

# Elementos finitos estabilizados vía funciones de Lyapunov

Gustavo A. González Armoa

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Universidad Nacional de Asunción

E-mail: [omicron.aa@gmail.com](mailto:omicron.aa@gmail.com)

8 de febrero de 2010

- 1 **Motivación**
- 2 **Objetivo**
- 3 **Introducción**
- 4 **Análisis de sistemas dinámicos lineales discretos**
- 5 **Definición del problema**
- 6 **Resultados**
- 7 **Conclusión**
- 8 **Referencias Bibliográficas**

- 1 **Motivación**
- 2 Objetivo
- 3 Introducción
- 4 Análisis de sistemas dinámicos lineales discretos
- 5 Definición del problema
- 6 Resultados
- 7 Conclusión
- 8 Referencias Bibliográficas

# Motivación

Consideremos la ecuación de calor (difusión pura) unidimensional en  $\Omega = [0, L]$ , dado por:

$$\partial_t w(x, t) = \epsilon \partial_{xx} w(x, t) + f(x, t), \quad \text{para } (x, t) \in \Omega \times [0, T]; \quad (1)$$

sujeta a las condiciones de frontera de Dirichlet e iniciales dadas por:

$$\begin{aligned} w(0, t) &= w(L, t) = 0, \\ w(x, 0) &= w_0(x). \end{aligned} \quad (2)$$

Donde,  $\epsilon \in \mathbb{R}$  es el parámetro de difusión,  $t$  representa el tiempo,  $x$  representa la variable espacial,  $\partial_t w(x, t)$  representa la variación temporal,  $\partial_{xx} w(x, t)$  representa la variación espacial y  $f(x, t)$  representa el término forzante.

Usando el método de Galerkin obtenemos

$$\begin{cases} M \dot{z}(t) &= A z(t) + B b(t), \\ z^{(0)} &= z_0, \end{cases} \quad (3)$$

donde  $z, b \in \mathbb{R}^m$  son los vectores de incógnitas y forzante, respectivamente. Las matrices  $M, A, B \in \mathbb{R}^{m \times m}$  son las matrices de masa, rigidez y entrada, respectivamente.

Es importante notar que las matrices  $M$  y  $A$  dependen del parámetro de discretización espacial de la malla  $h$ .

Además la matriz  $A$  depende de  $\epsilon$ .

Discretizando el intervalo de tiempo  $[0, T]$  en  $n$  intervalos iguales y usando el  $\theta$ - método para la discretización temporal obtenemos:

$$M \frac{z^{j+1} - z^j}{\tau} = \theta A z^j + (1 - \theta) A z^{j+1} + \theta B b^j + (1 - \theta) B b^{j+1} \quad (4)$$

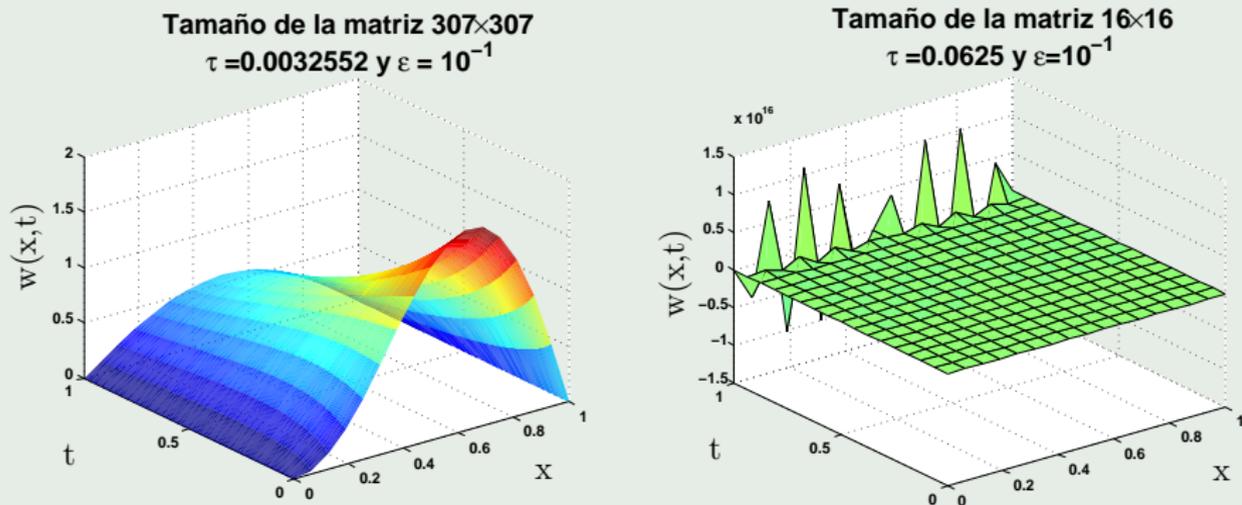
obtenemos la recurrencia:

$$(M - \tau(1 - \theta)A) z^{j+1} = (M - \tau\theta A)z^j + \theta\tau Bb^j + \tau(1 - \theta)Bb^{j+1}. \quad (5)$$

### Importante

- Si  $\theta \neq 1$  la recurrencia es implícita consecuentemente es necesario invertir la matriz  $(M - \tau(1 - \theta)A)$ .
- Si  $\theta = 1$  la recurrencia es explícita, en este caso la resolución de la matriz en cada instante de tiempo es simple.
- $\tau$  es el tiempo de simulación.

