementado, ajusta el flujo de calor en los bordes para obtener una temperatura deseada en la placa, minimizando un funcional cuadrático lineal. Este funcional representa una relación de compromiso entre la energía necesaria para enfriar la placa y la rapidez y eficiencia del controlador.

Los resultados numéricos muestran que la temperatura puede ser controlada eficientemente con la metodología propuesta y cualitativamente reproducen las curvas experimentales observadas en la literatura.

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

El refinamiento de la malla de elementos finitos es bajo, debido a las limitaciones de memoria. Esto puede ser mejorado, aumentando la disponibilidad de memoria y empleando métodos de resolución iterativos eficientes para el Sistema Saddle-Point. Los sistemas lineales obtenidos de la discretización de Galerkin, así como el sistema Saddle-Point son mal condicionados. Por ello, resulta necesario diseñar un preconditionador.

Una extensión natural de este trabajo, sería considerar el problema 3D, coeficientes discontinuos, casos no lineales, y control en estado estacionario.

ANEXO A

MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

Con el objetivo de no distraer la atención en el desarrollo de la tesis, se prefirió relegar los aspectos teóricos del método empleado para este Anexo. Aquí se detallan los fundamentos del Método de Elementos Finitos y algunos aspectos computacionales.

De modo a ofrecer un panorama más amplio, se ejemplifican algunas técnicas de aproximación de residuo ponderado, para luego optar por el método de Galerkin. Seguidamente se presentan los fundamentos de la formulación variacional o débil para un problema gobernado por una ecuación diferencial. Por último, se describe la discretización de Elementos Finitos de Galerkin usando aproximaciones lineales por partes. A pesar de que el presente trabajo tiene un abordaje bidimensional, a modo de facilitar el entendimiento del caso 2D, se desarrolla previamente la discretización de Galerkin para un caso 1D.

A.1. Métodos de residuo ponderado

Los métodos de residuo ponderado son usualmente utilizados para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales. Con el objeto de ilustrar el método, se considerará el siguiente problema 1D con condiciones de frontera de Dirichlet dadas:

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dx^2} - u = -x & \text{sobre } [0, 1], \\ u(0) = 0 & u(1) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

El primer paso consiste en elegir una función aproximante ϕ , de modo a escribir la solución aproximada como $\tilde{u} = a\phi$, donde a es una constante a ser determinada más adelante. Usualmente la solución aproximada \tilde{u} es distinta a la solución exacta. La función aproximante se escoge de forma que \tilde{u} satisfaga las condiciones de frontera (es decir, $\tilde{u}(0) = 0$ y $\tilde{u}(1) = 0$).

Para este ejemplo, se puede tomar la función aproximante $\phi = x(1 - x)$. Así, $\tilde{u} = ax(1 - x)$ será una solución aproximada para el problema (A.1). En general, la clave para obtener una buena aproximación depende de la elección adecuada de la función aproximante. No obstante, para el presente ejemplo se escogió una función aproximante sencilla, para ilustrar el método. Entonces se calcula el residuo R (error) substituyéndo \tilde{u} en la ecuación diferencial:

$$R = \frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2} - \tilde{u} + x = -2a - ax(1 - x) + x \quad (\text{A.2})$$

Como \tilde{u} en general es distinta a la solución exacta, el residuo R no se anula para todos los valores de x en el dominio. Nótese que R depende de la constante a .

El siguiente paso es determinar la constante a para que \tilde{u} aproxime de mejor manera a la solución exacta. Como en general no será posible obtener un error idénticamente nulo, se exigirá que por lo menos el residuo R sea ortogonal a cierto espacio de funciones. Con este objetivo, se elige una función test (o de ponderación) ω y se exige que

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

la media ponderada del residuo en el dominio se anule, es decir:

$$\int_0^1 \omega R dx = \int_0^1 \omega \left(\frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2} - \tilde{u} + x \right) dx = 0 \quad (\text{A.3})$$
$$\int_0^1 \omega (-2a - ax(1-x) + x) dx = 0$$

En otras palabras, el problema se reduce a calcular a de modo que el residuo R sea perpendicular a la función test ω escogida. Así, dado un conjunto de funciones test, por lo menos se logra restringir a R siendo ortogonal al espacio generado por ese conjunto de funciones test.

Por ello, la elección del espacio de funciones test resulta clave en los métodos de residuo ponderado. La solución aproximada resultante puede ser distinta dependiendo de esta elección. Algunos de los principales métodos de residuo ponderado son:

- **Método de Colocación:** Se escoge como función test a la función Delta de Dirac, es decir,

$$\omega = \delta(x - x_i)$$

donde el punto de muestreo x_i debe pertenecer al dominio $[0, 1]$. En resumen, el método de colocación sólo exige que R se anule en el punto x_i .

Tomando por ejemplo $x_i = 0,5$ y sustituyendo en la expresión (A.3), se obtiene

$a = 0,2222$. Por tanto, la solución aproximada con este método sería

$$\tilde{u} = 0,2222x(1-x).$$

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

- **Método de Mínimos Cuadrados:** la función test se determina a partir del residuo, tal que

$$\omega = \frac{dR}{da} \quad (\text{A.4})$$

Reemplazando (A.4) en (A.2), se obtiene $\omega = -2 - x(1 - x)$. Sustituyendo esta función test en (A.3), resulta $a = 0,2305$. Por tanto, $\tilde{u} = 0,2305x(1 - x)$.

- **Método de Galerkin:** La función test es igual a la función aproximante:

$$\omega = \phi$$

Para la función aproximante actual resulta $\omega = x(1 - x)$. Reemplazando en (A.3) se obtiene $a = 0,2272$, de modo que $\tilde{u} = 0,2272x(1 - x)$.

