

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN**

**Facultad de Ingeniería**

**Ingeniería Electrónica**



**Análisis de Osciladores No Lineales de Segundo Orden. Caso  
de Estudio: Ferroresonancia en Transformadores**

**César Francisco Bogado Martínez**

San Lorenzo, Paraguay

2012

**ANÁLISIS DE OSCILADORES NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN. CASO DE  
ESTUDIO: FERRORESONANCIA EN TRANSFORMADORES**

---

**Miembros del Consejo Directivo**

**Consejeros Titulares**

- Prof. Ing. Isacio Vallejos Aquino (Decano)
- Prof. Ing. Maria Teresa Pino Rodriguez (Vice Decano)
- Prof. Ing. Amilcar Troche (Docente)
- Prof. Ing. César Sitjar (Docente)
- Prof. Ing. Francisco R. Delgado Marquez (Docente)
- Prof. Ing. Diógenes Sartorio (Docente)
- Prof. Ing. Cirilo Hernáez (Docente)
- Prof. Ing. Ramón Pistilli S. (Docente - C.S.U.)
- Ing. Pablo Rodriguez (No Docente)
- Ing. Gabriel Enrique Fleitas Ferrari (No Docente)
- Est. Victor Omar Morínigo López (Estudiante)
- Est. Jorge Manuel Muller Giménez (Estudiante)
- Est. Vicente Javier Chaparro Ruíz Díaz (Estudiante)

**Consejeros suplentes**

- Prof. Ing. Carlos M. Montero Volpe (Docente - CSU)
- Prof. Ing. María Teresa Pino (Docente)
- Prof. Ing. Luís María Gulino Canese (Docente)
- Ing. Ignacio Daniel Velázquez G. ( No Docente)
- Ing. Alfredo Javier Coronel Correa ( No Docente)
- Est. Víctor Daniel Portillo Galván (Estudiante)
- Est. Justo Javier Fernández Arguello (Estudiante)
- Est. Sergio Daniel Vera Urquhart (Estudiante)

**ANÁLISIS DE OSCILADORES NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN. CASO DE  
ESTUDIO: FERRORESONANCIA EN TRANSFORMADORES**

---

*Cuando llamas misteriosa a una cosa significa que no la has comprendido.*

*(Lord Kelvin)*

*El genio es uno por ciento inspiración y noventa y nueve por ciento transpiración.*

*(Thomas A. Edison)*

**ANÁLISIS DE OSCILADORES NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN. CASO DE  
ESTUDIO: FERRORESONANCIA EN TRANSFORMADORES**

---

**Dedicatoria**

*A mis padres por su consejo y apoyo incondicional.*

*A mis hermanos por apoyarme y ser la excusa perfecta para seguir adelante.*

*A todas esas personas que sencillamente estuvieron ahí cuando les necesite.*

**ANÁLISIS DE OSCILADORES NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN. CASO DE  
ESTUDIO: FERRORESONANCIA EN TRANSFORMADORES**

---

**Agradecimientos**

A Walter Causarano y Christian E. Schaerer por confiar en mi, darme una oportunidad e inspirar el tema de este trabajo.

A Miki Saito por no abandonar a sus alumnos, y hacer mucho más de lo que se esperaba de un profesor.

A Andrés por invitarme a jugar a armar esas cosas que vio en los dibujos del libro que encontró en la estantería, si no fuera por eso estaría haciendo otra cosa.

A esos compañeros y amigos que supieron ser camaradas en los momentos difíciles.

A mis compañeros, amigos y no tan amigos que me soportaron con paciencia durante todo este tiempo.

**ANÁLISIS DE OSCILADORES NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN. CASO DE  
ESTUDIO: FERRORESONANCIA EN TRANSFORMADORES**

---

**Agradecimientos institucionales**

A la Facultad de Ingeniería de la UNA,

por el apoyo institucional y financiero para la presentación de este trabajo a nivel nacional e internacional.

A la Dirección de la carrera de Ingeniería Electrónica,

por el apoyo brindado para la realización de este trabajo.

Al Laboratorio de de Computación Científica y Aplicada (LCCA) de la Facultad  
Politécnica de la UNA,

por el espacio de trabajo proporcionado.