Cuando tomamos, por ejemplo,  $\epsilon = 10^{-1}$ , parámetro de difusión y  $h = 1/8$ , tamaño de la malla, obtenemos los siguientes resultados.



**Figura: 1** Método de Euler explícito-Galerkin.

Para una solución físicamente relevante es necesario considerar  $\tau$  muy pequeño ( $\tau \ll h$ ). Esto encarece el método de Euler explícito-Galerkin.

- 1 Motivación
- 2 Objetivo**
- 3 Introducción
- 4 Análisis de sistemas dinámicos lineales discretos
- 5 Definición del problema
- 6 Resultados
- 7 Conclusión
- 8 Referencias Bibliográficas

# Objetivo

- El objetivo de este trabajo consiste en formular un método numérico estable para resolver tanto la ecuación de calor como la ecuación de convección difusión.
  - Estabilizar el método de Euler explícito-Galerkin, para valores de  $\tau$  grande ( $\tau = h$ ).
  - Explorar la teoría de control para estabilizar el método de Euler explícito-Galerkin.

- 1 Motivación
- 2 Objetivo
- 3 Introducción**
- 4 Análisis de sistemas dinámicos lineales discretos
- 5 Definición del problema
- 6 Resultados
- 7 Conclusión
- 8 Referencias Bibliográficas

## Definición 1

Se denomina distribución sobre  $\Omega$  a toda forma bilineal  $T$ , continua en  $\mathcal{D}(\Omega)$ , o sea una distribución es un funcional  $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ ; que satisface las condiciones

- 1  $T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v)$ .
- 2  $T$  es continua en  $\mathcal{D}(\Omega)$ , es decir, si  $(\phi_\nu)$  converge para cero en  $\mathcal{D}(\Omega)$ , entonces  $T(\phi_\nu)$  converge para cero en  $\mathbb{R}$ .

El espacio de las distribuciones con la noción de convergencia es denotado por  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

## El producto interno es una distribución

Las funcionales localmente integrables  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$  definen unívocamente una distribución dada por

$$(T_u, v) = \int_{\Omega} u(x) v(x) dx, \quad \forall u \in \mathcal{D}'(\Omega); \forall v \in \mathcal{D}(\Omega) \quad (6)$$

## Derivada en el sentido de las distribuciones

Para  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  y  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$  definimos la **derivada de orden  $n$  en el sentido de las distribuciones** como sigue:

$$\left( \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}, v \right) = (-1)^\alpha \left( u, \frac{\partial^\alpha v}{\partial x^\alpha} \right). \quad (7)$$

En este caso toda distribución es infinitamente derivable, pues  $v \in C_0^\infty(\Omega)$

## Definición 2

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , definimos el **espacio  $L^2(\Omega)$** :

$$L^2(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx < \infty \right\} \quad (8)$$

Cuyo producto interno y norma son definidas por:

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx \quad \text{y} \quad |u|^2 = \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \quad (9)$$

## Definición 3

El **espacio de Sobolev  $H^p(\Omega)$** ,  $p = 0, 1, \dots$ ,  $p \in \mathbb{N}$  es definido por:

$$H^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; u \in L^2(\Omega), \frac{\partial^\alpha u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} \in L^2(\Omega) \right\}. \quad (10)$$

Note que el espacio  $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ .

## Espacios $H^1(\Omega)$

Note que para  $p = 1$ , tenemos que

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\} \quad (11)$$

En este caso el producto interno en  $H^1$  esta definido por:

$$(u, v) = \int_{\Omega} uv dx + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx \quad (12)$$

La norma se define como  $\|u\|_{H^1}^2 = (u, u)$ .

## Espacio $H_0^1(\Omega)$

Un subespacio  $H_0^1(\Omega)$  de  $H^1(\Omega)$  se define como

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega); u = 0 \text{ sobre la frontera} \right\} \quad (13)$$

- 1 Motivación
- 2 Objetivo
- 3 Introducción
- 4 Análisis de sistemas dinámicos lineales discretos**
- 5 Definición del problema
- 6 Resultados
- 7 Conclusión
- 8 Referencias Bibliográficas

## Análisis de sistemas dinámicos lineales discretos

Consideremos el sistema dinámico lineal de tiempo discreto:

$$\begin{cases} z^{k+1} &= A z^k, & k \in \mathbb{N} \\ z^{k_0} &= z^0, \end{cases} \quad (14)$$

donde

$$z^k \in \mathbb{R}^m \text{ y}$$

$A \in \mathbb{R}^{m \times m}$  es una matriz constante.