En la tabla siguiente se comparan las tres soluciones aproximadas obtenidas con la solución para $x = 0,5$:

Tabla A.1: Comparación de soluciones para (A.1) en $x = 0,5$

Solución exacta	Colocación	Mínimos Cuadrados	Galerkin
0.0566	0.0556	0.576	0.0568

Con el fin de mejorar el grado de aproximación de la solución, se puede considerar un espacio de aproximación de mayor dimensión, eligiendo más funciones aproximantes independientes.

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

En este ejemplo, considerando las funciones aproximantes $\phi_1 = x(1 - x)$ y $\phi_2 = x^2(1 - x)$, la solución aproximada se obtendría como una combinación lineal:

$$\tilde{u} = a_1x(1 - x) + a_2x^2(1 - x)$$

donde a_1, a_2 son constantes a ser determinadas. Calculando el residuo R para este caso se obtiene:

$$R = a_1(-2 - x + x^2) + a_2(2 - 6x - x^2 + x^3) + x$$

Para determinar adecuadamente las constantes a_1, a_2 y así obtener la solución aproximada deseada, se necesita un espacio de funciones test de igual dimensión que el espacio de aproximación. En la siguiente tabla se resumen los métodos para obtener las funciones test necesarias cuando el espacio de aproximación es n-dimensional.

Tabla A.2: Funciones test para los métodos de residuo ponderado [17]

Método	Descripción
Colocación	$\omega_i = \delta(x - x_i) \quad i = 1, 2, \dots, n$ <p>x_i pertenece al dominio de definición</p>
Mínimos Cuadrados	$\omega_i = \partial R / \partial a_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$ <p>donde a_i es el i-ésimo coeficiente indeterminado en \tilde{u}</p>
Galerkin	$\omega_i = \phi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$ <p>donde ϕ_i es la i-ésima función aproximante</p>

Utilizando la Tabla A.2 para el ejemplo actual, obtenemos las siguientes funciones test para según cada método:

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

Colocación: $\omega_1 = \delta(x - x_1)$, $\omega_2 = \delta(x - x_2)$

Mínimos Cuadrados: $\omega_1 = -2 - x + x^2$, $\omega_2 = 2 - 6x - x^2 + x^3$

Galerkin: $\omega_1 = x(1 - x)$, $\omega_2 = x^2(1 - x)$

Para el método de Colocación, x_1 y x_2 deben escogerse de modo que el residuo ponderado resultante (ecuación (A.3)) produzca dos ecuaciones independientes para determinar a_1 y a_2 de manera única.

El método de Mínimos Cuadrados conduce a un sistema $Ax = b$, donde A es una matriz simétrica, independientemente del espacio de aproximación escogido. Esto permite obtener a_1 y a_2 de manera única.

Cabe resaltar, que las matrices simétricas presentan una estructura muy ventajosa en comparación a otro tipo de matrices. Esto debido a que numerosos resultados del Álgebra Lineal pueden ser aplicados para resolver el sistema de ecuaciones asociado, mediante algoritmos numéricos más eficientes y menos costosos computacionalmente.

El método de Galerkin no conduce a una matriz simétrica cuando es aplicado a la ecuación (A.1). Sin embargo, podría hacerlo bajo ciertas condiciones, como se verá en las siguientes secciones.

A.2. Formulación débil

Consideremos una vez más el problema (A.1). La formulación (A.3), resuelta en la sección anterior se denomina *formulación fuerte* del método de residuo ponderado. La formulación fuerte, requiere evaluar la integral $\int_0^1 \omega(\partial^2 \tilde{u}/\partial x^2) dx$, donde aparece la derivada de mayor orden presente en la ecuación diferencial. Esta integral debe tener un valor finito no nulo para obtener una solución aproximada significativa. Esto exige que cada función aproximante sea dos veces diferenciable, y su segunda derivada no debe anularse idénticamente en el dominio.

Con el objetivo de disminuir los requerimientos para las funciones aproximantes en términos de diferenciabilidad, se aplica integración por partes a la formulación fuerte, obteniendo:

$$\int_0^1 \omega \left(\frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2} - \tilde{u} + x \right) dx = \int_0^1 \left(-\frac{d\omega}{dx} \frac{d\tilde{u}}{dx} - \omega \tilde{u} + \omega x \right) dx + \left[\omega \frac{d\tilde{u}}{dx} \right]_0^1 = 0 \quad (\text{A.5})$$

Como se observa en la ecuación (A.5), sólo se requiere la derivada de primer orden de las funciones aproximantes. Así las condiciones para las funciones aproximantes son menos estrictas en la ecuación (A.5). Por ello, esta formulación se denomina *formulación débil* (o *formulación variacional*).

La formulación débil tiene una ventaja para el método de Galerkin, en el cual las funciones test se obtienen directamente de las funciones aproximantes escogidas. Si la ecuación diferencial que rige el problema se basa en un operador autoadjunto (como de

hecho lo es el laplaciano)¹, el método de Galerkin aplicado a la formulación débil, resulta un sistema de ecuaciones, en términos de los coeficientes indeterminados de la función aproximante.

En el ejemplo (A.1), considerando la función aproximante $\phi = x(1-x)$ (donde $\tilde{u} = a\phi$) y usando el método de Galerkin en la formulación débil (ecuación (A.5)), se obtendría la misma solución que para la formulación fuerte. Sin embargo, escogiendo funciones aproximantes lineales por partes, podrá constatarse la ventaja de la formulación débil por sobre la fuerte.

A.3. Funciones aproximantes lineales por partes

Independientemente de si la formulación es débil o fuerte, la precisión de la solución aproximada depende fundamentalmente de la función aproximante elegida. Sin embargo, esta elección puede no ser fácil siendo que la solución exacta es desconocida. Esto se hace más evidente cuando se espera que esta solución exacta tenga una gran variación en el dominio del problema, el dominio tenga forma compleja 2D o 3D o el problema tenga condiciones de frontera complicadas. Una forma de superar estos problemas, es aproximar con funciones lineales por partes.