**ANÁLISIS DE OSCILADORES NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN. CASO DE  
ESTUDIO: FERRORESONANCIA EN TRANSFORMADORES**

---

**Índice general**

<b>1. Capítulo 1: Introducción</b>	<b>6</b>
1.1. Motivación y definición del problema . . . . .	6
1.2. Originalidad y perspectivas . . . . .	9
1.3. Organización del trabajo . . . . .	10
<b>2. Capítulo 2: La ferroresonancia</b>	<b>11</b>
2.1. Diferencias entre la ferroresonancia y la resonancia lineal . . . . .	11
2.2. Identificación de la ferroresonancia . . . . .	12
2.3. Configuraciones susceptibles de sufrir ferroresonancia . . . . .	13
2.4. Modelado matemático de la ferroresonancia . . . . .	18
2.4.1. Circuito equivalente . . . . .	18
2.4.2. Ecuación diferencial que describe la dinámica del sistema .	22
2.5. Comentarios Finales del Capítulo . . . . .	25
<b>3. Capítulo 3: Sistemas dinámicos</b>	<b>26</b>
3.1. Ecuaciones diferenciales. . . . .	26
3.1.1. Existencia y unicidad de las soluciones . . . . .	27
3.1.2. Sistemas no lineales . . . . .	28
3.1.3. Sistemas lineales . . . . .	29
3.1.4. Puntos fijos y su estabilidad . . . . .	29
3.1.5. Ciclos límite . . . . .	30
3.1.6. Linealización del sistema no lineal . . . . .	32
3.2. El Mapa de Poincaré . . . . .	33
3.3. Estabilidad estructural, la bifurcación . . . . .	35
3.4. Integración numérica . . . . .	36
3.4.1. Errores introducidos por los métodos numéricos . . . . .	37
3.4.2. Métodos de Runge-Kutta . . . . .	38
3.4.3. Métodos adaptativos de Runge-Kutta . . . . .	40
3.5. Transformada de Fourier . . . . .	41

**ANÁLISIS DE OSCILADORES NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN. CASO DE ESTUDIO: FERRORESONANCIA EN TRANSFORMADORES**

---

3.5.1. Análisis de señales con la transformada de Fourier discreta	42
3.6. Comentarios Finales del Capítulo . . . . .	44
<b>4. Capítulo 4: La ferresonancia vista como un sistema dinámico</b>	<b>45</b>
4.1. Análisis del modelo matemático . . . . .	45
4.1.1. Estudio del sistema homogéneo . . . . .	46
4.1.1.1. Linealización en torno a $x_a^*$ . . . . .	46
4.1.1.2. Existencia de ciclos límite . . . . .	48
4.1.2. Estudio del sistema no homogéneo . . . . .	49
4.1.2.1. Diagrama de bifurcación . . . . .	50
4.2. Resultados experimentales . . . . .	53
4.2.1. Estudio del sistema homogéneo . . . . .	53
4.2.1.1. Estabilidad del punto fijo . . . . .	53
4.2.1.2. Experimentos de «tirar y soltar» . . . . .	55
4.2.2. Comportamiento del sistema no homogéneo . . . . .	57
4.2.2.1. Comparación entre el Diagrama de Bifurcación hal- lado por fuerza bruta y la Curva S . . . . .	58
4.2.2.2. Diagrama de Bifurcación completo hallado por fuerza bruta . . . . .	62
4.2.2.3. Modos de operación en estado estable . . . . .	64
4.3. Comentarios Finales del Capítulo . . . . .	68
<b>5. Capítulo 5: Conclusiones finales y trabajos futuros</b>	<b>72</b>
<b>Apéndices</b>	<b>78</b>
<b>A. Apéndice A: Publicaciones logradas</b>	<b>79</b>
<b>B. Apéndice B: Resumen presentado a la V Jornada de Jóvenes Inves- tigadores de la Universidad Nacional de Asunción.</b>	<b>80</b>
<b>C. Apéndice C: Póster presentado en el CMAC-SE 2011</b>	<b>81</b>

**ANÁLISIS DE OSCILADORES NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN. CASO DE  
ESTUDIO: FERRORESONANCIA EN TRANSFORMADORES**

---

<b>D. Apéndice D: Resumen publicado en el CMAC-SE 2011</b>	<b>82</b>
<b>E. Apéndice E: Resumen presentado a la VI Jornada de Jóvenes Investigadores de la Universidad Nacional de Asunción.</b>	<b>83</b>