Para la ecuación (14) un vector  $z^* \in \mathbb{R}^m$  es llamado **punto de equilibrio** si  $z^* = A z^*$  [Oga97, BK06].

### Definición 4

El sistema (14) es llamado **localmente convergente** si para  $z^*$  existe un  $\delta > 0$  tal que si  $\|z^0 - z^*\| < \delta$ , la solución  $z^k$  existe y  $\lim_{k \rightarrow \infty} z^k = z^*$ , además es **globalmente convergente** si  $\lim_{k \rightarrow \infty} z^k = z^*$  para todo  $z^0$ .

## Definición 5

El punto de equilibrio  $z^* = \mathbf{0}$  de la ecuación  $z^{k+1} = A z^k$  es:

- **Estable** o estable en el sentido de Lyapunov si, dado  $\epsilon > \mathbf{0}$  existe  $\delta > \mathbf{0}$  tal que  $\|z^0 - z^*\| < \delta$  implica  $\|z^k - z^*\| < \epsilon$  para todo  $k \geq \mathbf{0}$ ; y es denominado **inestable** si no es estable.
- **Atractivo** si existe  $\delta > \mathbf{0}$  tal que  $\|z^0 - z^*\| < \delta$  implica  $\lim_{k \rightarrow \infty} z^k = z^*$ .  
Si  $\delta = \infty$ , entonces  $z^*$  es **globalmente atractivo**.
- **Asintóticamente estable** si es estable y atractivo; **globalmente asintóticamente estable** si es estable y globalmente atractivo.

Si el punto de equilibrio  $z^*$  es estable, decimos que el sistema dinámico lineal de tiempo discreto  $z^{k+1} = A z^k$  es estable [Oga97, BK06].

## Definición 6

La función  $V$  es una **función de Lyapunov** en un subconjunto  $W \subset \mathbb{R}^n$  si

- $V$  es continuo en  $W$ , y
- el decaimiento de  $\Delta V \leq 0$ , tal que  $z$  y  $Az$  estén en  $W$ .

Donde la variación de  $V$  relativo al sistema  $z^{k+1} = Az^k$  se define como

$$\Delta V(z^k) := V(z^{k+1}) - V(z^k) = V(Az^k) - V(z^k). \quad (15)$$

## Definición 7

La función escalar  $V$  es **definida positiva** en  $z^*$  si

- $V(z^*) = 0$ , y
- $V(z) > 0$  para todo  $z \in B(z, \xi)$ , para algún  $\xi > 0$ .

Decimos que una matriz  $Q$  simétrica es definida positiva si su forma cuadrática  $z^T Q z > 0$  para todo  $z \neq 0$ .

## Teorema 1

- Si  $V$  es una función de Lyapunov para el sistema  $z^{k+1} = A z^k$  sobre una vecindad  $W$  del punto de equilibrio  $z^* = \mathbf{0}$  y  $V$  es definida positiva con respecto a  $z^* = \mathbf{0}$ , entonces  $z^* = \mathbf{0}$  es estable.
- Si además  $\Delta V < \mathbf{0}$ , siempre que  $z$  y  $Az$  estén en  $W$ , entonces  $z^* = \mathbf{0}$  es asintóticamente estable.
- Más aún, si  $W = \mathbb{R}^m$  y  $V(z) \rightarrow \infty$  cuando  $\|z\| \rightarrow \infty$  entonces  $z^* = \mathbf{0}$  es globalmente asintóticamente estable.

## Observación 1

Un resultado básico de estabilidad, cuando se considera un sistema dinámico lineal de tiempo discreto de la forma  $z^{k+1} = A z^k$  es que el punto de equilibrio  $z^* = \mathbf{0}$  es estable si y solamente si el radio espectral de la matriz  $A$  verifica que  $\rho(A) \leq 1$  [GQ95, BL08].

## Teorema 2

El punto de equilibrio  $z^* = \mathbf{0}$  del sistema dinámico lineal de tiempo discreto  $z^{k+1} = A z^k$  es asintóticamente estable si y solamente si para toda matriz simétrica definida positiva  $Q = Q^T > \mathbf{0}$ , existe una única matriz  $P = P^T > \mathbf{0}$  tal que  $\Delta V(z^k) = -(z^k)^T Q z^k$ .

Cuando  $V(z^k) := (z^k)^T P z^k$ , la expresión  $\Delta V(z^k) = -(z^k)^T Q z^k$  toma la forma:

$$A^T P A - P = -Q. \quad (16)$$

La ecuación (16) es conocida como *ecuación de Lyapunov* de tiempo discreto.

## Control de sistemas dinámicos lineales de tiempo discreto

Se considera el sistema dinámico lineal discreto autónomo:

$$\begin{cases} z^{k+1} &= A z^k + B u^k, & \text{con } k \in \mathbb{N} \\ z^{k_0} &= z^0, \end{cases} \quad (17)$$

donde

$u^k \in \mathbb{R}^m$  es el vector de control,

$z^k \in \mathbb{R}^m$  es el vector de estado,

$A, B \in \mathbb{R}^{m \times m}$  son matrices constantes e invariantes en el tiempo (sistema autónomo).

