

# **ELEMENTOS FINITOS ESTABILIZADOS VIA FUNCIONES DE LYAPUNOV**

**GUSTAVO ADOLFO GONZÁLEZ ARMOA**

Tesis presentada en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales,  
Universidad Nacional de Asunción, como requisito para la  
obtención del Grado de Magister en Matemática.

CIUDAD UNIVERSITARIA, SAN LORENZO - PARAGUAY

DICIEMBRE - 2009

# **ELEMENTOS FINITOS ESTABILIZADOS VIA FUNCIONES DE LYAPUNOV**

**GUSTAVO ADOLFO GONZÁLEZ ARMOA**

Orientador: Prof. D.Sc. **CHRISTIAN EMILIO SCHAEERER**

Tesis presentada en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales,  
Universidad Nacional de Asunción, como requisito para la  
obtención del Grado de Magister en Matemática.

**CIUDAD UNIVERSITARIA, SAN LORENZO - PARAGUAY**

**DICIEMBRE - 2009**

Datos Internacionales de la Catalogación en la Publicación del (CIP)  
De la Biblioteca e internet de la FaCEN, UNA

González Armoa, Gustavo Adolfo.

Elementos finitos estabilizados vía funciones de Lyapunov / Gustavo Adolfo  
González Armoa. - San Lorenzo, 2009  
41 p.: il., -- cm.

Incluye referencias bibliográficas

Tesis (Magíster en Matemática). - Universidad Nacional de Asunción, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Escuela de Posgraduación Académica, 2009.

1. Ecuaciones diferenciales. 2. Elementos finitos 3. Matemática 4. Vectores 5. Función de Lyapunov 6. Tesis y disertaciones académicas. I. Título.

CDD 515.35

# **ELEMENTOS FINITOS ESTABILIZADOS VIA FUNCIONES DE LYAPUNOV**

**GUSTAVO ADOLFO GONZÁLEZ ARMOA**

Aprobado en fecha 15 de Diciembre de 2009

Prof. Dr. Oscar Humberto Bustos  
Prof. Dr. Carlos Olmos  
Prof. Dr. Herib Caballero  
Prof. M.Sc. Abel Bernal

FaMAF/UNC  
FaMAF/UNC  
UNA  
FP/UNA

Prof. D.Sc. Christian Emilio Schaerer  
Orientador

# ELEMENTOS FINITOS ESTABILIZADOS VIA FUNCIONES DE LYAPUNOV

Autor: GUSTAVO ADOLFO GONZÁLEZ ARMOA  
Orientador: Prof. Dr. CHRISTIAN EMILIO SCHAERER

## RESUMEN

El método de elementos finitos estándar de Galerkin para aproximar la ecuación de convección-difusión es numéricamente inestable, cuando el parámetro de difusión es pequeño. Algunos autores proponen la utilización de métodos de elementos finitos estabilizados como una forma de contornar este problema. De entre los métodos más citados, podemos destacar los métodos de Galerkin least-squares (GLS), streamline upwind Petrov-Galerkin (SUPG), multiscale, entre otros.

En este trabajo, proponemos una estabilización para el método de Galerkin usando la teoría de control. Específicamente, formulamos el método de elementos finitos como una ecuación de estados y usamos la teoría de funciones de Lyapunov para proponer una ley de control o realimentación. Los resultados numéricos demuestran que, con la utilización de funciones de Lyapunov, es posible hallar un controlador que estabilice el método de elementos finitos, mismo cuando el parámetro de difusión es relativamente pequeño. Los resultados fomentan y motivan la investigación en esta dirección.

# STABILIZED FINITE ELEMENTS USING LYAPUNOV FUNCTIONS

Author: GUSTAVO ADOLFO GONZÁLEZ ARMOA  
Advisor: Prof. Dr. CHRISTIAN EMILIO SCHAERER

## SUMMARY

The standard Galerkin finite element approximation of the convection- diffusion equation is known to be numerically unstable for small values of the diffusion parameter. Some authors propose the use of stabilized finite element methods to overcome this problem. Among the most cited methods, we can mention Galerkin least-squares (GLS), streamline upwind Petrov-Galerkin (SUPG) multiscale.

In this work, we propose a stabilization for the finite element method using the control theory. Specifically, we formulate the finite element method as a state equation and use the theory Lyapunov functions to propose a feedback control law. The numerical results show that using of Lyapunov functions, we can find a controller that stabilizes the finite element method, even when the diffusion parameter is relatively small. The results encourage and motivate the research in this direction.

*Caminante, son tus huellas  
el camino, y nada más;  
caminante, no hay camino,  
se hace camino al andar.*

*Al andar se hace el camino,  
y al volver la vista atrás  
se ve la senda que nunca  
se ha de volver a pisar.*

—**Antonio Machado**

*El mérito de la pintura yace  
en la exactitud de la reproducción.*

*La pintura es una ciencia  
y todas las ciencias se basan  
en las matemáticas.*

*Ninguna investigación humana  
puede llamarse científica  
a menos que siga su curso  
a través de la exposición  
y demostración matemática.*

*Nessuna humana investigazione  
si puo dimandare vera scienza  
séssa non passa per le  
matematiche dimostrazione.*

—**Leonardo da Vinci**

## **AGRADECIMIENTOS**

A Dios, por su inmenso amor.

Al Dr. Christian E. Schaerer por su amistad y ayuda invaluable para la realización de este trabajo, por su dedicación y empeño para contribuir en mi formación profesional, por la comprensión y confianza depositada en mi.

Al Laboratorio de Computación Científica (LCC), de la Facultad Politécnica.

A la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.

A mis padres, Francisco y Nilda por haberme enseñado que con perseverancia y fuerza de voluntad se puede llegar hasta los más grandes anhelos.

A mis hermanas, Lila, Blanca, Luz María y Yolanda.

A a mi segunda familia, a la familia Ruíz Díaz Genes por haberme dado su cariño, amor y apoyo incondicional.

A mi esposa Silvia, por su apoyo e incentivo constante.

A mis sobrinas y sobrinos.

A mis compañeros de Post-Graduación y amigos.

**“CON UN GRANDIOSO AMOR Y CARIÑO, POR QUE USTEDES SON EN GRAN MEDIDA MI FUERZA INTERIOR”.**

# ÍNDICE

	página
<b>1. INTRODUCCIÓN</b>	<b>12</b>
<b>2. Resultados Preliminares</b>	<b>15</b>
2.1. Conceptos de la teoría de control . . . . .	15
2.2. Bases para el análisis de sistemas lineales . . . . .	15
2.3. Control de sistemas lineales discretos . . . . .	18
2.3.1. Función de Lyapunov para la realimentación de estados . . . . .	19
2.4. Espacios de Sobolev . . . . .	21
2.5. Observaciones finales del capítulo . . . . .	23
<b>3. DISCRETIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE CALOR</b>	<b>24</b>
3.1. Definición del problema . . . . .	24
3.1.1. Formulación Variacional . . . . .	25
3.2. La aproximación de Galerkin . . . . .	26
3.2.1. Discretización Temporal . . . . .	27
3.3. Estabilización usando Lyapunov . . . . .	28
3.4. Resultados numéricos . . . . .	29
3.4.1. Verificación de la dependencia de $\epsilon$ . . . . .	30
3.4.2. Estabilización para $\tau > h^2/12\epsilon$ . . . . .	30
3.5. Observaciones finales del capítulo . . . . .	34
<b>4. CONTROL DE LA ECUACIÓN DE CONVECCIÓN DIFUSIÓN</b>	<b>35</b>
4.1. El esquema lineal estándar de Galerkin . . . . .	35
4.2. Estabilización usando Lyapunov . . . . .	37
4.3. Resultados numéricos . . . . .	38
4.3.1. Dependencia de $h$ . . . . .	38
<b>5. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS</b>	<b>42</b>
<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>43</b>

## LISTA DE FIGURAS

3.1. Método de Euler explícito-Galerkin, tamaño de la matriz $307 \times 307$ , $\tau = 0.0032552$ y $\epsilon = 10^{-1}$ . . . . .	32
3.2. Método de Euler explícito-Galerkin, tamaño de la matriz $16 \times 16$ , $\tau = 0.0625$ y $\epsilon = 10^{-1}$ . . . . .	32
3.3. Método de Euler explícito-Galerkin, tamaño de la matriz $307 \times 307$ , $\tau = 0.0032552$ y $\epsilon = 10^{-1}$ . . . . .	33
3.4. Método de Euler explícito-Galerkin controlado, tamaño de la matriz $16 \times 16$ , $\tau = 0.0625$ y $\epsilon = 10^{-1}$ . . . . .	33
4.1. Método de Euler explícito-Galerkin, tamaño de la matriz $1228 \times 1228$ , $\tau = 0.0008138$ y $\epsilon = 10^{-1}$ . . . . .	40
4.2. Método de Euler explícito-Galerkin controlado, tamaño de la matriz $32 \times 32$ , $\tau = 0.03125$ y $\epsilon = 10^{-1}$ . . . . .	40

## LISTA DE TABLAS

3.1. Variación de la estabilidad del método en función a $\epsilon$ , para $\rho(G)$ . . . . .	30
3.2. Estabilización para $\tau > h^2/12\epsilon$ . Método no controlado . . . . .	31
3.3. Estabilización para $\tau > h^2/12\epsilon$ . Método no controlado y controlado . . . . .	31
4.1. Método no controlado y controlado . . . . .	39
4.2. Método no controlado y controlado . . . . .	39

# Capítulo 1

## Introducción

En el diseño de métodos numéricos para la solución de ecuaciones diferenciales es importante considerar que la solución numérica (solución discreta) satisfaga la física que la ecuación diferencial modela. Cuando la ecuación tiene un comportamiento elíptico, parabólico o hiperbólico en todo el dominio, el diseño del método numérico es relativamente más sencillo. Sin embargo, en muchos casos de interés la solución posee un comportamiento mixto o un comportamiento predominante en cierta parte del dominio.

La ecuación de convección difusión a menudo tiene una solución de naturaleza convectiva en una parte del dominio y la parte difusiva de la ecuación diferencial está influenciada solamente en pequeños subdominios. Esto hace que los métodos numéricos diseñados para capturar uno u otro fenómeno físico (convección o difusión pura) no se desempeñen de forma satisfactoria cuando son utilizados para resolver el problema mixto. De hecho en la práctica presentan inestabilidad. Esta inestabilidad es numérica por ser expuesta y relacionada al método numérico [Bon06]. Nuestro objetivo consiste en modificar los métodos numéricos que resuelven la ecuación de convección difusión para tornarlos estables.