Considere las funciones lineales por partes definidas en un dominio 1D como:

¹Para más detalles consultar [17] y [18].

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

$$\phi_i(x) = \begin{cases} (x - x_{i-1})/h_i & \text{para } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ (x_{i+1} - x)/h_{i+1} & \text{para } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

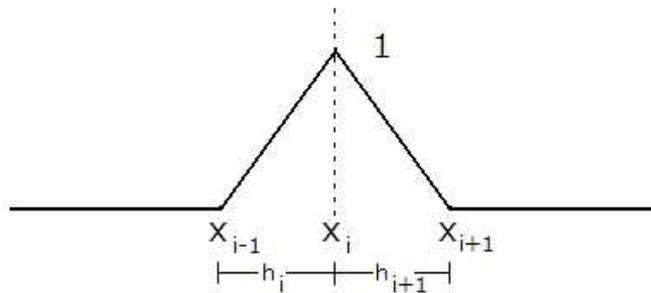


Figura A.1: Función lineal por partes para aproximación 1D

La función definida en la ecuación (A.6) se observa en la Figura A.1 y su uso como función aproximante se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo: Considere el problema (A.1) inicial, reescrito aquí:

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dx^2} - u = -x & \text{sobre } [0, 1], \\ u(0) = 0 & u(1) = 0 \end{cases}$$

Su formulación débil fue obtenida en la ecuación (A.5):

$$\int_0^1 \left(-\frac{d\omega}{dx} \frac{d\tilde{u}}{dx} - \omega \tilde{u} + \omega x \right) dx + \left[\omega \frac{d\tilde{u}}{dx} \right]_0^1 = 0$$

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

Se divide el dominio del problema en 3 subdominios y a cada nodo interior se asocia una función lineal por partes. Así, la solución aproximada es $\tilde{u} = a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x)$ en la cual a_1 y a_2 son constantes a ser determinadas y ϕ_1 y ϕ_2 se definen como:

$$\phi_1(x) = \begin{cases} 3x & \text{para } 0 \leq x \leq 1/3 \\ 2 - 3x & \text{para } 1/3 \leq x \leq 2/3 \\ 0 & \text{para } 2/3 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\phi_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leq x \leq 1/3 \\ 3x - 1 & \text{para } 1/3 \leq x \leq 2/3 \\ 3 - 3x & \text{para } 2/3 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

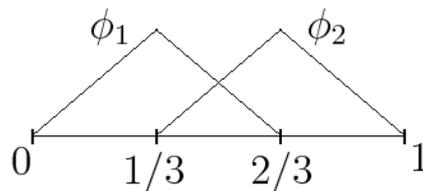


Figura A.2: Funciones aproximantes para el problema (A.1)

Las funciones ϕ_1 y ϕ_2 se ilustran en la Figura A.1. Es claro que puede considerarse un mayor número de subdominios y funciones para mejorar la precisión de la solución aproximada. La solución aproximada puede ser escrita como:

$$\tilde{u} = \begin{cases} a_1(3x) & \text{para } 0 \leq x \leq 1/3 \\ a_1(2 - 3x) + a_2(3x - 1) & \text{para } 1/3 \leq x \leq 2/3 \\ a_2(3 - 3x) & \text{para } 2/3 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

Usando el método de Galerkin, obtenemos las funciones test $\omega_1 = \phi_1$ y $\omega_2 = \phi_2$. Para obtener las constantes a_1 y a_2 , anulamos la media ponderada del residuo para cada función test:

$$\int_0^1 \left(-\frac{d\omega_1}{dx} \frac{d\tilde{u}}{dx} - \omega_1 \tilde{u} + \omega_1 x \right) dx = 0$$

$$\int_0^1 \left(-\frac{d\omega_2}{dx} \frac{d\tilde{u}}{dx} - \omega_2 \tilde{u} + \omega_2 x \right) dx = 0$$

donde $[\omega \frac{d\tilde{u}}{dx}]_0^1$ no se incluye, puesto que $\omega_1(0) = \omega_1(1) = \omega_2(0) = \omega_2(1)$. Reemplazando los respectivos valores de ω_1 , ω_2 , y \tilde{u} , resulta:

$$\int_0^{1/3} [-3(3a_1) - 3x(3a_1x) + x(3x)] dx +$$

$$+ \int_{1/3}^{2/3} [3(-3a_1 + 3a_2) - (2 - 3x)(2a_1 - 3a_1x + 3a_2x - a_2) + x(2 - 3x)] dx =$$

$$= -6,2222a_1 + 2,9444a_2 + 0,1111 = 0$$

$$\int_{1/3}^{2/3} [-3(-3a_1 + 3a_2) - (3x - 1)(2a_1 - 3a_1x + 3a_2x - a_2) + x(3x - 1)] dx +$$

$$+ \int_{2/3}^1 [3(-3a_2) - (3 - 3x)(3a_2 - 3a_2x) + x(3 - 3x)] dx =$$

$$= 2,9444a_1 - 6,2222a_2 + 0,2222 = 0$$

Observe que el sistema de ecuaciones a resolver es simétrico. Resolviendo el sistema, obtenemos la solución aproximada para el problema (A.1):

$$\tilde{u} = 0,0488\phi_1(x) + 0,0569\phi_2(x)$$

Si usamos (A.7) para la formulación fuerte (A.3), la solución aproximada podría no ser razonable, puesto que $\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}$ se anula en todo el dominio del problema.