Sea  $V : \mathbb{R}^m - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+$  con  $V(0) = 0$ , satisface

$$\Delta V(z^k) := V(z^{k+1}) - V(z^k) = V(A z^k + B u(z^k)) - V(z^k) < 0. \quad (18)$$

Entonces, denominamos a la función  $V(\cdot)$  *función de control de Lyapunov* para el sistema  $z^{k+1} = A z^k + B u^k$  [BK06].

## Función de Lyapunov para la realimentación de estados

Asumiremos que la ley de control toma la siguiente forma

$$\mathbf{u}^k = -\mathbf{F} \mathbf{z}^k$$

donde, encontrar  $\mathbf{u}^k$  es equivalente a encontrar una matriz  $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  tal que la solución del sistema

$$\mathbf{z}^{k+1} = (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{F}) \mathbf{z}^k, \quad (19)$$

sea asintóticamente estable con respecto al punto de equilibrio  $\mathbf{z}^* = \mathbf{0}$ .

Ahora para el caso del sistema  $\mathbf{z}^{k+1} = \mathbf{A} \mathbf{z}^k + \mathbf{B} \mathbf{u}^k$ , la variación de la función de Lyapunov  $V(\mathbf{z}^k)$  está dado por:

$$\Delta V(\mathbf{z}^k) = -(\mathbf{z}^k)^T \mathbf{Q} \mathbf{z}^k - (\mathbf{u}^k)^T \mathbf{R} \mathbf{u}^k, \quad (20)$$

donde  $\mathbf{Q} = \mathbf{q} \mathbf{I}$  es simétrica definida positiva (o semidefinida positiva) y  $\mathbf{R} = \mathbf{r} \mathbf{I}$  es simétrica definida positiva,  $\mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}$  e  $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  es la matriz identidad.

## Función de Lyapunov para la realimentación de estados

La matriz  $F$  de la ley de control  $u^k = -F z^k$  toma la forma [Str81]:

$$F = (B^T P B + R)^{-1} B^T P A, \quad (21)$$

donde la matriz  $P$  simétrica definida positiva, es obtenida resolviendo la ecuación de Riccati [Str81]:

$$P = A^T P A - A^T P B (B^T P B + R)^{-1} B^T P A + Q. \quad (22)$$

### Teorema 3

La ley de control para el sistema lineal de tiempo discreto  $z^{k+1} = A z^k + B u^k$  para una matriz definida positiva  $R$ , se define como

$$u^k = -(B^T P B + R)^{-1} B^T P A z^k, \quad (23)$$

donde la matriz  $P$  satisface la ecuación (22).

- 1 Motivación
- 2 Objetivo
- 3 Introducción
- 4 Análisis de sistemas dinámicos lineales discretos
- 5 Definición del problema**
- 6 Resultados
- 7 Conclusión
- 8 Referencias Bibliográficas

## Definición del problema: Convección difusión

Consideremos la ecuación de convección difusión unidimensional en  $\Omega = [0, L]$  con término forzante  $f(x, t)$  dada por:

$$\partial_t w(x, t) + \kappa \partial_x w(x, t) = \epsilon \partial_{xx} w(x, t) + f(x, t), \quad (24)$$

para  $(x, t) \in \Omega \times (0, T)$ , y sujeta a las condiciones de frontera de Dirichlet e iniciales dadas por:

$$\begin{aligned} w(0, t) &= w(L, t) = 0, \\ w(x, 0) &= w_0(x). \end{aligned} \quad (25)$$

Donde

$$w_0(x) \in L^2(\Omega) \text{ y } f(x, t) \in L^2(\Omega) \times L^2(0, T).$$

$$w(x, t) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(0, T).$$

El término forzante  $f(x, t)$  es usado para controlar la ecuación (24). Los parámetros  $\epsilon, \kappa \in \mathbb{R}$  son los coeficientes de difusión y convección, respectivamente.

## Formulación Variacional

Multiplicando la ecuación

$$\partial_t w(x, t) + \kappa \partial_x w(x, t) = \epsilon \partial_{xx} w(x, t) + f(x, t),$$

por una función de prueba  $\varphi \in S = H_0^1(\Omega)$  e integrando sobre  $\Omega$ . Se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_t w(x, t) \varphi(x) dx &= \epsilon \int_{\Omega} w_{xx}(x, t) \varphi(x) dx - \kappa \int_{\Omega} w_x(x, t) \varphi(x) dx \\ &+ \int_{\Omega} f(x, t) \varphi(x) dx. \end{aligned} \quad (26)$$

## Formulación Variacional

Integrando por partes sobre  $\Omega$  y aplicando las condiciones de frontera

$$(w(0, t) = w(L, t) = 0.$$

Se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_t w(x, t) \varphi(x) dx &= -\epsilon \int_{\Omega} w_x(x, t) \varphi'(x) dx - \kappa \int_{\Omega} w_x(x, t) \varphi(x) dx \\ &+ \int_{\Omega} f(x, t) \varphi(x) dx. \end{aligned} \quad (27)$$

Y la formulación variacional esta dada por;

$$(\partial_t w, \varphi) + a(w, \varphi) = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in S; \quad (28)$$

donde  $a(\cdot, \cdot) : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$  es un funcional bilineal.