Dentro del contexto de los métodos numéricos uno de los más usados para resolver ecuaciones diferenciales es el método de Galerkin, también, conocido como método de elementos finitos [Tho97, Che05, Hug87, EBT81]. Es bien conocido que este método es inestable cuando se aplica a la resolución de la ecuación de convección difusión, inclusive en régimen estacionario. Una posible solución encontrada en la literatura para contornar esta inestabilidad consiste en usar lo que se conoce como elemento finito estabilizado. La estabilización consiste en introducir un término que regularice el problema. Entre los métodos estabilizados podemos citar el método de Galerkin least square (GLS), streamline upwind Petrov-Galerkin (SUPG), multiscale,

entre otros [FHM06, KK04, FMV04, FH05, BGS04].

En el contexto de este trabajo, consideraremos la ecuación (de calor o convección-difusión) como un sistema y desde este punto de vista, una forma de estabilizar el sistema consiste en usar un sistema de control. En este caso, la finalidad del sistema de control es conseguir, mediante la manipulación de las variables de control, un dominio sobre las variables de salida. Un sistema de control debe ser capaz de conseguir su objetivo, cumpliendo lo siguiente: garantizar la estabilidad, ser tan eficiente como sea posible, ser fácil de implementar y cómodo de operar en tiempo real con ayuda de un ordenador. El concepto de sistemas de control abarca también la selección de índices de comportamiento. Los cuales deben mantenerse dentro de los límites impuestos por la física.

Los métodos de análisis de sistemas y de diseño de control han ido evolucionando. La evolución de los sistemas informáticos ha permitido que actualmente estén disponibles entornos en los que se pueden realizar simulaciones dinámicas, como ejemplo podemos citar el Matlab, PETSc, C++, etc. Esta evolución, ha permitido que las investigaciones y aplicaciones en la teoría de control automático, pasen de utilizar una implementación analógica y monovariable a una implementación digital y multivariable [Oga97, BL08].

En esta tesis consideramos dos ecuaciones. La ecuación de calor y la ecuación de convección-difusión ambas discretizadas en la variable espacial usando el método de Galerkin estándar y en la variable temporal usando la discretización de forward Euler. En ambos casos esta discretización es inestable numéricamente. En la literatura, la forma de contornar este problema consiste en 1) regularizar la discretización espacial de Galerkin y 2) usar otro método para discretizar la variable temporal, usando por ejemplo el método de Crank-Nicolson o el método de backward Euler, entre otros [Str89]. Sin embargo estos métodos normalmente requieren la resolución de un sistema lineal de gran porte. En este punto radica el interés de estabilizar el método de Euler explícito-Galerkin ya que siendo explícito no necesita la resolución de un sistema lineal de gran porte.

De forma a considerar la discretización de la ecuación de calor o de convección-difusión como un sistema de control. Consideramos las incógnitas de la discretización de Euler explícito-Galerkin como las variables de estado y el término forzante como la variable de control. Escogemos la variable de control como una combinación lineal de las variables de estado. En forma matricial es una matriz que necesita ser determinada. Esta matriz es conocida con el nombre de matriz de realimentación [Oga97, BL08, GS09].

En el contexto de este trabajo exploramos la determinación de la matriz de realimentación usando una función de Lyapunov. Diferentes funciones de Lyapunov determinarían diferentes matrices de realimentación. Esta perspectiva es relativamente simple cuando comparada a los métodos clásicos de estabilización, sin embargo la investigación en esta dirección es incipiente y prometedora dadas las herramientas de estabilización existentes en la literatura de control. Otras técnicas están fuera del alcance de esta tesis y quedan como trabajos futuros.

En el Capítulo 2, presentamos los conceptos básicos de sistemas lineales discretos, convergencia, estabilidad en el sentido de Lyapunov, función de Lyapunov para sistemas de control discretos autónomos, definición de la ley de control o realimentación de estados.

En el Capítulo 3, definimos la ecuación parabólica (ecuación de calor) unidimensional y la formulación variacional de la ecuación parabólica, introducimos la discretización para la ecuación de calor unidimensional (difusión pura) utilizando la aproximación estándar de Galerkin por elemento finito, presentamos el método de Euler explícito-Galerkin estabilizado usando funciones Lyapunov [GS09]. Así mismo presentamos los resultados numéricos obtenidos

En el Capítulo 4, presentamos la ecuación de convección-difusión unidimensional, la formulación variacional, la discretización usando la aproximación estándar de Galerkin, el método de Euler explícito - Galerkin estabilizada usando funciones de Lyapunov y los resultados numéricos. Las conclusiones son presentadas en el Capítulo 5.

# Capítulo 2

## Preliminares

### 2.1. Conceptos de la teoría de control

Una de las herramientas más importantes para el análisis de estabilidad de sistemas fue propuesto por Lyapunov en el año 1892 [Lya92]. A seguir enunciamos conceptos fundamentales que serán usados en este trabajo.

### 2.2. Bases para el análisis de sistemas lineales discretos

Consideremos el sistema dinámico discreto (conjunto de ecuaciones a diferencias) lineal:

$$\begin{cases} z^{k+1} &= A z^k, & k \in \mathbb{N} \\ z^{k_0} &= z^0, \end{cases} \quad (2.1)$$

donde  $t_0 \geq 0$ ,  $z^k \in \mathbb{R}^n$  y  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz constante. Para la ecuación (2.1) un vector  $z^* \in \mathbb{R}^n$  es llamado de punto de equilibrio si  $z^* = A z^*$ . Usualmente se asume que un cambio de coordenadas permite que  $z^*$  sea tomado como el origen (es decir:  $z^* = 0$ ), este punto de equilibrio es llamado de *solución cero*. La notación  $z^k$  es usada para denotar una sucesión de vectores (alternativamente denotado por  $\{z^k\}$ ) que se inicia con la condición inicial  $z^0$  y satisface (2.1). Tal sucesión es llamada de solución de (2.1). A seguir introducimos nociones de convergencia local y global para el sistema (2.1).

**Definición 2.2.1** *El sistema (2.1) es llamado localmente convergente si para  $z^*$  existe un  $\delta > 0$  tal que si  $\|z^0 - z^*\| < \delta$ , la solución  $z^k$  existe y  $\lim_{k \rightarrow \infty} z^k = z^*$ , además es globalmente convergente si  $\lim_{k \rightarrow \infty} z^k = z^*$  para todo  $z^0$ .*

Una vez identificado los puntos de equilibrio del sistema (2.1), la cuestión fundamental consiste en esclarecer la estabilidad de dichos puntos. A seguir definimos la estabilidad del punto de equilibrio  $z^*$ . Como habíamos mencionado nos concentramos en  $z^* = 0$  ya que es posible desplazar el origen del sistemas de coordenadas por una traslación de coordenadas [Oga97]. De esta forma los teoremas y definiciones enunciadas a continuación corresponden al punto de equilibrio  $z^* = 0$  [BK06].

**Definición 2.2.2** (*Estabilidad en el sentido de Lyapunov*). El punto de equilibrio  $z^* = 0$  de la ecuación (2.1) es:

- (i) Estable o estable en el sentido de Lyapunov si, dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $\|z^0 - z^*\| < \delta$  implica  $\|z^k - z^*\| < \epsilon$  para todo  $k \geq 0$ ; y es denominado inestable si no es estable.
- (ii) Atractivo si existe  $\delta > 0$  tal que  $\|z^0 - z^*\| < \delta$  implica  $\lim_{k \rightarrow \infty} z^k = z^*$ . Si  $\delta = \infty$ , entonces  $z^*$  es globalmente atractivo.
- (iii) Asintóticamente estable si es estable y atractivo; globalmente asintóticamente estable si es estable y globalmente atractivo.
- (v) Exponencialmente estable si existe  $\delta > 0$ ,  $\mu > 0$ , y  $\eta \in (0, 1)$  tal que  $\|z^0 - z^*\| \geq \mu\eta^k$  siempre que  $\|z^0 - z^*\| < \delta$ , globalmente exponencialmente estable si  $\delta = \infty$ .

Si el punto de equilibrio  $z^*$  es estable, decimos que el sistema lineal de tiempo discreto (2.1) es estable. Las Definiciones (2.2.2) arriba mencionadas son generales y consecuentemente pueden aplicarse a sistemas tanto lineales como no-lineales. Una forma para analizar la estabilidad del sistema (2.1) esta basado en el criterio de estabilidad (función) de Lyapunov que se establece a seguir.

Sea  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definida como una función escalar. El decrecimiento o variación de  $V$  relativo al sistema (2.1) se define como

$$\Delta V(z^k) := V(z^{k+1}) - V(z^k) = V(Az^k) - V(z^k). \quad (2.2)$$

Note que si  $\Delta V(z^k) \leq 0$ , entonces  $V$  es decreciente a lo largo de la solución de (2.1).

**Definición 2.2.3** La función  $V$  es una función de Lyapunov en un subconjunto  $W \in \mathbb{R}^n$  si

- (i)  $V$  es continua en  $W$ , y
- (ii) el decaimiento de  $\Delta V \leq 0$ , tal que  $z$  y  $Az$  estén en  $W$  [BK06].

**Definición 2.2.4** La bola abierta  $B(z, \xi)$  con centro en  $z$  y radio  $\xi$ ; denota una vecindad de  $z$  y esta definida por  $B(z, \xi) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - z\| < \xi\}$ .

**Definición 2.2.5** La función escalar  $V$  es positiva definida en  $z^*$  si

(i)  $V(z^*) = 0$ , y

(ii)  $V(z) > 0$  para todo  $z \in B(z, \xi)$ , para algún  $\xi > 0$ .

Decimos que una matriz  $Q$  simétrica es positiva definida si su forma cuadrática  $z^T Q z > 0$  para todo  $z \neq 0$ . En este caso escribimos simplemente  $Q > 0$ . Fijamos ahora el teorema de estabilidad de Lyapunov.