A.4. Discretización de Galerkin

Como se vio en la sección previa, el uso de funciones lineales por partes para la función aproximante tiene ciertas ventajas. A medida que se aumenta el número de subdominios, se puede representar una función complicada usando una simple combinación lineal de funciones lineales por partes. Más adelante, los subdominios serán llamados *elementos finitos* y los puntos que pertenecen dos o más elementos (bajo ciertas condiciones) serán llamados nodos. De ahora en más, se omite el uso de la tilde $\tilde{}$ para indicar la solución aproximada.

Las soluciones de una ecuación diferencial, son funciones definidas en el dominio Ω del problema. Se considera que ellas pertenecen a un espacio de funciones de dimensión infinita, que será denotado por $H^1(\Omega)$, definido en el capítulo 2. Básicamente, en el método de Galerkin lo que se hace es aproximar este espacio de funciones, $H^1(\Omega)$, por un espacio de dimensión finita. Para ello, el método define una base de ese espacio, definiendo una función de tipo lineal para cada nodo en el dominio. A continuación se obtendrán estas funciones para los casos 1D y 2D.

A.4.1. Discretización de Galerkin 1D

El análisis será de tipo local, es decir, considerando un subdominio o elemento finito. El elemento tiene dos nodos, uno en cada extremo. A cada nodo, se asigna la coordenada correspondiente (x_i y x_{i+1}) y su variable nodal (u_i y u_{i+1}). La variable nodal es el valor de la solución que se espera en ese nodo. Suponemos entonces que la solución aproximada en ese elemento finito es dada por:

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

$$u = c_1x + c_2 \quad (\text{A.8})$$

Se pretende expresar la ecuación (A.8) en función de las variables nodales. Con este objeto, evaluamos u en $x = x_i$ y $x = x_{i+1}$, resultando:

$$\begin{aligned} u(x_i) &= c_1x_i + c_2 = u_i \\ u(x_{i+1}) &= c_1x_{i+1} + c_2 = u_{i+1} \end{aligned}$$

Resolviendo estas ecuaciones para c_1 y c_2 , se obtiene:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i} \\ c_2 &= \frac{u_i x_{i+1} - u_{i+1} x_i}{x_{i+1} - x_i} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Reemplazando las ecuaciones (A.9) en (A.8) y reordenando, se puede escribir:

$$u = H_i(x)u_i + H_{i+1}(x)u_{i+1} \quad (\text{A.10})$$

donde

$$\begin{aligned} H_i(x) &= \frac{x_{i+1} - x}{h_i} \\ H_{i+1}(x) &= \frac{x - x_i}{h_i} \\ h_i &= x_{i+1} - x_i \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

La ecuación (A.10) expresa la solución u en términos de las variables nodales y las funciones H_i se denominan "funciones de forma lineales"². Estas funciones se ilustran en la Figura A.3 y gozan de las siguientes propiedades elementales (para más detalles ver [19]):

1) (Propiedad de la función delta) La función de forma asociada al nodo i tiene valor 1 en el nodo i y se anula en los demás. Es decir,

$$H_i(x_i) = 1, \quad H_i(x_{i+1}) = 0, \quad H_{i+1}(x_i) = 0, \quad H_{i+1}(x_{i+1}) = 1$$

²En inglés: linear shape functions.

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

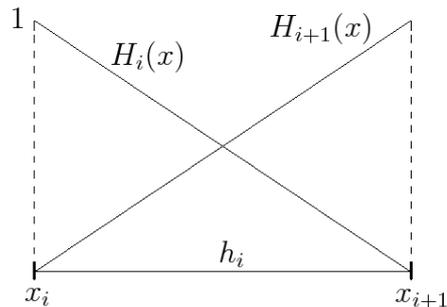


Figura A.3: Funciones de forma lineales para un elemento finito 1D

Esto establece que la solución u en cada nodo, será igual a la correspondiente variable nodal, esto es, $u(x_i) = u_i$ y $u(x_{i+1}) = u_{i+1}$.

2) (Propiedad de partición de unidad) La suma de todas las funciones de forma es 1, para cada punto del dominio:

$$\sum_{i=1}^2 H_i(x) = 1$$

Esto permite que soluciones uniformes puedan ser representadas dentro del elemento. Por ejemplo, si la solución es constante en el elemento, debe cumplirse $u = u_i = u_{i+1}$. Esta condición aplicada a la ecuación (A.10), resulta en:

$$u = [H_i(x) + H_{i+1}(x)] u_i = u_i$$

con lo cual se hace necesario, que se cumpla la propiedad 2.

De este modo, asociando a cada nodo del dominio la función de forma correspondiente, se obtiene un conjunto de funciones que constituyen la base del espacio de aproximación de Galerkin. Esto es consistente con la base del espacio de aproximación y del espacio test presentados en las secciones anteriores.

A.4.2. Discretización de Galerkin 2D

Los elementos finitos en 2D pueden tener innumerables formas. Una de las más simples es el elemento triangular lineal, que posee forma de triángulo y tres nodos en los vértices, como se ilustra en la Figura A.4. En este trabajo, serán considerados este tipo de elementos.

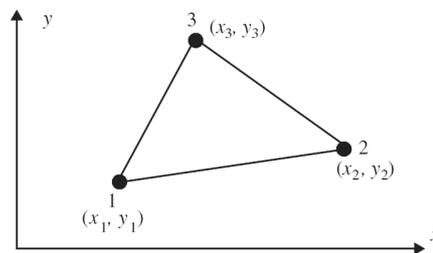


Figura A.4: Elemento triangular lineal para el caso 2D

La solución aproximada puede escribirse como:

$$u = a_1 + a_2x + a_3y \quad (\text{A.12})$$

o matricialmente como:

$$u = [1 \quad x \quad y] \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.13})$$

El objetivo es hallar tres funciones de forma $H_1(x, y)$, $H_2(x, y)$, $H_3(x, y)$, una para cada nodo, tales que:

$$u = H_1(x, y)u_1 + H_2(x, y)u_2 + H_3(x, y)u_3 \quad (\text{A.14})$$

donde u_1, u_2, u_3 son las variables nodales. Estas funciones van a generar el espacio de aproximación de Galerkin.