## Formulación Variacional

En la ecuación

$$(\partial_t w, \varphi) + a(w, \varphi) = (f, \varphi),$$

los funcionales  $a(\cdot, \cdot)$  y  $(f, \varphi)$ , están definidos por [Tho97, Che05]:

$$a(w, \varphi) := \int_{\Omega} [\epsilon \partial_x w(x, t) \cdot \partial_x \varphi + \kappa \partial_x w(x, t) \cdot \varphi] dx, \quad (29)$$

y

$$(f(x, t), \varphi) := \int_{\Omega} f(x, t) \varphi dx. \quad (30)$$

## Aproximación de Galerkin

Si  $S_h$  es un subespacio de elementos finitos de  $S = H_0^1(\Omega)$ , entonces la aproximación por elementos finitos consiste en encontrar  $w_h = w_h(x, t)$  el cual pertenece a  $S_h$  para cada  $t \in (0, T)$  y satisface

$$(\partial_t w_h, v_h) + a(w_h, v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in S_h. \quad (31)$$

De forma a encontrar la aproximación de Galerkin asumimos que  $w_h(x, t)$  tiene la siguiente forma [NT94]:

$$w_h(x, t) = \sum_{i=1}^m z_i(t) \varphi_i(x), \quad (32)$$

donde el conjunto de los  $\varphi_i \forall i = 1, \dots, m$ ; constituyen una base para  $S_h$ .

Asumimos que el término forzante tiene la forma  $f(x, t) = \sum_{i=1}^m b_i(x) u_i(t)$ .

En el contexto de este trabajo asumimos que los  $\varphi_i$  son funciones lineales continuas a trozos, sobre el intervalo  $[0, 1]$ .

## Aproximación de Galerkin

Introduciendo  $w_h(x, t) = \sum_{i=1}^m z_i(t)\varphi_i(x)$  y  $f(x, t) = \sum_{i=1}^m b_i(x)u_i(t)$  en

$$(\partial_t w_h, v_h) + a(w_h, v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in S_h.$$

obtenemos el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\sum_{j=1}^m (\varphi_i, \varphi_j) \frac{dz_j}{dt} + \sum_{j=1}^m a(\varphi_i, \varphi_j) z_j = \sum_{j=1}^m (b_i, \varphi_j) u_j, \quad i = 1, \dots, m; \quad (33)$$

donde las incógnitas son los  $z_j(t)$ . Los valores iniciales para  $z_j(0)$  son determinados observando la siguiente relación

$$\sum_{j=1}^m z_j(0)\varphi_j = z_h^0.$$

## Aproximación de Galerkin

Y definimos las matrices  $M$ ,  $A$  y  $B$  respectivamente como

$$\begin{aligned}
 M &= \left[ \int_0^L \varphi_i \varphi_j dx \right]_{i,j=1}^m, \\
 A &= -\epsilon \left[ \int_0^L \varphi_i' \varphi_j' dx \right]_{i,j=1}^m - \kappa \left[ \int_0^L \varphi_i' \varphi_j dx \right]_{i,j=1}^m \quad \text{y} \\
 B &= \left[ \int_0^L b_i(x) \varphi_j dx \right]_{i,j=1}^m.
 \end{aligned}$$

En el contexto de este trabajo consideramos que para cada “ $i$ ” la función  $b_i(x)$  es constante en cada intervalo, es decir, constante por partes.

## Aproximación de Galerkin

Denotando el vector de incógnitas por  $z = (z_1, \dots, z_m)^T$ , y re-escribiendo

$$\sum_{j=1}^m (\varphi_i, \varphi_j) \frac{dz_j}{dt} + \sum_{j=1}^m a(\varphi_i, \varphi_j) z_j = \sum_{j=1}^m (b_i, \varphi_j) u_j, \quad i = 1, \dots, m;$$

en forma matricial, obtenemos:

$$\begin{cases} M \dot{z}(t) &= A z(t) + B u(t), \\ z^{(0)} &= z_0, \end{cases} \quad (34)$$

donde las matrices  $M$ ,  $A$  y  $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ .

A seguir realizamos una discretización temporal del sistema matricial (34).