**Teorema 2.2.1** (Primer teorema de Lyapunov)[BK06] Si  $V$  es una función de Lyapunov para el sistema (2.1) sobre una vecindad  $W$  del punto de equilibrio  $z^* = 0$  y  $V$  es positiva definida con respecto a  $z^* = 0$ , entonces  $z^* = 0$  es estable. Si además  $\Delta V < 0$ , siempre que  $z$  y  $Az$  estén en  $W$ , entonces  $z^* = 0$  es asintóticamente estable. Mas aún, si  $W = \mathbb{R}^n$  y  $V(z) \rightarrow \infty$  cuando  $\|z\| \rightarrow \infty$  entonces  $z^* = 0$  es globalmente asintóticamente estable.

**Observación 2.2.2** Una función  $V(z)$  que permite demostrar la estabilidad resultante en uno de los items del Teorema (2.2.1) es denominada una función de Lyapunov.

**Observación 2.2.3** Un resultado básico de estabilidad, cuando se considera un sistema lineal invariante en el tiempo de la forma (2.1) es que el punto de equilibrio  $z^* = 0$  es estable si y solamente si el radio espectral de la matriz  $A$  verifica que  $\rho(A) \leq 1$  [GQ95, BL08].

Una aplicación del Teorema de estabilidad de Lyapunov (2.2.1), usando una función de Lyapunov cuadrática  $V(z) := (z^k)^T P(z^k)$ , donde  $P$  es una matriz simétrica. Es fácil ver que al escoger  $V(z^k) = (z^k)^T P(z^k) > 0$  y  $\Delta V(z^k) = V(z^{k+1}) - V(z^k)$ , entonces al usar la ecuación (2.1) se obtiene:

$$V(z^{k+1}) - V(z^k) = (z^k)^T (A^T P A - P) z^k \leq 0, \quad (2.3)$$

esto significa que el sistema es asintóticamente estable si  $A^T P A - P < 0$  o equivalentemente en el caso que exista una matriz  $Q$  positiva definida (o semidefinida positiva) para la cual se verifique  $A^T P A - P = -Q$ . Este concepto es formalizado en el siguiente teorema [GQ95, BK06].

**Teorema 2.2.4** El punto de equilibrio  $z^* = 0$  del sistema lineal invariante en el tiempo (2.1) es asintóticamente estable si y solamente si para toda matriz simétrica definida positiva  $Q = Q^T > 0$ , existe una única matriz  $P = P^T > 0$  tal que  $\Delta V(z^k) = -(z^k)^T Q z^k$  [GQ95].

Cuando  $V(z^k) := (z^k)^T P z^k$ , la expresión  $\Delta V(z^k) = -(z^k)^T Q z^k$  toma la forma:

$$A^T P A - P = -Q. \quad (2.4)$$

La ecuación (2.4) es conocida como *ecuación de Stein* o *ecuación de Lyapunov* de tiempo discreto. Si la ecuación de Stein es satisfecha claramente  $\rho(A) < 1$ . Si además, (2.4) es satisfecha para una matriz positiva  $P$  diagonal, entonces decimos que  $A$  es una matriz diagonalmente estable.

## 2.3. Control de sistemas lineales discretos: teoría fundamental

La teoría de Lyapunov es bien conocida como una herramienta de análisis de estabilidad, pero relativamente menos conocida como un instrumento para ser utilizado en el diseño de sistemas. A seguir, definimos la función de Lyapunov para sistemas de control discretos autónomos.

Se considera el sistema lineal discreto autónomo:

$$\begin{cases} z^{k+1} &= A z^k + B u^k, & \text{con } k \in \mathbb{N} \\ z^{k_0} &= z^0, \end{cases} \quad (2.5)$$

donde  $u^k \in \mathbb{R}^m$  es el vector de control,  $z^k \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estado,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz del sistema y  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  es la matriz de entrada donde  $A$  y  $B$  son matrices constantes e invariantes en el tiempo (sistema autónomo), y consideremos la función propia  $V \in C^1$  que mapea  $V : \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , con  $V(0) = 0$  tal que para todo  $z^k \in \mathbb{R}^n - \{0\}$  satisface

$$\Delta V(z^k) := V(z^{k+1}) - V(z^k) = V(A z^k + B u(z^k)) - V(z^k) \leq 0, \quad (2.6)$$

para valores del vector de control  $u^k$ . Entonces, denominamos a la función  $V(\cdot)$  como *función de control de Lyapunov* para el sistema (2.5) [BK06].

El problema de control consiste en encontrar una sucesión  $u^k$  que altere el comportamiento del sistema (sin control) de forma tal que el comportamiento alterado sea estable. Note que el punto de equilibrio  $z^*$  del sistema (2.1) es equivalente al punto de equilibrio del sistema (2.5) sin perturbar ( $u^k = 0, \forall k \in \mathbb{N}$ ). Consecuentemente, más apropiadamente, si un determinado punto de equilibrio  $z^*$  del sistema (2.5) no es estable en el sentido de Lyapunov (vea Definición (2.2.2) más arriba), entonces se desea encontrar una sucesión  $u^k$  de forma que la sucesión  $z^k$  perturbada sea globalmente asintóticamente estable con relación al punto de equilibrio  $z^*$ .

En particular asumimos que  $u^k$  depende linealmente del estado  $z^k$ , es decir:

$$u^k = -F z^k, \quad (2.7)$$

donde  $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . La expresión (2.7) es conocida como *ley de control o realimentación de estados*. En el contexto de este trabajo, la función de Lyapunov es usada como una herramienta para encontrar la realimentación de estados apropiada.

### 2.3.1. Función de Lyapunov para la realimentación de estados

En el contexto de la ley de control (2.7), encontrar  $u^k$  es equivalente a encontrar una matriz  $F$  tal que la solución del sistema

$$z^{k+1} = (A - BF) z^k, \quad (2.8)$$

sea asintóticamente estable con respecto al punto de equilibrio  $z^* = 0$ . En tal caso, decimos que el sistema (2.5) ha sido estabilizado.

Analogamente al Teorema (2.2.4) (para el caso del sistema (2.1)), ahora para el caso del sistema (2.5), el decrecimiento de la función de Lyapunov  $V(z^k) = (z^k)^T P (z^k)$  está dado por:

$$\Delta V(z^k) = -(z^k)^T Q z^k - (u^k)^T R u^k, \quad (2.9)$$

donde  $Q$  es simétrica definida positiva (o semidefinida positiva) y  $R$  es simétrica definida positiva. Consecuentemente, la matriz  $F$  de la ley de control (2.7) toma la forma [Str81]:

$$F = -(B^T P B + R)^{-1} B^T P A, \quad (2.10)$$

donde la matriz  $P$  simétrica positiva definida, es obtenida resolviendo la ecuación de Riccati [Str81]:

$$P = A^T P A - A^T P B (B^T P B + R)^{-1} B^T P A + Q. \quad (2.11)$$

**Teorema 2.3.1** *La ley de control para el sistema lineal discreto (2.5) para una matriz positiva definida  $R$ , se define como*

$$u^k = -(B^T P B + R)^{-1} B^T P A z^k, \quad (2.12)$$

donde la matriz  $P$  satisface la ecuación (2.11).

#### **Demostración :**

Teniendo en cuenta la variación de  $V$  definida en (2.6) para el sistema (2.5) tenemos

que

$$\begin{aligned}
\Delta V(z^k) &= V(z^{k+1}) - V(z^k) \\
&= (z^{k+1})^T P z^{k+1} - (z^k)^T P z^k \\
&= (A z^k + B u^k)^T P (A z^k + B u^k) - (z^k)^T P z^k \\
&= ((z^k)^T A + (u^k)^T B^T) P (A z^k + B u^k) - (z^k)^T P z^k \\
&= (z^k)^T A^T P A z^k + (z^k)^T A^T P B u^k + (u^k)^T B^T P A z^k \\
&\quad + (u^k)^T B^T P B u^k - (z^k)^T P z^k.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Reemplazando la ley de control (2.7) en la parte derecha de la ecuación (2.13) tenemos que

$$\begin{aligned}
\Delta V(z^k) &= (z^k)^T A^T P A z^k + (z^k)^T A^T P B (-F z^k) + (-F z^k)^T B^T P A z^k \\
&\quad + (-F z^k)^T B^T P B (-F z^k) - (z^k)^T P z^k \\
&= (z^k)^T (A^T P A - A^T P B F - F^T B^T P A + F^T B^T P B F - P) z^k.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Por otro lado teniendo en cuenta la expresión (2.9) y la variación  $\Delta V$  obtenemos

$$\begin{aligned}
-(z^k)^T Q (z^k) - (z^k)^T F^T R F (z^k) &= (z^k)^T (A^T P A - A^T P B F \\
&\quad - F^T B^T P A + F^T B^T P B F - P) (z^k) \\
-(z^k)^T (Q + F^T R F) (z^k) &= (z^k)^T (A^T P A - A^T P B F \\
&\quad - F^T B^T P A + F^T B^T P B F - P) (z^k).
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Comparando ambos miembros de la ecuación (2.15) y notando que la misma debe ser válida para cualquier  $z^k$ , llegamos a

$$A^T P A - A^T P B F - F^T B^T P A + F^T B^T P B F - P = -Q - F^T R F, \tag{2.16}$$

o

$$A^T P A - A^T P B F - F^T B^T P A + F^T B^T P B F - P + Q + F^T R F = 0. \tag{2.17}$$

Ahora teniendo en cuenta esta última igualdad (2.17) tenemos que [Str81]

$$F = (B^T P B + R)^{-1} B^T P A, \tag{2.18}$$

y reemplazando (2.18) en (2.7) obtenemos

$$u^k = -(B^T P B + R)^{-1} B^T P A z^k,$$

que es la expresión (2.12), donde la matriz  $P$  debe satisfacer la ecuación de Riccati (2.11) que se obtiene teniendo en cuenta (2.17) y (2.18).  $\square$

Es importante resaltar que el origen  $z^*$  es estable para el sistema controlado (2.8), si y solamente si  $\rho(A - BF) \leq 1$  y todos los autovalores de modulo unitario son semi-simples (es decir corresponden a bloques de Jordan de dimension 1). Si  $\rho(A - BF) < 1$  todas las partes de las Definiciones 2.2.1 y 2.2.2 son equivalentes (para más detalles vea [GQ95]).