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

La función (A.12) debe representar a las variables nodales en los nodos correspondientes, por lo que sustituyendo los valores de x e y en cada nodo se obtiene:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.15})$$

Invirtiendo la matriz, reescribimos esta ecuación como

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2|A|} \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & x_3y_1 - x_1y_3 & x_1y_2 - x_2y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.16})$$

donde $|A|$ corresponde al área del elemento triangular lineal y viene dado por:

$$|A| = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}$$

Además, $|A|$ es positivo si la numeración local de los nodos del elemento es antihoraria y negativo en caso contrario. Por ello, es preferible que la dirección de la numeración local en cada elemento sea siempre la misma, de modo a evitar complicaciones posteriores.

Reemplazando la expresión (A.16) en la ecuación (A.13), es posible obtener la expresión (A.14), en la cual:

$$\begin{aligned} H_1(x, y) &= \frac{1}{2|A|} [(x_2y_3 - x_3y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] \\ H_2(x, y) &= \frac{1}{2|A|} [(x_3y_1 - x_1y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y] \\ H_3(x, y) &= \frac{1}{2|A|} [(x_1y_2 - x_2y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y] \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

Estas funciones de forma satisfacen las mismas propiedades enunciadas en la sección anterior, es decir:

$$H_i(x_j, y_j) = \delta_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^3 H_i(x, y) = 1$$

donde δ_{ij} es la función Delta de Kronecker.

Geoméricamente, las funciones de forma tienen de sombrero de altura unitaria, centrado en el nodo correspondiente, con valor nulo en los demás nodos y con interpolación lineal entre ellos, como se ilustra en la Figura A.5.

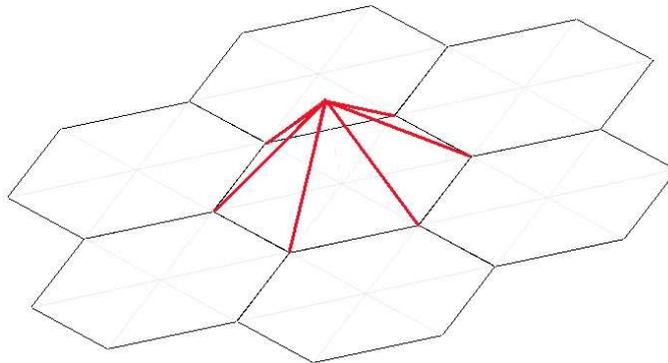


Figura A.5: Función de forma para el caso 2D

A efectos de facilitar el algoritmo computacional del método, es posible resumir las expresiones (A.17) como:

$$H_i(x, y) = \frac{1}{2|A|} \det \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_{i+1} & y_{i+1} \\ 1 & x_{i+2} & y_{i+2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.18})$$

donde los índices son tomados en módulo 3.

Seguidamente puede calcularse el gradiente de las funciones de forma, resultando:

$$\nabla H_i(x, y) = \frac{1}{2|A|} (y_{i+1} - y_{i+2}, x_{i+2} - y_{i+1}) \quad (\text{A.19})$$

donde $|A|$ es el área del elemento triangular.

Estos cálculos bastan para que el método de los elementos finitos pueda ser implementado computacionalmente, ensamblando las matrices necesarias para el efecto. En la siguiente sección se presenta un ejemplo para el ensamble de matrices.

A.5. Ensamble de matrices

El ensamble de matrices consiste en dos etapas: ensamble local y ensamble global. El primero se refiere a estudiar la influencia de cada elemento finito en forma independiente y el segundo se obtiene acoplando todos los ensambles locales.

Para ilustrar el método de ensamble, considere la matriz $\mathbf{A} = (A_{is})_{i,s \in I} \in \mathbb{R}^{\hat{m} \times \hat{m}}$, correspondiente a la solución de la ecuación de Calor obtenida en (2.28) como:

$$A_{is} = \int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_s dx$$

donde $\{\phi_i\}_{i=1}^{\hat{m}}$ es la base de elementos finitos, para los \hat{m} nodos libres.

Consideramos un dominio cuadrado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, y una triangularización regular de ejemplo con triángulos cerrados:

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

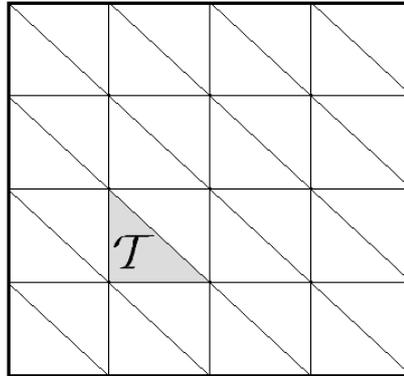


Figura A.6: Malla para discretización 2D

Entonces, la matriz A puede calcularse localmente en cada triángulo para luego ensamblarse globalmente. Con este objetivo, considere el elemento triangular \mathcal{T} , siendo $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ sus vértices y $\mathbf{A}_{\mathcal{T}} = (A_{\mathcal{T}jk}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, la matriz local para el elemento \mathcal{T} que se obtiene a continuación:

$$\begin{aligned} A_{\mathcal{T}jk} &= \int_{\mathcal{T}} \nabla H_j \cdot (\nabla H_k)^T dx \\ &= \frac{|A|}{(2|A|)^2} (y_{j+1} - y_{j+2}, x_{j+2} - y_{j+1}) \cdot \begin{pmatrix} y_{k+1} - y_{k+2} \\ x_{k+2} - y_{k+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Después de algunas manipulaciones algebraicas, puede resumirse el cálculo de esta matriz local de la siguiente manera [13]:

$$\mathbf{A}_{\mathcal{T}} = \frac{A}{2} G G^T$$

donde la matriz G viene dada por:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

lo que facilita la implementación computacional del método.