## Discretización

Para resolver numéricamente la ecuación

$$\begin{cases} M\dot{z}(t) &= Az(t) + Bu(t), \\ z^{(0)} &= z_0, \end{cases}$$

discretizamos la variable temporal dividiendo el intervalo  $[0, T]$  como:  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ , con nodos equidistantes  $t_r = r\tau$  y con paso del tiempo  $\tau = T/n$ . Usando  $u^r$  para denotar  $u(t_r)$ , obtenemos la discretización de Euler explícito-Galerkin

$$M \frac{z^{r+1} - z^r}{\tau} = Az^r + Bu^r.$$

La condición de estabilidad para este método se establece en el siguiente Lema [Tho97].

### Lema 1

*Sean las matrices  $A$  y  $M$  simétricas definidas positivas. Sean  $\lambda_j$  los autovalores generalizados de la matriz  $A$  con respecto a  $M$ . Entonces el esquema de Euler explícito-Galerkin es estable si:*

$$\tau \leq \min\{c_1/\epsilon, c_2h^2/\epsilon\}.$$

## Estabilización usando Lyapunov

La representación matricial para el diseño de control teniendo en cuenta la ecuación  $M\dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t)$  es:

$$\begin{aligned} z^{r+1} &= E z^r + D u^r \\ z^{(0)} &= z_0, \end{aligned} \quad (35)$$

donde  $E = 1 + \tau M^{-1}A$  y  $D = \tau M^{-1}B$ .

Para encontrar el controlador  $u^r$  en la ecuación (35), definimos una función candidata a función de Lyapunov  $V$  dada por:

$$V(z^r) = \langle z^r, z^r \rangle.$$

La variación de la función de Lyapunov  $V(z^r)$  denotado por  $\Delta V(z^r)$  esta dada por:

$$\Delta V(z^r) = -(z^r Q z^r + u^r R u^r),$$

## Estabilización usando Lyapunov

Siguiendo un procedimiento análogo al Teorema 3, la ley de control para el sistema  $z^{r+1} = E z^r + D u^r$  esta dada por:

$$u^r = -[(D^T P D + R)^{-1} D^T P E] z^r, \quad (36)$$

donde la matriz  $F := (D^T P D + R)^{-1} D^T P E$ , y la matriz  $P$  satisface la ecuación de Riccati dada por:

$$P = E^T P E - E^T P D (D^T P D + R)^{-1} D^T P E + Q.$$

Usando la ley de control (36), tenemos la forma estabilizada de la ecuación  $z^{r+1} = E z^r + D u^r$ :

$$\begin{cases} z^{r+1} &= (E - DF) z^r, \\ z^{(0)} &= z_0. \end{cases} \quad (37)$$

- 1 Motivación
- 2 Objetivo
- 3 Introducción
- 4 Análisis de sistemas dinámicos lineales discretos
- 5 Definición del problema
- 6 Resultados**
- 7 Conclusión
- 8 Referencias Bibliográficas

## Estabilización para $\tau = h$ y $\kappa = 0$ (Difusión Pura)

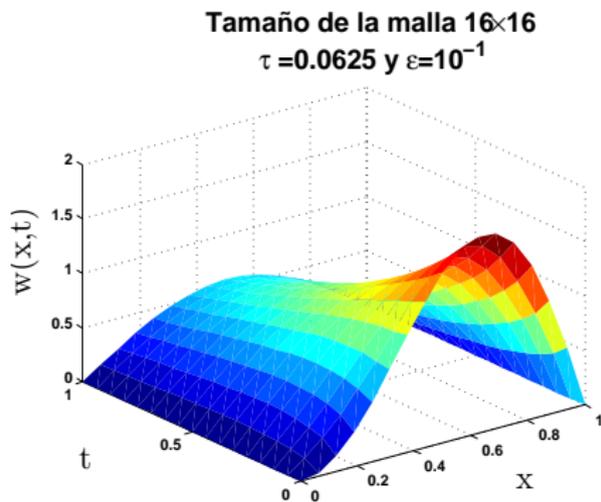
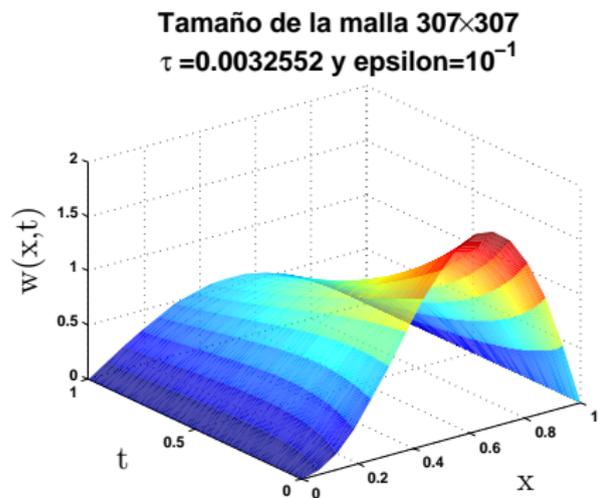
En la Tabla 1, se presenta el funcionamiento del controlador para  $q$ ,  $r$  y  $\epsilon$  dados y  $h = 1/2^i$  tamaño de la malla. Note que con el uso del controlador la condición de estabilidad sobre  $\tau$  es relajada considerablemente.