## 2.4. Espacios de Sobolev

**Definición 2.4.1** Se llama distribución  $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  a un funcional lineal y continuo sobre el espacio vectorial  $\mathcal{D}(\Omega)$ , que satisface las condiciones:

1.  $T$  es lineal, es decir  $\forall u, v \in \mathcal{D}$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  se cumple que:

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v).$$

2.  $T$  es continuo:

Es decir, para cada sucesión  $(\phi^k)$  que converge a cero en  $\mathcal{D}(\Omega)$ , sus imágenes  $T(\phi^k)$  converge para cero en  $\mathbb{R}$ , resultando que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (T(\phi^k)) = T\left(\lim_{k \rightarrow \infty} (\phi^k)\right).$$

Además diremos que dos distribuciones  $T_1$  y  $T_2$  son iguales si para toda  $u \in \mathcal{D}$  se cumple que  $\langle T_1, u \rangle = \langle T_2, u \rangle$ .

El espacio de las distribuciones con la noción de convergencia es denotado por  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

Las funcionales localmente integrables  $u \in \mathcal{L}_{loc}^1(\Omega)$  definen unívocamente una distribución dada por

$$(T_u, v) = \int_{\Omega} u(x) v(x) dx, \quad \forall u \in \mathcal{D}'(\Omega); \forall v \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (2.19)$$

Para  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  y  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$  definimos la derivada de orden  $n$  en el sentido de las distribuciones como sigue:

$$\left( \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}, v \right) = (-1)^\alpha \left( u, \frac{\partial^\alpha v}{\partial x^\alpha} \right), \quad (2.20)$$

Con  $v \in C_0^\infty(\Omega)$ . En este caso toda distribución es infinitamente derivable.

Con la noción de distribución y sus derivadas, podemos definir, los espacios de Sobolev  $\mathcal{H}^p(\Omega)$ .

**Definición 2.4.2** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , definimos el espacio  $\mathcal{L}^2(\Omega)$ :

$$\mathcal{L}^2(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx < \infty \right\}. \quad (2.21)$$

Cuyo producto interno y norma son dadas por:

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx \quad \text{y} \quad \|u\|^2 = \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx. \quad (2.22)$$

**Definición 2.4.3** El espacio  $\mathcal{H}^p(\Omega)$ ,  $p = 0, 1, \dots$ ,  $p \in \mathbb{N}$  es definido por:

$$\mathcal{H}^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; u \in \mathcal{L}^2(\Omega), \frac{\partial^{\alpha} u}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_d}^{\alpha_d}} \in \mathcal{L}^2(\Omega) \right\}, \quad (2.23)$$

donde  $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$ ,  $1 \leq \alpha \leq p$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{N}$ .

El producto interno en  $\mathcal{H}^p(\Omega)$  es dado por

$$(u, v) = \sum_{\alpha=0}^p \int_{\Omega} \frac{\partial^{\alpha} u}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_d}^{\alpha_d}} \frac{\partial^{\alpha} v}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_d}^{\alpha_d}} \quad \forall u, v \in \mathcal{H}^p(\Omega). \quad (2.24)$$

Observe que el espacio de Sobolev  $\mathcal{H}^p(\Omega)$  con el producto interno definido en (2.24) es un espacio de Hilbert para  $p = 0, 1, \dots$ ,  $p \in \mathbb{N}$ . Note que para  $p = 0$  el espacio  $\mathcal{H}^0(\Omega) = \mathcal{L}^2(\Omega)$  y que para  $p = 1$ , tenemos que

$$\mathcal{H}^1(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{L}^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial_{x_i}} \in \mathcal{L}^2(\Omega) \right\}. \quad (2.25)$$

En este caso el producto interno y norma en  $\mathcal{H}^1$  estan definidos por:

$$(u, v) = \int_{\Omega} uv d\Omega + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v d\Omega \quad \text{y} \quad \|u\|^2 = \int_{\Omega} |u|^2 d\Omega + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega. \quad (2.26)$$

Un subespacio  $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$  de  $\mathcal{H}^1(\Omega)$  se define como

$$\mathcal{H}_0^1(\Omega) = \{ u \in \mathcal{H}^1(\Omega); u = 0 \text{ en la frontera} \}. \quad (2.27)$$

## **2.5. Observaciones finales del capítulo**

En este capítulo hemos presentado las definiciones de estabilidad y convergencia que serán utilizadas en capítulos posteriores. En el próximo capítulo usaremos el Teorema 2.3.1 para estabilizar y desarrollar un controlador que establezca la discretización de la ecuación de calor.

## Capítulo 3

# Discretización de la ecuación de calor: problema de control

En este capítulo abordaremos el problema de control para la solución numérica de la ecuación de calor. Esta ecuación es discretizada en el dominio espacial usando el método clásico de elementos finitos de Galerkin; discretización que conduce a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales (EDO). A su vez este sistema de EDOs es discretizado en el tiempo usando el método de *Euler explícito*.

La condición de estabilidad para este método (Euler explícito-Galerkin) es  $\tau \preceq h^2$  donde  $\tau$  y  $h$  son los parámetros de discretización temporal y espacial, respectivamente [Str89]. En situaciones en las cuales esta condición de estabilidad es aceptable, el método de Euler explícito es interesante por su simplicidad de implementación y porque es un método explícito.

Sin embargo en una gran variedad de casos la condición de estabilidad es muy severa. El objetivo de este capítulo consiste en estabilizar el método de Euler explícito-Galerkin usando la teoría de Lyapunov presentada en el Capítulo 2 cuando la condición de estabilidad  $\tau \leq h^2$  es relajada.

### 3.1. Definición del problema

Consideremos la ecuación unidimensional parabólica para  $(x, t) \in \Omega \times [0, T)$  con condiciones de Dirichlet y término forzante  $f(x, t)$  dado por:

$$\partial_t w(x, t) = \epsilon \partial_{xx} w(x, t) + f(x, t), \quad \text{para } (x, t) \in \Omega \times [0, T); \quad (3.1)$$

sujeta a las condiciones de frontera e iniciales dadas por:

$$\begin{aligned} w(0, t) &= w(L, t), \\ w(x, 0) &= w_0(x); \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde  $w_0(x) \in \mathcal{L}^2(\Omega)$  y  $f(x, t) \in \mathcal{L}^2(\Omega \times [0, T])$ . Por simplicidad consideramos que  $\Omega = [0, L]$  y  $w(0, t) = w(L, t) = 0$ ; consecuentemente  $w(x, t) \in \mathcal{H}_0^1(\Omega \times [0, T])$ . En este trabajo el término forzante  $f(x, t)$  es usado para controlar la ecuación (3.1). El parámetro  $\epsilon \in \mathbb{R}$  es el coeficiente de difusión. Más adelante definiremos convenientemente la función  $f(x, t)$  de manera que podamos usarla como función de control.

### 3.1.1. Formulación Variacional

Sean  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{S}^*$  tres espacios de Hilbert para los cuales se cumple  $\mathcal{S} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{S}^*$ , donde  $\mathcal{S}^*$  denota el dual de  $\mathcal{S}$  con respecto a  $\mathcal{H}$ . En particular, consideraremos  $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\Omega)$ . Denotamos el producto interno en  $\mathcal{H}$  como  $(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)_{\mathcal{L}^2(\Omega)}$ . Además, consideraremos que  $\mathcal{S} = \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ . La formulación variacional de la ecuación (3.1) se obtiene multiplicando-la por una función de test  $\varphi \in \mathcal{S}$ , integrando sobre  $\Omega$  y usando la fórmula de Green. Se obtiene así:

$$(\partial_t w, \varphi) + a(w, \varphi) = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}; \quad (3.3)$$

donde  $a(\cdot, \cdot) : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$  es un funcional bilineal. Para el caso de la ecuación (3.3), los funcionales  $a(\cdot, \cdot)$  y  $(f, \varphi)$  son definidos por:

$$a(w, \varphi) := \int_{\Omega} \epsilon \partial_x w(x, t) \cdot \partial_x \varphi dx, \quad (3.4)$$

y

$$(f(x, t), \varphi) := \int_{\Omega} f(x, t) \varphi dx. \quad (3.5)$$

Es importante resaltar que la forma bilineal  $a : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$  para la ecuación (3.3) tiene las siguientes propiedades [Tho97, Che05]:

- Es simétrica, es decir

$$a(w, v) = a(v, w). \quad (3.6)$$

- Es continua, es decir existe  $C > 0$  tal que:

$$|a(w, v)| \leq C \|w\|_{\mathcal{S}} \|v\|_{\mathcal{S}}, \quad \forall w, v \in \mathcal{S}. \quad (3.7)$$

- Es coersiva (elíptica), es decir, existe  $\alpha > 0$  tal que:

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_{\mathcal{S}}^2, \quad \forall v \in \mathcal{S}. \quad (3.8)$$

Las condiciones (3.6), (3.7) y (3.8) aseguran que la ecuación (3.3) sujeta a las condiciones iniciales y de frontera (3.2) tiene una única solución [Bré83, Che05].