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

Suponiendo que toda la frontera posee condiciones de Dirichlet nulas, basta calcular la solución en los 9 nodos interiores. Para el ensamble global, es necesario establecer una numeración, de forma arbitraria.

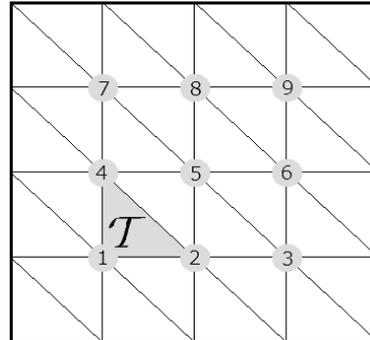


Figura A.7: Numeración de nodos para malla 2D

Considerando la numeración local del elemento \mathcal{T} como 1 – 2 – 4, pueden distribuirse los valores de la matriz local $\mathbf{A}_{\mathcal{T}}$ en la matriz global \mathbf{A} de la siguiente manera:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{\mathcal{T}_{11}} & A_{\mathcal{T}_{12}} & 0 & A_{\mathcal{T}_{13}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{\mathcal{T}_{21}} & A_{\mathcal{T}_{22}} & 0 & A_{\mathcal{T}_{23}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{\mathcal{T}_{31}} & A_{\mathcal{T}_{32}} & 0 & A_{\mathcal{T}_{33}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Este proceso se repite para cada elemento, sumando sus componentes en las correspondientes de la matriz global.

ANEXO B

PRESENTACIONES A NIVEL INTERNACIONAL

Durante el proceso de elaboración de este trabajo, sus fundamentos, alcances y resultados han sido compartidos con estudiantes de maestría, doctorado y profesores investigadores extranjeros de áreas afines. Se agradece a Markus Sarkis, PhD. y Juan Galvis, PhD. por sus valiosas críticas.

Además, teniendo resultados parciales en la investigación, el trabajo fue remitido y aceptado para ser presentado en el *XXX Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC)*, que tuvo lugar en la ciudad de Florianópolis en setiembre del 2007. Para el mismo, se contó con el apoyo financiero de la FIUNA para cubrir los gastos de traslado y alojamiento. Los gastos adicionales fueron cubiertos con fondos asignados durante el 2007, por el Rectorado de la UNA para el Proyecto de Investigación titulado: "Simulación numérica de la disipación de calor en circuitos electrónicos vía métodos variacionales".

A continuación se encuentran el resumen publicado y una versión reducida del póster presentado en el CNMAC 2007, que será donado a la FIUNA:

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

Controle ótimo de fronteira para o esfriamento de circuitos

Carlos E. Sauer* **Horacio Feliciángeli**

Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Asunción,
Campus Universitario - San Lorenzo, Paraguay
E-mail: sauer@citec.ing.una.py , hfelic@sce.cnc.una.py,

Christian E. Schaerer

Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA
22460-320, Río de Janeiro, RJ
E-mail: cschaer@fluidimpa.br.

RESUMO

Com o avanço da microeletrônica, cresce a necessidade de conectar em um espaço cada vez menor um número maior de componentes. Isto aumenta significativamente a dissipação de potência e ocasiona falhas nos circuitos por fatores térmicos.

Este trabalho aborda o controle da distribuição da temperatura em uma placa de circuito com fontes internas de calor. Para a obtenção das equações constitutivas, considerando um problema bidimensional, fez-se uso de uma equação diferencial parcial parabólica com coeficientes descontínuos. Uma das bordas da placa está sujeita às condições de Neumann (variáveis de controle), modelando o mecanismo de dissipação de calor.

As equações constitutivas são discretizadas no espaço usando o método dos elementos finitos clássico, já o esquema de Euler retroativo é usado para a discretização temporal. Isto resulta em um sistema linear algébrico (equações de estado) de grande porte que é parametrizado pelas variáveis de controle. As incógnitas, que são as variáveis de estado, representam a temperatura nos pontos da placa.

Para projetar o controlador, definimos um problema de minimização com restrições, associando uma função de custo quadrático linear às variáveis de controle e considerando como restrições as equações de estado. Aplicando as condições de otimalidade se obtém um sistema

algébrico de equações do tipo *Saddle-Point* com variáveis primais (estado), duais e de controle. Os resultados numéricos mostram que a temperatura pode ser controlada eficazmente no circuito e estão em concordância com os resultados experimentais encontrados na literatura.

Referências

- [1] J. Albery, C. Carstensen, S. Funken, Remarks around 50 lines of Matlab: short finite element implementation, *Numerical Algorithms*, 20 (1999) 117 - 137
- [2] M. Janicki, A. Napieralski, Modelling electronic circuit radiation cooling using analytical thermal model, *Microelectronics Journal*, 31 (2000) 781 - 785
- [3] J. L. Lions, "Optimal control of systems governed by partial differential equations", Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.
- [4] T. P. Mathew and M. Sarkis and C. E. Schaerer, Analysis of block matrix preconditioners for elliptic optimal control problems, *Numer. Linear Algebra Appl.*, 14 (2007) 257 - 279.

*Projeto de Iniciação Científica, financiado pelo Projeto No. FI/02/07, UNA.