$h = 1/2^i$	$q = 10, r = 10^{-3}$ y $\epsilon = 10^{-1}$		
	$\tau = h^2/12\epsilon$	$\tau = h$	$\tau = h$
	no controlado $\rho(E)$	no controlado $\rho(E)$	controlado $\rho(E - DF)$
$i = 3$	0.8939	8.584	0.8940
$i = 4$	0.9717	18.6570	0.9406
$i = 5$	0.9928	38.1240	0.9694
$i = 6$	0.9982	76.6614	0.9846

**Tabla: 1** Método no controlado y controlado

## Estabilización para $\tau = h$ y $\kappa = 0$ (Difusión Pura)

En las Figuras 2 observamos el resultado obtenido para la ecuación (1) utilizando  $\epsilon = 10^{-1}$ ,  $\tau = h^2/12\epsilon$  (para el no controlado, Figura 2 izquierda) y  $\tau = h$  (para el controlado, Figura 2 derecha), con  $h = 1/16$



**Figura: 2** Método de Euler explícito-Galerkin.

## Estabilización de la ecuación de convección difusión para $\tau = h$ y $\kappa = 1$

Presentamos los resultados para la ecuación de convección difusión unidimensional:

$$\partial_t w(x, t) + 1 \cdot \partial_x w(x, t) = \epsilon \partial_{xx} w(x, t) + f(x, t), \quad (38)$$

Realizamos, el experimento numérico considerando el caso en el cual el coeficiente de difusión es  $\epsilon = 10^{-1}$  y  $\epsilon = 10^{-3}$ . Consideramos además como parámetros de estabilidad  $\tau = h$  y  $\tau = h^2/12\epsilon$ , donde  $h$  es el tamaño de la malla, definido por  $h = 1/2^i$  y la dimensión espacial  $n = 1/h$  ver Tabla 2 y 3.

Comparando las Tablas 2 y 3 vemos que el método de Euler explícito-Galerkin controlado con  $\tau = h$  es estable. No obstante, el método Euler explícito-Galerkin no controlado con parámetro de estabilidad  $\tau = h^2/12\epsilon$  es inestable.

$h = 1/2^i$	$q = 10, r = 10^{-3}$ y $\epsilon = 10^{-1}$		
	$\tau = h^2/12\epsilon$	$\tau = h$	$\tau = h$
	no controlado $\rho(E)$	no controlado $\rho(E)$	controlado $\rho(E - DF)$
$i = 3$	0.8627	8.2821	0.6298
$i = 4$	0.9637	18.5025	0.7919
$i = 5$	0.9908	38.0461	0.8923
$i = 6$	0.9977	76.6224	0.9457

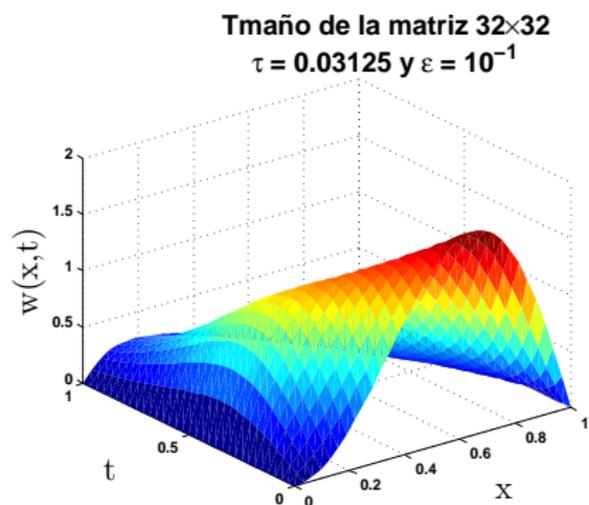
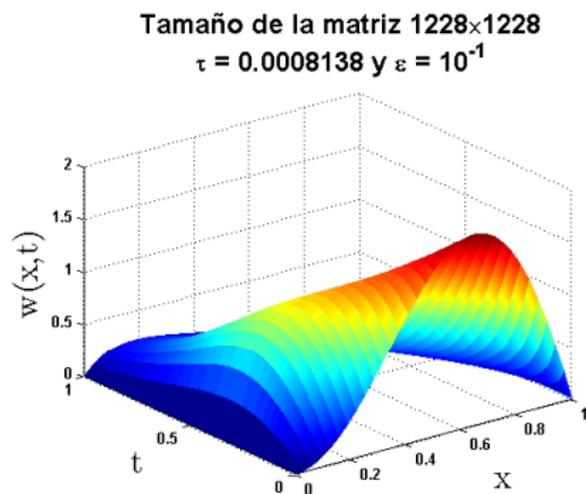
**Tabla: 2** Método controlado y no controlado

$h = 1/2^i$	$q = 1, r = 10^{-4}$ y $\epsilon = 10^{-3}$		
	$\tau = h^2/12\epsilon$	$\tau = h$	$\tau = h$
	no controlado $\rho(E)$	no controlado $\rho(E)$	controlado $\rho(E - DF)$
$i = 3$	16.2766	1.5626	0.9999
$i = 4$	8.7923	1.6881	0.9989
$i = 5$	4.4817	1.7210	0.9935
$i = 6$	2.2517	1.7293	0,9816

**Tabla: 3** Método no controlado y controlado

## Resultados para la ecuación de convección difusión

En las Figuras 3, se muestran el resultado para el método de Euler explícito-Galerkin no controlado (izquierdo) y controlado (derecho)  $\epsilon = 10^{-1}$ , en ambos casos el método es estable, teniendo en cuenta los datos de la Tabla 2.