**ANÁLISIS DE OSCILADORES NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN. CASO DE ESTUDIO: FERRORESONANCIA EN TRANSFORMADORES**

---

**Índice de figuras**

2.1. Ferroresonancia de un transformador en serie con un interruptor. . .	14
2.2. Ferroresonancia de un transformador entre fase y tierra en un sistema con neutro aislado . . . . .	15
2.3. Ejemplos de accidentes que pueden llevar a la ferroresonancia . .	16
2.4. Transformador de alta (HV) a media (MV) tensión con neutro aislado conectado a un transformador sin carga . . . . .	17
2.5. Transformador sin carga alimentado por un línea de transmisión altamente capacitiva. . . . .	18
2.6. Sistema típico de distribución alimentado una carga trifásica por medio de transformadores . . . . .	19
2.7. Circuito simplificado para el estudio de la ferroresonancia. . . . .	19
2.8. Circuito que energiza al primario del transformador . . . . .	20
2.9. Circuito equivalente preliminar. . . . .	21
2.10. Circuito equivalente considerando las pérdidas en el núcleo. . . .	22
2.11. Circuito monofásico ferroresonante del primario del transformador.	23
2.12. Curva de magnetización . . . . .	23
3.1. Estabilidad del punto fijo . . . . .	30
3.2. Ciclo limite estable . . . . .	31
3.3. Construcción del diagrama de fase . . . . .	33
3.4. Construcción del mapa de Poincaré. . . . .	34
3.5. Mapa de Poincaré indicando sub-armónicos. . . . .	35
3.6. Espectro de magnitud de una señal cosenoidal . . . . .	43
4.1. Variación de los autovalores con la variación de los parámetros del circuito. . . . .	54
4.2. Comparación entre los diagramas de fase de los sistemas homogéneos . . . . .	56

**ANÁLISIS DE OSCILADORES NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN. CASO DE ESTUDIO: FERRORESONANCIA EN TRANSFORMADORES**

---

4.3. Flujo magnético a través del bobinado del transformador contra el tiempo, sistema homogéneo . . . . .	56
4.4. Diagrama de fase: Operación normal y ferroresonante. . . . .	57
4.5. Diagrama de bifurcación o Curva S. . . . .	60
4.6. Diagrama de bifurcación simplificado y curva obtenida por fuerza bruta . . . . .	61
4.7. Diagrama de bifurcación completo obtenido por fuerza bruta. . . . .	62
4.8. Zonas ferroresonantes . . . . .	63
4.9. Modo estable normal . . . . .	65
4.10. Modo estable ferroresonante fundamental . . . . .	66
4.11. Modo estable sub-armónico de 2 puntos . . . . .	67
4.12. Modo estable sub-armónico de 3 puntos . . . . .	68
4.13. Modo estable sub-armónico de 6 puntos . . . . .	69
4.14. Caos transitorio . . . . .	70
4.15. Estado estable debido a la saturación del núcleo ferromagnético . . . . .	71

## **CAPÍTULO 1**

### **INTRODUCCIÓN**

#### **1.1. Motivación y definición del problema**

La ferresonancia es un fenómeno de resonancia no lineal que se presenta en circuitos eléctricos que posean capacitancias, inductancias no lineales (ferromagnéticas y saturables) y baja resistencia [1]. La ferresonancia puede ocurrir a cualquier nivel de tensión siempre que se llegue a producir suficiente flujo magnético en el inductor no lineal para llevarlo a la saturación.

A diferencia de la resonancia lineal en donde las oscilaciones son a la misma frecuencia de la fuente de alimentación y donde se presenta un único estado estable, la ferresonancia puede presentar diferentes estados estables en el tiempo, uno de los cuales es el comportamiento que se esperaría si el sistema fuera lineal, los otros estados presentan distorsiones en la forma de onda y frecuencias distintas a las de la fuente de alimentación del sistema, estos últimos comportamientos generan sobre tensiones (en el caso de la ferresonancia fundamental) o sobre corrientes (en el caso de los sub-armónicos) [2], que pueden causar serios desperfectos al sistema en sí mismo. La ferresonancia también presenta una gran sensibilidad a la variación de los estados iniciales, esto quiere decir que dados dos estados iniciales lo suficientemente próximos, los estados finales pueden resultar sumamente distintos, esto hace que no se pueda predecir la ferresonancia [3].