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN



NATIONAL UNIVERSITY OF ASUNCION

OPTIMAL BOUNDARY CONTROL FOR COOLING ELECTRONIC CIRCUITS

Carlos E. Sauer¹, Horacio Feliciangelli¹ and Christian E. Schaefer²

¹Facultad de Ingeniería - Universidad Nacional de Asunción
Campus Universitario, San Lorenzo, Paraguay. P.O.Box: 750 (St.),
Email: sauer@opt.una.py, hfelic@ice.una.py
²Facultad de Posgrado - Universidad Nacional de Asunción,
Campus Universitario, San Lorenzo, Paraguay. P.O.Box: 2111 (St.),
Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA,
Estrada Dona Castorina 110, 22460-320, RJ, Brasil
Email: cschae@post.una.py, cschae@impa.br

Abstract

We consider the optimal cooling of an electronic circuit subject to heating internal sources. The constitutive equations are obtained modeling the circuit as a 2D parabolic partial differential equation. The Neumann boundary condition (control variable) model the electromechanical cooler system. The spatial discretization is obtained using a standard finite element method while the temporal discretization is obtained by the backward Euler method. The discretization results in a large algebraic linear system (state equations) parameterized by the control variable where the unknown is the temperature in the circuit.

To design a controller, we define a constrained minimization problem where a linear quadratic cost function is associated to the state and control variables, and the restrictions are given by the state equations. This minimization with constraint problem yields a large algebraic indefinite saddle point system in the state, control and dual variables. Preliminary results show that the temperature in the circuit can be efficiently controlled.

Model Problem

Let t_0, t_f denote a time interval, let $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ be a polygonal domain and let $z(t, x)$ denote the temperature at each point (t, x) . The model of heat exchange in solids based on Fourier law of conduction and energy balance for a unitary volume can be expressed as

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\alpha}{\lambda} \Delta z = \frac{\alpha}{\lambda} f \quad \text{in } t_0, t_f, \quad (1)$$

subject to

$$\begin{aligned} z &= t, x & u &= t, x & \text{on } t_0, t_f, \\ z &= t, x & g &= t, x & \text{on } t_0, t_f, \\ z &= t_0, x & h &= x & \text{on } \Omega, \end{aligned} \quad (2)$$

where the function $f(t, x)$ represents the nodal heat source at the interior of the circuit, α is the thermal diffusion coefficient and λ is the thermal transfer coefficient. In a first approach we make some simplifications in the model problem: a) the circuit is a bidimensional object, b) we neglect the effects of the radiation and convection for the temperature in the process, and c) we consider the circuit as an isotropic material. As result, the equation (1) reduces to:

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{1}{\lambda} \Delta z = \frac{1}{\lambda} f \quad \text{in } t_0, t_f, \quad (3)$$

subject to the initial and boundary conditions (2). By simplicity, we consider g as a constant.

The Variational Constitutive Equations

We consider $g \in L^2(\Omega)$. Let Z denote the space $Z = H_0^1(\Omega) \times L^2(t_0, t_f; Z)$ and $\tilde{Z} = L^2(t_0, t_f; Z)$, then the weak formulation of (3) is given by:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{dz}{dt} dx = \int_{\Omega} dx \quad u \quad ds \quad \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} dx, \quad (4)$$

To discretize the equation (4), we choose a uniform triangulation \mathcal{T}_h of the domain Ω and employ a P1 conforming finite element space $Z_h \subset Z$ for z , and the Po finite element space $U_h \subset U$ for approximating u . Therefore, we obtain:

$$\begin{aligned} M \frac{dz}{dt} &= A z - B v - \bar{b}, \quad t \in t_0, t_f, \\ z(t_0) &= z_0, \end{aligned} \quad (5)$$

where $\bar{z} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{v} \in \mathbb{R}^m$, and $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$ are vectors that represent the state, the control variables, and the heat source. The matrices $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ and $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ are obtained by the Galerkin method. The matrix M is a symmetric positive definite mass matrix and the matrix A is the discrete Laplacian. The matrix B is the input matrix and it is not necessarily full rank.

Control Design

We define a performance functional and a target temperature function. The controller is chosen in order to force that the solution of the equation (5) minimize the performance functional and behave in the way specified by the target function.

The target function is denoted by \bar{z} and the performance functional is defined as:

$$J(\bar{z}, \bar{v}) = \int_{t_0}^{t_f} \bar{z}^T(t) \bar{z}(t) + Q \bar{z}^T(t) \bar{z}(t) dt + \bar{v}^T R \bar{v}(t) dt, \quad (6)$$

where $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ is symmetric positive definite and $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is symmetric positive semi-definite. The optimal control for the equation (5) seeks to find a controller \bar{v} that minimize the performance functional (6), i.e.

$$J(\bar{z}, \bar{v}) \min_{\bar{v}} J(\bar{z}, \bar{v}), \quad (7)$$

where the constrain set consists of the set \bar{z}, \bar{v} satisfying the equation (5).

Time Discretization

We discretize the time domain using $(l-1)$ interior grid points so that the time step is $(t_i - t_{i-1})/l$ and we assume that the discrete controller \bar{v} is constant in each time interval. Using a Backward-Euler-scheme, a stable discretization of the equation (5) can be written as:

$$(M - \Delta t) z_i = M z_{i-1} - \Delta t (B v_i - b_i), \quad i = 0, 1, \dots, l-1, \quad (8)$$

where z_i, v_i and b_i represent the state and the control variables, and the forcing term at the i time interval. We arrange the equation (8) in a matrix form as:

$$E z = N u + f, \quad (9)$$

Accordingly, the functional (6) is discretized in time, therefore the control problem (7) is transformed in a discrete optimization problem, as follows:

$$\min_{z, z^+, u} z - z^+ + M z - z^+ + u^T G u \quad (10)$$

$$\text{subject to } E z = N u + f.$$

The Saddle Point System

In the minimization with constraint problem (10), we use a Lagrange multiplier to satisfy the constraints. This yields the symmetric indefinite linear system:

$$\begin{aligned} M & & E^T & z & M z^+ \\ & G & N^T & u & 0 \\ E & N & & p & f \end{aligned} \quad (11)$$

To solve the system (11) a direct method is used (this is a first approach). On the other hand, the coefficient matrix of system (11) (matrix H) is symmetric but indefinite and illconditioned, then the MINRES can be used if a preconditioner is implemented. This is due to the fact that H is ill conditioned (the matrices E and E' are illconditioned [3]).