**Figura: 3** No controlado (izq.) y controlado (der.).

## Resultados

A partir de los resultados podemos inferir que el método de Euler explícito-Galerkin controlado es estable cuando el parámetro de estabilidad  $\tau = h$ .

En todo este trabajo hemos considerado los valores de  $q$  y  $r$  parámetros de la función de Lyapunov, tal que  $q \gg r$ .

- 1 Motivación
- 2 Objetivo
- 3 Introducción
- 4 Análisis de sistemas dinámicos lineales discretos
- 5 Definición del problema
- 6 Resultados
- 7 Conclusión**
- 8 Referencias Bibliográficas

## Conclusión

## Conclusión

- En esta tesis investigamos la aplicación de estabilización usando la teoría de funciones de Lyapunov para el método de *Euler explícito-Galerkin* definida para el problema de control de la ecuación de convección difusión. Y concluimos lo siguiente:

## Conclusión

- En esta tesis investigamos la aplicación de estabilización usando la teoría de funciones de Lyapunov para el método de *Euler explícito-Galerkin* definida para el problema de control de la ecuación de convección difusión. Y concluimos lo siguiente:
- El uso de funciones de Lyapunov permite estabilizar el método de Euler explícito-Galerkin tanto para el problema de difusión pura como para el problema de convección difusión.

## Conclusión

- En esta tesis investigamos la aplicación de estabilización usando la teoría de funciones de Lyapunov para el método de *Euler explícito-Galerkin* definida para el problema de control de la ecuación de convección difusión. Y concluimos lo siguiente:
- El uso de funciones de Lyapunov permite estabilizar el método de Euler explícito-Galerkin tanto para el problema de difusión pura como para el problema de convección difusión.
- Por último, experimentos numéricos para más dimensiones espaciales que las consideradas en este trabajo están en fase de implementación, así como un análisis del método propuesto.

- 1 Motivación
- 2 Objetivo
- 3 Introducción
- 4 Análisis de sistemas dinámicos lineales discretos
- 5 Definición del problema
- 6 Resultados
- 7 Conclusión
- 8 Referencias Bibliográficas**

## Bibliografía

-  [BGS04] P. Bochev, M. Gunzburguer and J. Shadid. “Stability of the SUPG finite element method for transient advection-diffusion problems”, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 193:2301-2323, 2004.
-  [BK06] A. Bhaya and E. Kaszkurewicz. *Control perspectives on numerical algorithms and matrix problems*. SIAM: advances in design and control, Philadelphia, 2006.
-  [BL08] J. Baumeister and A. Leitão. *Introdução à Teoria de Controle e Programação Dinâmica*, Projeto Euclides, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2008.
-  [Che05] Z. Chen *Finite element methods and their applications*. Scientific computation. Springer, Berlin, 2005.
-  [FHM06] L. Franca, G. Hauke and A. Masud. “Revisiting stabilized finite element methods for the advective diffusive equation”, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 195:1560-1572, 2006.
-  [GQ95] Z. Gajić and M. T. J. Qureshi. *Lyapunov matrix equation in system stability and control*, In: *Mathematics in Science and Engineering*, Vol: 195. Academic Pres, Inc. San Diego, 1995.

## Bibliografía



[KK04] B. King. and D. Krueger. “The 1-D Convection Diffusion Equation: Galerkin Least Squares Approximation and Feedback Control”, 43rd IEEE Conference on Decision and Control. Decemder, 2004.



[Kru04] D. Krueger “Stabilizad finite element methods for feedback control of convection-diffusion equations”, doctor in philosophy in mathemathics Thesis, Blacksburgo Virginia. July, 2004.



[NT94] P. Neittaanmäki and D. Tiba. Optimal control of nonlinear parabolic systems: Theory, algorithms and applications. In: Series of monographs and textbooks in pure and applied mathematics. Marcel Dekker, Inc., New York, USA, 1994.



[Oga97] K. Ogata. “Modern Control Engineering”, third edition, Prentice Hall, New Jersey, 1997.



[Str81] V. Strejc. State space theory of discrete linear control. John Wiley & Sons, New York, 1981.



[Tho97] V. Thomée. *Galerkin finite element methods for parabolic problems*. In: Springer Series in Computatinal Mathematics. Springer, Berlin, 1997.

## AGRADECIMIENTOS

**MUCHAS  
GRACIAS.....**