En los sistemas eléctricos de potencia, gracias a nuevos métodos constructivos se ha logrado disminuir en gran medida las resistencias (y por lo tanto las pérdidas) de los transformadores aumentando de esta forma su eficiencia, esta disminución de las pérdidas unida a la cada vez mayor complejidad de las redes hace que el número de casos reportados de ferresonancia en años recientes haya aumentado [4]. Dado que los potenciales daños en los sistemas de potencia resultan sumamente costosos frente a otros sistemas eléctricos este trabajo

**ANÁLISIS DE OSCILADORES NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN. CASO DE ESTUDIO: FERRORESONANCIA EN TRANSFORMADORES**

---

se centrará en estudiar la ferresonancia en los sistemas eléctricos de potencia.

En la actualidad, la gran mayoría de los conocimientos que se tienen respecto a este fenómeno se obtuvieron mediante la experimentación y la experiencia, estando disponibles soluciones prácticas, empíricas en muchos casos, para prevenir o proveer protección contra la ferresonancia [1]. Aun así, existen muchas configuraciones inevitables para las cuales es necesario realizar estudios predictivos para conocer los límites de operación segura de las mismas.

El objetivo principal de este trabajo es presentar técnicas de análisis adecuadas para el estudio del fenómeno de la ferresonancia en transformadores, en forma más específica, este trabajo se centra en el estudio de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales que modelan un sistema físico que presentan la siguiente forma:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + g(x, t). \end{cases} \quad (1.1)$$

Los sistemas como este, que evolucionan en el tiempo son sujeto de estudio de la teoría de los sistemas dinámicos.

Desde el punto de vista matemático existen dos tipos principales de sistemas dinámicos: Ecuaciones diferenciales y ecuaciones en diferencia. Las ecuaciones diferenciales describen la evolución del sistema en tiempo continuo, mientras que las ecuaciones en diferencia describen sistemas donde el tiempo es discreto [6].

Como el sistema (1.1) es una ecuación diferencial centraremos nuestra atención en las mismas. Las ecuaciones diferenciales nuevamente pueden ser separadas en dos tipos: Las ecuaciones diferenciales ordinarias y las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales; el primer tipo contiene una sola variable independiente que es el tiempo, el segundo tipo contiene otras variables independientes además del tiempo. En el sistema (1.1) solamente el tiempo es variable independiente.

Para las ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales por lo general aun

**ANÁLISIS DE OSCILADORES NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN. CASO DE ESTUDIO: FERRORESONANCIA EN TRANSFORMADORES**

---

no se encuentran disponibles soluciones analíticas, es por eso que se recurre a simulaciones numéricas para su estudio. En particular, en el sistema en estudio varios parámetros pueden variar en forma simultánea, esto hace que el análisis del sistema sea difícil, y por tanto extensas simulaciones para varios casos deben ser realizadas y analizadas para conocer el comportamiento del sistema. Esto además de llevar mucho tiempo de cómputo sólo permite conocer el comportamiento para los casos específicos simulados [1] [5] [2].

Los ingenieros están interesados en conocer cuando el sistema operará en una zona segura o de riesgo, para saber esto es de interés encontrar un método que permita una visión global del comportamiento del sistema, esta visión global puede ser proporcionada por los diagramas de bifurcación [2] [1], los cuales son herramientas facilitadas por la teoría de los sistemas dinámicos.

En este trabajo para trazar la curva de bifurcación se varió únicamente el parámetro amplitud del término perturbador, otras curvas de bifurcación pueden ser obtenidas si se varían los demás parámetros del sistema, los cuales en este caso son los elementos del circuito, que pueden ser resistores, capacitores o inductores. Se deja para trabajos futuros la obtención de las curvas de bifurcación correspondientes a la variación de estos parámetros.

Más adelante en este trabajo se presentará la forma de obtener el modelo para el estudio de la ferresonancia. Por lo general los sistemas que presentan este fenómeno también presentan histéresis, por simplicidad en este trabajo no se considerarán los efectos de la histéresis.