## 3.2. La aproximación de Galerkin semi-discreto

En la literatura  $\mathcal{S}$  es tomado como un subespacio de  $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$ , de acuerdo a las condiciones de frontera de la ecuación diferencial. Si  $\mathcal{S}_h$  es un subespacio de elementos finitos de  $\mathcal{S}$ , entonces la aproximación por elementos finitos consiste en encontrar  $w_h = w_h(x, t)$  el cual pertenece a  $\mathcal{S}_h$  para cada  $t \in (0, T)$  y satisface

$$(\partial_t w_h, v_h) + a(w_h, v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in \mathcal{S}_h. \quad (3.9)$$

De forma a encontrar la aproximación de Galerkin asumimos que  $w_h(x, t)$  tiene la siguiente forma [NT94]:

$$w_h(x, t) = \sum_{i=1}^m z_i(t) \varphi_i(x), \quad (3.10)$$

donde el conjunto de los  $\varphi_i \forall i = 1, \dots, m$ ; constituyen una base para  $\mathcal{S}_h$ . Asumimos también que el término forzante  $f(x, t)$  tiene la forma  $f(x, t) = \sum_{i=1}^m b_i(x) u_i(t)$ . En el contexto de este trabajo asumimos que los  $\varphi_i$  son funciones lineales continuas a trozos, sobre el intervalo  $[0, 1]$ , con la forma

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{h_{i-1}}(x - x_{i-1}), & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \frac{1}{h_i}(x_{i+1} - x), & x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0 & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]. \end{cases} \quad (3.11)$$

Introduciendo (3.10) y el término forzante  $f(x, t)$  en (3.9) obtenemos el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\sum_{j=1}^m (\varphi_i, \varphi_j) \frac{dz_j}{dt} + \sum_{j=1}^m a(\varphi_i, \varphi_j) z_j = \sum_{j=1}^m (b_i, \varphi_j) u_j, \quad i = 1, \dots, m; \quad (3.12)$$

donde las incógnitas son los  $z_j(t)$ . Los valores iniciales para  $z_j(0)$  son determinados

observando la siguiente relación

$$\sum_{j=1}^m z_j(0)\varphi_i = z_h^0.$$

Denotando el vector de incógnitas por  $z = (z_1, \dots, z_m)^T$ , y re-escribiendo (3.12) en forma matricial, obtenemos:

$$\begin{cases} M\dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t), \\ z(0) = z_0, \end{cases} \quad (3.13)$$

donde las matrices  $M, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  están definidas respectivamente por

$$M = \left[ \int_0^L \varphi_i \varphi_j dx \right]_{i,j=1}^m, \quad (3.14)$$

$$A = \epsilon \left[ \int_0^L \varphi_i' \varphi_j' dx \right]_{i,j=1}^m, \quad (3.15)$$

$$B = \left[ \int_0^L b_i(x) \varphi_j dx \right]_{i,j=1}^m. \quad (3.16)$$

En el contexto de este trabajo consideramos que para cada  $i$  la función  $b_i(x)$  es constante en cada intervalo, es decir, constante por partes. A seguir realizamos una discretización temporal del sistema matricial (3.13).

### 3.2.1. Discretización Temporal

Para resolver numéricamente la ecuación (3.13) es necesario discretizar la variable temporal. Para ello consideraremos la división temporal del intervalo de tiempo  $[0, T]$  como

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T,$$

con nodos equidistantes  $t_k = k\tau$  y con paso del tiempo  $\tau = T/N$ . Usamos  $u^k$  para denotar el  $u(t_k)$  en el  $k$ -ésimo paso de tiempo. Obtenemos así la Discretización de Euler explícito (forward) para la ecuación (3.13):

$$M \frac{z^{k+1} - z^k}{\tau} = Az^k + Bu^k;$$

de la cual obtenemos

$$\begin{cases} M z^{k+1} = (M + \tau A)z^k + \tau Bu^k, & k = 0, 1, \dots, N-1, \\ z(0) = z_0. \end{cases} \quad (3.17)$$

La condición de estabilidad para este método se establece en el siguiente Lema [Tho97]:

**Lema 3.2.1** Sean las matrices  $A$  y  $M$  simétricas definidas positivas como expresadas en (3.13). Sean  $\lambda_k$  los autovalores generalizados de la matriz  $A$  con respecto a  $M$ . Entonces el esquema de Euler explícito es estable si:

$$\tau \leq \min\{c_1/\epsilon, c_2h^2/\epsilon\}.$$

Este Lema se demuestra usando la relación  $c_1 \leq \lambda_k \leq c_2/h^2$ , donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes. En la practica la discretización de Euler explícito es usado para simulaciones que requieran intervalos de tiempo pequeños. Esto es debido a que la condición de estabilidad  $\tau \leq Ch^2$  limita el paso del tiempo  $\tau$  [Tho97].

Otros métodos son estudiados en la literatura, entre los cuales podemos citar el método de Euler implícito y el de Crank-Nicolson que son incondicionalmente estables, es decir, el tamaño de  $\tau$  esta restringido solo por las demandas de exactitud (ver [NT94]). Sin embargo, la implementación de estos métodos requieren resolver sistemas algebraicos de gran porte; hecho que los torna costosos computacionalmente.

En la sección siguiente escribiremos la ecuación de calor en forma matricial a partir de la ecuación (3.13) y definiremos la ley de control que establezca el sistema basándonos en la teoría de control de Lyapunov presentada en el Capítulo 2.

### 3.3. Estabilización usando Lyapunov

A partir de la ecuación (3.13), obtenemos la representación estándar matricial para el diseño de control:

$$\begin{cases} z^{k+1} &= G z^k + N u^k, \\ z^{(0)} &= z_0, \end{cases} \quad (3.18)$$

donde  $G = \mathbf{I} + \tau M^{-1}A$  y  $N = \tau M^{-1}B$ .

Para encontrar el controlador (o realimentación)  $u^k$  como función de  $z^k$  definimos la función candidata a función de Lyapunov  $V$  dada por:

$$V(z^k) = \langle z^k, z^k \rangle.$$

La variación de la función de Lyapunov  $V(z^k)$  denotado por  $\Delta V(z^k)$  en la trayectoria

dada por la ecuación (3.18) es dada por:

$$\begin{aligned}
\Delta V(z^k) &= V(z^{k+1}) - V(z^k) \\
&= (z^{k+1})^T P z^{k+1} - (z^k)^T P z^k \\
&= [(G + N u^k) z^k]^T P (G + N u^k) z^k - (z^k)^T P z^k \\
&= (z^k)^T (G + N u^k)^T P (G + N u^k) z^k - (z^k)^T P z^k \\
&= (z^k)^T G^T P G z^k + (z^k)^T G^T P N u^k + (u^k)^T N^T P G z^k \\
&\quad + (u^k)^T N^T P N u^k - (z^k)^T P z^k.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Para que la variación  $\Delta V(z^k)$  sea decreciente, la ley de control  $u^k$  debe tener la forma (para mayores detalles vea el procedimiento utilizado en el Teorema 2.3.1):

$$u^k = -[(N^T P N + R)^{-1} N^T P G] z^k, \tag{3.20}$$

donde  $F := (N^T P N + R)^{-1} N^T P G$  y la matriz  $P$  satisface la ecuación de Riccati dada por

$$P = G^T P G - G^T P N (N^T P N + R)^{-1} N^T P G + Q. \tag{3.21}$$

Usando la ley de control (3.20), la ecuación (3.18) toma su forma estabilizada

$$\begin{cases} z^{k+1} = (G - N F) z^k, \\ z^{(0)} = z_0. \end{cases} \tag{3.22}$$

### 3.4. Resultados numéricos

En esta sección presentamos los resultados obtenidos en experimentos numéricos para la discretización de Euler explícito de la ecuación de calor unidimensional:

$$\partial_t w(x, t) - \epsilon \partial_{xx} w(x, t) = f(x, t), \quad \text{para } (x, t) \in \Omega \times [0, T]; \tag{3.23}$$

sujeta a condiciones de frontera de Dirichlet:

$$w(0, t) = w(L, t) = 0. \tag{3.24}$$

En los resultados numéricos son considerados distintos valores de coeficientes de difusión  $\epsilon$ . Siguiendo [KK04] consideramos  $b(x) = e^x$  y el dominio espacial como el intervalo  $L = [0, 1]$ . La condición inicial es  $w(x, 0) = x \text{ seno}(\pi x)$ .

### 3.4.1. Verificación de la dependencia de $\epsilon$

En la Tabla 3.1 presentamos los resultados del radio espectral  $\rho(\cdot)$  de la matriz  $G$  (en función de  $\epsilon$ ) para distintos valores de  $\epsilon$ , cuando  $\epsilon$  varia en un rango de  $\epsilon = 10^{-3}$  hasta  $\epsilon = 10^3$  en incrementos de  $\Delta\epsilon = 10$ . En los resultados de la Tabla 3.1 hemos considerado como parámetros de estabilidad  $\tau = h^2/\epsilon$  y  $\tau = h^2/12\epsilon$ , este último entre paréntesis. Se observa la concordancia de los resultados numéricos obtenidos para la estabilidad con el resultado del Lema 3.2.1. Note que, por el Lema 3.2.1, en la medida que  $\epsilon$  cresce, la condición para  $\tau$  se vuelve más estricta.

$h^i \backslash \epsilon$	$\epsilon = 10^{-3}$	$\epsilon = 10^{-2}$	$\epsilon = 10^{-1}$	$\epsilon = 1$	$\epsilon = 10$	$\epsilon = 10^2$	$\epsilon = 10^3$
$i = 3$	10.7268 (0.8939)	10.7268 (0.8939)	10.7268 (0.8939)	10.7268 (0.8939)	10.7268 (0.8939)	10.7268 (0.8939)	10.7268 (0.8939)
$i = 4$	11.6607 (0.9717)	11.6607 (0.9717)	11.6607 (0.9717)	11.6607 (0.9717)	11.6607 (0.9717)	11.6607 (0.9717)	11.6607 (0.9717)
$i = 5$	11.9137 (0.9928)	11.9137 (0.9928)	11.9137 (0.9928)	11.9137 (0.9928)	11.9137 (0.9928)	11.9137 (0.9928)	11.9137 (0.9928)
$i = 6$	11.9783 (0.9982)	11.9783 (0.9982)	11.9783 (0.9982)	11.9783 (0.9982)	11.9783 (0.9982)	11.9783 (0.9982)	11.9783 (0.9982)

Tabla 3.1: Variación de la estabilidad del método en función a  $\epsilon$ , para  $\rho(G)$ .

### 3.4.2. Estabilización para $\tau > h^2/12\epsilon$ .

En este experimento mostramos como la estabilización usando funciones de Lyapunov permite relajar la condición para  $\tau$  establecida en el Lemma 3.2.1. Para esto, fijamos un valor de  $\epsilon = 10^{-1}$  y consideramos  $\tau = h$  para el método estabilizado y para el método sin estabilizar. Además presentamos como referencia los resultados para  $\tau = h^2/12\epsilon$  (condición de estabilidad para el método de Euler explícito). Siguiendo [KK03, KK04], tomamos los valores de los parámetros  $q = 10$  y  $r = 10^{-1}$  de la función de Lyapunov. La malla es refinada de acuerdo a la ley:  $h = h^i = 1/2^i$  para  $i = 3, 4, 5$  y  $6$ , respectivamente.