Numerical Experiments

We consider the numerical solution of:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} &= f & \text{in } t_0, t_f, \\ z &= t, x & u &= t, x & \text{on } t_0, t_f, \\ z &= t_0, x & h &= x & \text{on } \Omega, \end{aligned}$$

where $0.1 \leq t \leq 1$. The target function is chosen as $z^+ = 1$.

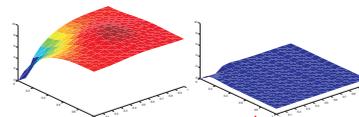


Figure 1: (a) Temperature distribution at $t=1$ without controller. (b) Temperature with the controller.

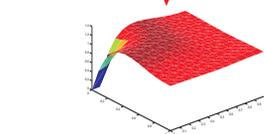


Figure 2: Temperature distribution at $t=1$ using u^* .

The solution follows the target function. The performance functional must be adjusted to avoid a possible boundary layer in the solution. See Figure 3 below.

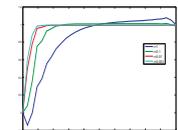


Figure 3: Evolution of the controlled temperature as a function of t .

Concluding Remarks

The results show that the temperature can be controlled with the methodology proposed, when the Neumann boundary are large in comparison with the Dirichlet boundary. Controllability conditions must be studied for different boundary conditions. Different norms in the functional can also be considered. It is necessary to design a preconditioner.

Acknowledgement

Research supported partially by Project No. F2/02/07, UNIA. Authors acknowledge the financial support given by the F2/UNIA.

References

- [1] Janicki, M., Nagendran, A., 2000. Modeling electronic circuit radiation cooling using analytical thermal model. *Microelectronics Journal*, 33, 785-795.
- [2] Alberty, J., Carstensen, C., Finken, S., 1999. Remarks around 50 lines of Matlab: short finite element implementation. *Numerical Algorithms*, 20, 111-137.
- [3] Schaefer, C., Bhatnagar, T., Sankar, M., 2007. Block iterative methods for optimal control of parabolic equations. In *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, LNCS 4395, pp. 465-465.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Y. Çengel. *“Heat transfer: A practical approach”*, 2nd Ed, McGraw-Hill, (2003), 932 pags.
- [2] M. Janicki and A. Napieralski. *“Modelling electronic circuit radiation cooling using analytical thermal model”*. *Microelectronics Journal*, 31, (2000), 781–785.
- [3] R. Viswanath et al. *“Thermal Performance Challenges from Silicon to Systems, Microprocessor Packaging”*, *Intel Technology Journal*, Vol. 4 Issue 3 (August 2000)
- [4] International Technology Roadmap for Semiconductors, *“Assembly and Packaging”*, 2007 Edition and 2008 Update, 77 pags.
- [5] M. Janicki, G. De Mey and A. Napieralski. *“Transient thermal analysis of multilayered structures using Green’s functions”*, *Microelectronics Reliability Journal*, 42, (2002), 1059 – 1064.
- [6] M. Janicki, G. De Mey and A. Napieralski. *“Application of Green’s function for analysis of transient thermal states in electronic circuits”*. *Microelectronics Journal*, 33, (2002), 733–738.
- [7] D. Mallik et al. *“Advanced Package Technologies for High-Performance Systems”*, *Electronic Package Technology Development*, *Intel Technology Journal* Vol. 9 Issue 4 (November 2005)

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

- [8] Semiconductor Industry Association (SIA), *“The National Technology Roadmap for Semiconductors: Technologie Needs”*,(1997), 239 pags.
- [9] R.Hannemann, *“Thermal Control of Electronics: Perspectives and Prospects”*, Rohsenow Symposium on Future Trends in Heat Transfer, Massachusetts Institute of Technology (MIT) (2003)
- [10] A. Bejan, A. Kraus, *“Heat Transfer Handbook”*, WILEY (2003), 1480 pags.
- [11] International Technology Roadmap for Semiconductors: *“Modeling and Simulation”*, 2007 Edition 2008 Update, 41 pags.
- [12] C. Johnson, *“Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method”*,Cambridge University Press , (1987), 278 pags.
- [13] J. Albery, C. Carstensen and S. Funken. *“Remarks around 50 lines of Matlab: short finite element implementation”*, Numerical Algorithms, 20, (1999), 117–137.
- [14] E. Gonçalves, T. Mathew, M. Sarkis and C. E. Schaerer, *“A Robust Preconditioner for the Hessian System in Elliptic Optimal Control Problems”*, Lecture Notes in Computational Science and Engineering, Springer, 2007.
- [15] J. L. Lions. *“Optimal control of systems governed by partial differential equations”*, Springer - Verlag, (1971), 396 pags.
- [16] T. Mathew, C. Schaerer and M. Sarkis, *“Block Iterative methods for optimal control of parabolic equations”*. In: Lecture Notes in Computer Sciences. Springer. LNCS 4395, (2007), 452–465.

CIRCUITOS ELECTRÓNICOS 2D:
SIMULACIÓN, CONTROL Y REFRIGERACIÓN

- [17] Y. Kwon, H. Bang, *"The Finite Element Method using MATLAB"*, CRC Press, (1997),
519 pags.
- [18] L. Evans, *"Partial Differential Equations"*, American Mathematical Society, (1997),
662 pags.
- [19] G. Liu, S. Quek, *"The Finite Element Method: a practical course"*, Butterworth-
Heinemann, (2003), 348 pags.