En la Tabla 3.2 es presentado el radio espectral de la matriz  $G$ . Y podemos observar que el método Euler explícito-Galerkin es estable con parámetro de estabilidad  $\tau = h^2/12\epsilon$ , mientras que si tomamos como parámetro  $\tau = h$  el método es inestable. Esto puede ser observado en las Figuras 3.1 y 3.2.

En la Tabla 3.3 es presentado el radio espectral de las matrices  $G$  y  $G - NF$ . Puede observarse en la tercera columna de la Tabla 3.3 que en este caso el método Euler explícito-Galerkin es estable utilizando la teoría de control vía funciones de Lyapunov cuando tomamos el parámetro  $\tau = h$ , los resultados de los experimentos podemos ver en las Figuras 3.3 y 3.4. Observe la similitud de las figuras.

$h = 1/2^i$	$q = 10, r = 10^{-3} \text{ y } \epsilon = 10^{-1}$	
	$\tau = h^2/12\epsilon$	$\tau = h$
	no controlado $\rho(G)$	no controlado $\rho(G)$
$i = 3$	0.8939	8.584
$i = 4$	0.9717	18.6570
$i = 5$	0.9928	38.1240
$i = 6$	0.9982	76.6614

Tabla 3.2: Estabilización para  $\tau > h^2/12\epsilon$ . Método no controlado

$h = 1/2^i$	$q = 10, r = 10^{-3} \text{ y } \epsilon = 10^{-1}$		
	$\tau = h^2/12\epsilon$	$\tau = h$	$\tau = h$
	no controlado $\rho(G)$	no controlado $\rho(G)$	controlado $\rho(G - NF)$
$i = 3$	0.8939	8.584	0.8940
$i = 4$	0.9717	18.6570	0.9406
$i = 5$	0.9928	38.1240	0.9694
$i = 6$	0.9982	76.6614	0.9846

Tabla 3.3: Estabilización para  $\tau > h^2/12\epsilon$ . Método no controlado y controlado

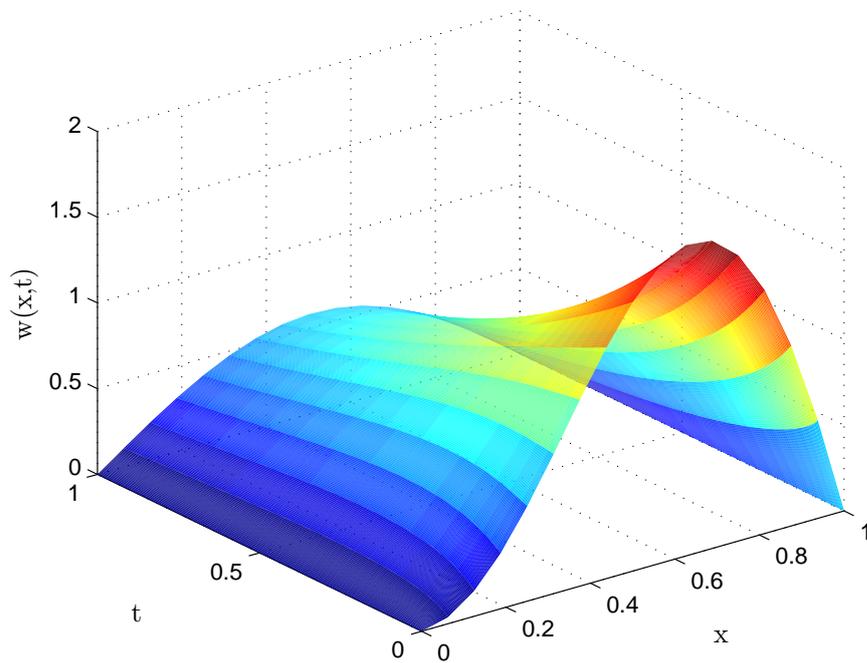


Figura 3.1: Método de Euler explícito-Galerkin, tamaño de la matriz  $307 \times 307$ ,  $\tau = 0.0032552$  y  $\epsilon = 10^{-1}$

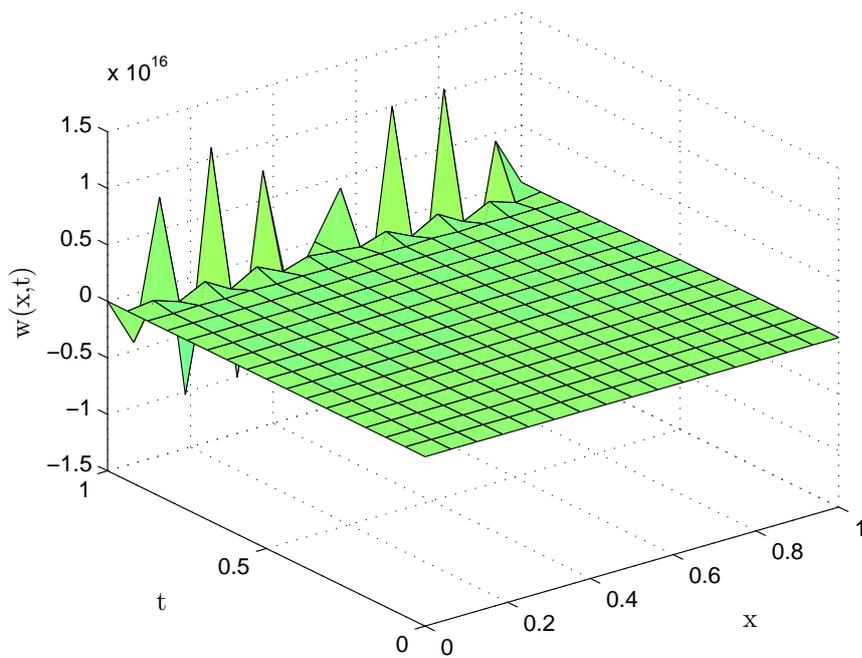


Figura 3.2: Método de Euler explícito-Galerkin, tamaño de la matriz  $16 \times 16$ ,  $\tau = 0.0625$  y  $\epsilon = 10^{-1}$

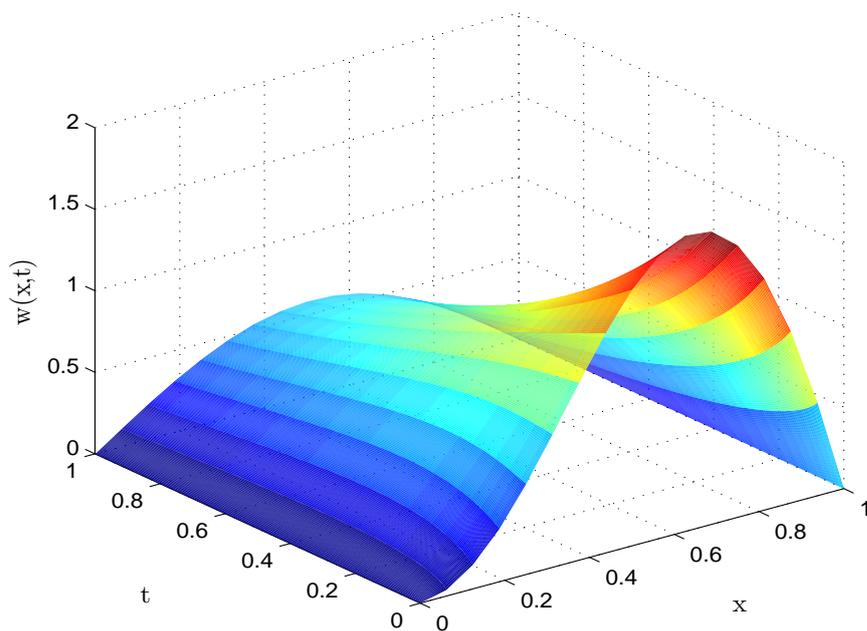


Figura 3.3: Método de Euler explícito-Galerkin, tamaño de la matriz  $307 \times 307$ ,  $\tau = 0.0032552$  y  $\epsilon = 10^{-1}$

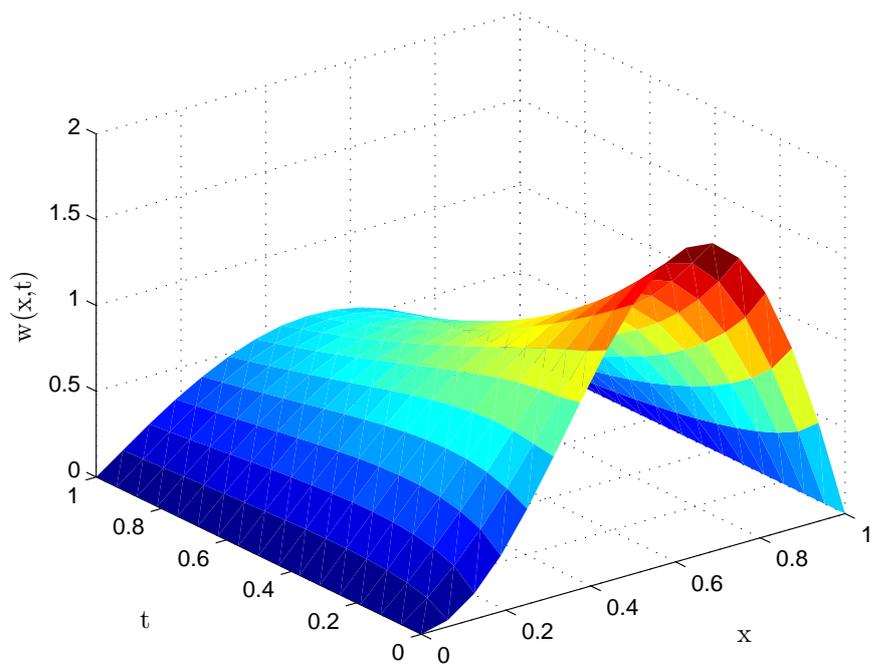


Figura 3.4: Método de Euler explícito-Galerkin controlado, tamaño de la matriz  $16 \times 16$ ,  $\tau = 0.0625$  y  $\epsilon = 10^{-1}$

### **3.5. Observaciones finales del capítulo**

Los estudios numéricos muestran que el método Euler explícito-Galerkin para la ecuación de calor considerada puede ser estabilizada usando la teoría de control via funciones de Lyapunov.

Para el estudio de la ecuación de convección difusión con control, que se plantea en el siguiente Capítulo realizamos un °estudio análogo al que realizamos para el problema de la ecuación de calor.

# Capítulo 4

## Sistema de control de la ecuación de convección difusión

En este capítulo presentamos la estabilización de la discretización de la ecuación de convección difusión unidimensional, usando la teoría de control desarrollada en el capítulo 2. Consideramos la ecuación de convección difusión:

$$\partial_t w(x, t) = \epsilon \partial_{xx} w(x, t) - \kappa \partial_x w(x, t) + f(x, t), \quad \text{para } (x, t) \in \Omega \times [0, T), \quad (4.1)$$

con las condiciones de frontera e iniciales dadas por:

$$\begin{aligned} w(0, t) &= w(L, t) = 0, \\ w(x, 0) &= w_0(x); \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde  $\epsilon > 0$  y  $\kappa > 0$  son constantes. El término forzante  $f(x, t) = \sum_{i=1}^m b_i(x) u_i(t)$ , con  $b(\cdot) \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ , una función dada y  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  es el controlador de la ecuación (4.1). El caso en que  $\kappa < 0$  puede ser tratado de la misma forma.

### 4.1. El esquema lineal estándar de Galerkin

Para obtener la aproximación de Galerkin para el sistema (4.1) - (4.2), multiplicando ambos lados de la ecuación de convección difusión (4.1) por una función test  $\psi(\cdot) \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ , integrando por partes y aplicando las condiciones de frontera dadas en (4.2) [Kru04, Che05], obtenemos la ecuación:

$$\begin{aligned} \int_0^L \partial_t w(x, t) \psi(x) dx &= -\epsilon \int_0^L \partial_{xx} w(x, t) \psi(x) dx - \kappa \int_0^L \partial_x w(x, t) \psi(x) dx \\ &+ \left[ \int_0^L f(x, t) \psi(x) dx \right], \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde para toda  $\psi(\cdot) \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ , la ecuación variacional debe satisfacer (4.3). En este caso decimos que  $w(x, t)$  es una *solución débil* de (4.1) - (4.2) si (4.3) es satisfecha para toda  $\psi(\cdot) \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$  y  $w(0, t) = w(L, t)$  en  $\Omega$ .

Definiendo la forma bilineal  $a(\cdot, \cdot)$  sobre  $\mathcal{H}_0^1(\Omega) \times \mathcal{H}_0^1(\Omega)$  por

$$a(w(\cdot), v(\cdot)) = \int_0^L \left[ \epsilon \frac{dw(x)}{dx} \frac{dv(x)}{dx} + \kappa \frac{dw(x)}{dx} v(x) \right] dx, \quad (4.4)$$

para todo  $w(\cdot), v(\cdot)$  en  $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$ , entonces la ecuación variacional (4.3) puede ser escrita como

$$(\partial_t w(\cdot, t), \psi(\cdot)) = -a(w(\cdot), \psi(\cdot)) + (f(x, t), \psi(\cdot)), \quad (4.5)$$

para todo  $\psi(\cdot) \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$  y tomando  $f(x, t) := \sum_{i=1}^m b_i(x) u_i(t)$  finalmente tenemos que

$$(\partial_t w(\cdot, t), \psi(\cdot)) = -a(w(\cdot), \psi(\cdot)) + (b_i(\cdot), \psi(\cdot)) u_i.$$

El siguiente paso en la aproximación es la elección de un subespacio finito dimensional de  $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$ . Para eso tomamos  $x_i = \frac{i}{n+1}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n+1$  y definimos una función lineal continua a trozos  $\varphi_i(\cdot)$ ,  $i = 1, \dots, n$  sobre el intervalo  $[0, 1]$  por

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{h_{i-1}}(x - x_{i-1}), & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \frac{1}{h_i}(x_{i+1} - x), & x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0 & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]. \end{cases} \quad (4.6)$$

El espacio de elemento finito  $\mathcal{V}_0^N \subset \mathcal{H}_0^1(\Omega)$  de dimensión  $N = n + 1$  es definido por

$$\mathcal{V}_0^N \equiv \text{span}\{\varphi_i(\cdot)\}_{i=1}^n.$$

Siguiendo un procedimiento análogo al expuesto en la Sección 3.2, obtenemos la aproximación de Galerkin por elemento finito, el cual es un sistema lineal definido en  $\mathcal{V}_0^N$ :

$$\begin{cases} M \dot{z}(t) = A z(t) + B u(t), \\ z(0) = z_0, \end{cases} \quad (4.7)$$

donde  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de masa,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz rigidez y  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  es la matriz de control. Si además tomamos  $\psi(x) = \varphi_j$  en la ecuación (4.3), tenemos que

las matrices  $M$ ,  $A$  y  $B$  están definidas respectivamente por

$$\begin{aligned} M &= \left[ \int_0^L \varphi_i \varphi_j dx \right]_{i,j=1}^m, \\ A &= -\epsilon \left[ \int_0^L \varphi_i' \varphi_j' dx \right]_{i,j=1}^m \\ &\quad - \kappa \left[ \int_0^L \varphi_i' \varphi_j dx \right]_{i,j=1}^m, \\ B &= \left[ \int_0^L b_i(x) \varphi_j dx \right]_{i,j=1}^m, \end{aligned}$$

y donde el vector  $z$  es definido como  $z = [z_1, z_2, \dots, z_n]^T$ .

Para resolver numéricamente la ecuación (4.7), discretizamos la variable temporal dividiendo el intervalo  $[0, T]$  como en el capítulo 3. Usando  $u^k$  para denotar  $u(t_k)$  y obtenemos la discretización de Euler explícito (forward) para la ecuación (4.7):

$$M \frac{z^{k+1} - z^k}{\tau} = A z^k + B u^k. \quad (4.8)$$

## 4.2. Estabilización usando Lyapunov

La representación matricial estándar para el diseño de control teniendo en cuenta la ecuación (4.7) es:

$$\begin{aligned} z^{k+1} &= E z^k + D u^k \\ z^{(0)} &= z_0, \end{aligned} \quad (4.9)$$

donde  $E = \mathbf{I} + \tau M^{-1} A$  y  $D = \tau M^{-1} B$ .

Para encontrar el controlador  $u^k$  para la ecuación (4.9), definimos una función candidata a función de Lyapunov  $V$  dada por:

$$V(z^k) = \langle z^k, z^k \rangle.$$

La variación de la función de Lyapunov  $V(z^k)$  denotado por  $\Delta V(z^k)$  esta dada por:

$$\Delta V(z^k) = -(z^k Q z^k + u^k R u^k).$$

donde  $Q$  es una matriz simétrica semidefinida y  $R$  es una matriz simétrica positiva definida. Siguiendo un procedimiento análogo al Teorema 2.3.1, la ley de control para

el sistema 4.9 esta dada por:

$$u^k = -[(D^T P D + R)^{-1} D^T P E] z^k, \quad (4.10)$$

donde la matriz  $F := (D^T P D + R)^{-1} D^T P E$ , y la matriz  $P$  satisface la ecuación de Riccati dada por:

$$P = E^T P E - E^T P D (D^T P D + R)^{-1} D^T P E + Q.$$

Usando la ley de control (4.10), tenemos la forma estabilizada de la ecuación (4.9):

$$\begin{cases} z^{k+1} = (E - DF) z^k, \\ z^{(0)} = z_0. \end{cases} \quad (4.11)$$

En la siguiente sección presentamos los resultados numéricos obtenidos para la ecuación de convección difusión controlada.

### 4.3. Resultados numéricos para la ecuación de convección difusión

En este capítulo presentamos los resultados obtenidos con distintos experimentos numéricos para la ecuación de convección difusión unidimensional:

$$\partial_t w(x, t) = \epsilon \partial_{xx} w(x, t) - 1 \cdot \partial_x w(x, t) + f(x, t), \quad (4.12)$$

para  $(x, t) \in \Omega \times [0, T)$ , con condición de frontera dada por:

$$w(0, t) = w(L, t) = 0. \quad (4.13)$$

Note que el término forzante  $f(x, t)$  toma la forma que hemos definido  $f(x, t) = \sum_{i=1}^m b_i(x) u_i(t)$ . En los experimentos hemos considerado que  $\kappa = 1$ .

Siguiendo [KK04], tomamos  $b(x) = e^x$  y el dominio espacial  $L = [0, 1]$ ; con condición inicial definida por  $w(x, 0) = x \text{seno}(\pi x)$ . El tamaño de la malla es dada por  $h = h^i = 1/2^i$ .

#### 4.3.1. Dependencia de $h$

Presentamos resultados de experimentos numéricos obtenidos haciendo variar  $\epsilon$ , (note que el parámetro convectivo  $\kappa$  es constante e igual a uno).

Realizamos, el experimento numérico considerando el caso en el cual el coeficiente de

difusión es  $\epsilon = 10^{-1}$  Tabla 4.1 y  $\epsilon = 10^{-3}$  Tabla 4.2, respectivamente. Tomando los valores de  $q$  y  $r$ , parámetros de la función de Lyapunov definidos en las Tablas 4.1 y 4.2, respectivamente, y consideraremos los parámetros de estabilidad utilizados para la ecuación de calor (difusión pura), es decir,  $\tau = h$  y  $\tau = h^2/12\epsilon$ , donde  $h$  es el tamaño de la malla y esta definido por  $h = 1/2^i$ . Para realizar una comparación de los datos que se obtuvieron en ambos casos.

Comparando las Tablas 4.1 y 4.2 vemos que el método de Euler explícito-Galerkin controlado con  $\tau = h$  es estable, independiente de la elección de  $\epsilon$ . No obstante, el método Euler explícito-Galerkin no controlado con parámetro de estabilidad  $\tau = h^2/12\epsilon$  es inestable cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ , como se observa en las Tablas 4.1 y 4.2.

$h = 1/2^i$	$q = 10, r = 10^{-3}$ y $\epsilon = 10^{-1}$		
	$\tau = h^2/12\epsilon$	$\tau = h$	$\tau = h$
	no controlado $\rho(E)$	no controlado $\rho(E)$	controlado $\rho(E - DF)$
$i = 3$	0.8627	8.2821	0.6298
$i = 4$	0.9637	18.5025	0.7919
$i = 5$	0.9908	38.0461	0.8923
$i = 6$	0.9977	76.6224	0.9457

Tabla 4.1: Método no controlado y controlado

$h = 1/2^i$	$q = 1, r = 10^{-4}$ y $\epsilon = 10^{-3}$		
	$\tau = h^2/12\epsilon$	$\tau = h$	$\tau = h$
	no controlado $\rho(E)$	no controlado $\rho(E)$	controlado $\rho(E - DF)$
$i = 3$	16.2766	1.5626	0.9999
$i = 4$	8.7923	1.6881	0.9989
$i = 5$	4.4817	1.7210	0.9935
$i = 6$	2.2517	1.7293	0.9816

Tabla 4.2: Método no controlado y controlado

En las figuras se muestran los resultados que obtuvimos para el método de Euler explícito-Galerkin no controlado (arriba) y controlado (abajo), teniendo en cuenta los datos que se muestran en las Tablas 4.1 y 4.2, con parámetro de estabilidad  $\tau = h$  y  $\tau = h^2/12\epsilon$ , respectivamente.

En las Figuras 4.1 y 4.2 vemos el comportamiento del método no controlado y controlado cuando  $\epsilon = 10^{-1}$ , en ambos casos el método es estable, teniendo en cuenta los datos de la tabla 4.1, para  $n = 32$ .

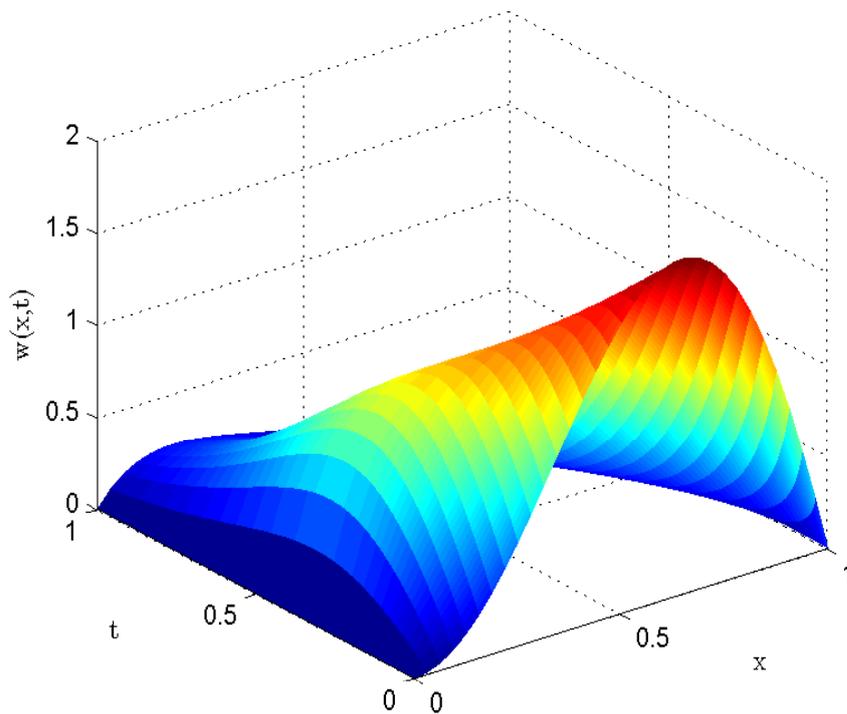


Figura 4.1: Método de Euler explícito-Galerkin, tamaño de la matriz  $1228 \times 1228$ ,  $\tau = 0.0008138$  y  $\epsilon = 10^{-1}$

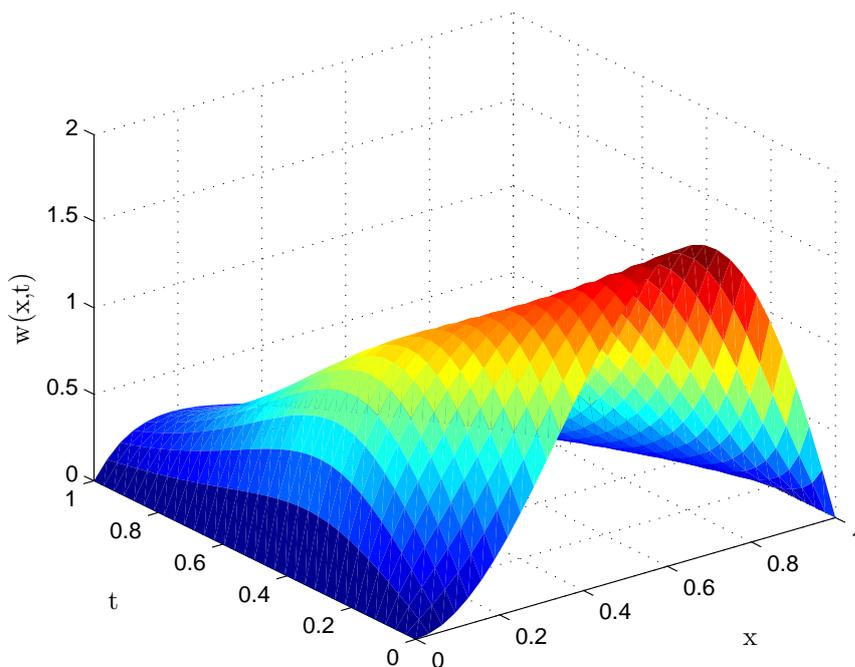


Figura 4.2: Método de Euler explícito-Galerkin controlado, tamaño de la matriz  $32 \times 32$ ,  $\tau = 0.03125$  y  $\epsilon = 10^{-1}$

A partir de los resultados podemos inferir que el método de Euler explícito-Galerkin controlado es estable teniendo en cuenta el parámetro  $\tau = h$ . En este trabajo hemos considerado los valores de  $q$  y  $r$  parámetros de la función de Lyapunov, asumiendo la relación ( $q \gg r$ ).

# Capítulo 5

## Conclusiones y trabajos futuros

En esta tesis investigamos la aplicación de estabilización usando la teoría de funciones de Lyapunov para el método de *Euler explícito-Galerkin* definida para el problema de control de la ecuación de convección difusión. Y concluimos lo siguiente:

El uso de funciones de Lyapunov permite estabilizar el método de Euler explícito tanto para el problema de difusión pura como para el problema de convección difusión.

La estabilización para el método controlado es independiente del parámetro difusivo, dentro de un rango experimentado, produciendo buenas aproximaciones, para el método *Euler explícito-Galerkin*.

Por último, experimentos numéricos para más dimensiones espaciales que las consideradas en este trabajo están en fase de implementación, así como un análisis del método propuesto.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [BGS04] P. Bochev, M. Gunzburger, and J. Shadid. Stability of the supg finite element method for transient advection-diffusion problems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 193:2301-2323, 2004.
- [BK06] A. Bhaya and E. Kaszkurewicz. *Control perspectives on numerical algorithms and matrix problems*. SIAM: advances in design and control, Philadelphia, 2006.
- [BL08] J. Baumeister and A. Leitão. *Introdução à Teoria de Controle e Programação Dinâmica*. Projeto Euclides, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2008.
- [Bon06] R. Bonet. Numérical stabilization of convection-diffusion-reaction problems. Delft Institute of Applied Mathematics Faculty of Electric Engineering, Mathematics and Computer Science Mekelweg 4 2628 CD Delft, Netherlands, 2006.
- [Bré83] H. Brézis. *Analyze fonctionnelle*. Masson Paris, 1983.
- [Che05] Z. Chen. *Finite element methods and their applications*. Scientific computation. Springer, Berlin, 2005.
- [EBT81] G. Carey E. Becker and J. Tinsley. *Finite element methods an introduction*. PRENTICE-HALL, INC., Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1981.
- [FH05] L. Franca and I. Harari. Streamline design of stability parameter for advection-diffusion problems. CNPq, Brasil, 2005.
- [FHM06] L. Franca, G. Hauke, and A. Masud. Revisiting stabilized finite element methods for the advective diffusive equation. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 195:1560-1572, 2006.
- [FMV04] L. Franca, A. Madureira, and F. Valentin. A multiscale finite element methods. European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, ECCMAS, 2004.
- [GQ95] Z. Gajić and M. T. J. Qureshi. *Lyapunov matrix equation in system stability and control*. In: *Mathematics in Science and Engineering*, Vol: 195. Academic Pres, Inc. San Diego, 1995.
- [GS09] G. González and C. Schaerer. Estabilização do método de elementos finitos para a equação de convecção-difusão via funções de Lyapunov. 32º Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, CNMAC, Cuiaba-Brasil, 2009.

- [Hug87] T. Hughes. *The finite element methods linear static and dynamic finite element analysis*. PRENTICE-HALL, INC., Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1987.
- [KK03] B. King and D. A. Krueger. *Burgerséquation: Galerkin Least Squares Approximation and Feedback Control*. *Mathematical and Computer Modelling*, 38:1075-1085, 2003.
- [KK04] B. King and D. Krueger. The 1-d convection diffusion equation: Galerkin least squares approximation and feedback control. 43rd IEEE Conference on Decision and Control. December 2004.
- [Kru04] D. Krueger. Stabilized finite element methods for feedback control of convection-diffusion equations. Doctor in philosophy in mathematics Thesis, Blacksburgo Virginia. July 2004.
- [Lya92] A. Lyapunov. El problema general de la estabilidad del movimiento. PhD Tesis, Kharkov Mathematical Society, 1892.
- [Lya92] A. Lyapunov. The general problem of the stability of motion, of 1892. *International journal of control: Lyapunov centenary*, 1992.
- [NT94] P. Neittaanmäki and D. Tiba. *Optimal control of nonlinear parabolic systems: Theory, algorithms and applications*. In: Series of monographs and textbooks in pure and applied mathematics. Marcel Dekker, Inc., New York, USA, 1994.
- [Oga97] K. Ogata. *Modern Control Engineering*. Prentice Hall, New Jersey., third edition, 1997.
- [Str81] V. Strojil. *State space theory of discrete linear control*. John Wiley & Sons, New York, 1981.
- [Str89] J. Strickwerda. *Finite difference schemes and partial differential equations*. Mathematics Series, Wadsworth & Brooks/Cole, Pacific Grove, California, USA, 1989.
- [Tho97] V. Thomée. *Galerkin finite element methods for parabolic problems*. In: Springer Series in Computational Mathematics. Springer, Berlin, 1997.