Previo al análisis del sistema ferresonante se presentan las herramientas que serán utilizadas para realizar dicho análisis. El sistema ferresonante será estudiado de tal forma que se pueda conocer su comportamiento local y global, el comportamiento local puede ser estudiado en detalle pues las herramientas disponibles para este estudio presentan ya cierta madurez, mientras que el estudio del comportamiento global presenta ciertas limitaciones debidas a la naturaleza misma del sistema y a las limitaciones de los métodos disponibles.

## **1.2. Originalidad y perspectivas**

El estudio del fenómeno de la ferresonancia se inicia en 1907 con el trabajo de Bethenod [7], en esa primera publicación el fenómeno se describe como resonancia del transformador. En 1920 Boucherot [8] utilizó por primera vez la palabra ferresonancia, en la actualidad el término ferresonancia está firmemente establecido en el vocabulario técnico para describir los diferentes tipos de comportamientos que se presentan en los circuitos que contienen inductores no lineales [5].

A pesar del extenso estudio de la que es sujeto, la ferresonancia no es comprendida adecuadamente dado que es un fenómeno raro que no puede ser estudiado por métodos de aproximaciones lineales y del cual aun no se ha desarrollado un modelo que lo pueda representar con precisión [11]. Debido a esta falta de conocimientos y a que varios síntomas de la ferresonancia se pueden dar en otros casos, es fácil que se le atribuya a la ferresonancia desperfectos o destrucción inexplicable de equipos. Este trabajo pretende ser un aporte que permita identificar y comprender con mayor precisión el fenómeno de la ferresonancia.

Existen trabajos bastante avanzados sobre la ferresonancia como los presentados en [9] y en [10], pero en nuestro país este fenómeno es algo prácticamente desconocido.

Dada la importancia que tiene para la economía del Paraguay el buen funcionamiento de las líneas de distribución de potencia eléctrica, y la necesidad de evitar las grandes pérdidas económicas producidas por averías en estos sistemas; el estudio y la comprensión de la ferresonancia es de sumo interés para implementar estrategias a fin de evitar o atenuar los potenciales daños que puede producir este fenómeno.

Es necesario para el Paraguay que sean establecidas las bases para estudios más avanzados sobre los cuales no hay trabajos publicados en el país. Esto

también se aplica para estudios sobre fenómenos como la ferresonancia, los cuales en el futuro puedan establecer métodos para controlar este fenómeno. Este trabajo busca sentar las bases para que estos estudios avanzados sean posibles.

### **1.3. Organización del trabajo**

En el Capítulo 2 se presenta el fenómeno de la ferresonancia, las diferencias entre la ferresonancia y la resonancia lineal, luego se presentan las formas de identificar la ferresonancia, las configuraciones que pueden presentar ferresonancia y se cierra el Capítulo con el modelado matemático de la ferresonancia, en donde se indica el circuito equivalente utilizado y las ecuaciones que gobiernan la dinámica del sistema.

En el Capítulo 3 se presentan las herramientas básicas para estudiar los sistemas dinámicos, dentro de las herramientas disponibles en la teoría de los sistemas dinámicos se eligió el enfoque geométrico global, la integración numérica y el análisis espectral con la transformada de Fourier.

El Capítulo 4 está dividido en dos partes; en la primera realizamos el análisis matemático del sistema ferresonante utilizando las herramientas matemáticas mostradas en el Capítulo 3, en la segunda se presentan los resultados experimentales obtenidos junto con un análisis de los mismos.

Se finaliza con el Capítulo 5, donde se presentan las conclusiones principales obtenidas luego de realizar el trabajo y se presentan sugerencias de trabajos futuros que podrían continuar el presente trabajo.

## **CAPÍTULO 2**

### **LA FERRORESONANCIA**

La ferresonancia es un fenómeno de resonancia no lineal de comportamiento impredecible que puede afectar redes de distribución de potencia eléctrica [1], es un fenómeno que a pesar de ser iniciado por eventos transitorios se manifiesta por sobre tensiones y sobre corrientes con formas de onda distorsionadas que se mantienen una vez establecido el sistema, esto es, en régimen permanente, lo cual puede causar serios daños a los equipos afectados.

Para que pueda darse la ferresonancia deben estar presentes en el sistema eléctrico: capacitancias, inductores no lineales (ferromagnéticos y saturables), bajas pérdidas y una fuente de tensión, la ferresonancia se puede presentar en sistemas eléctricos de todos los niveles de tensión [1].

A pesar que la ferresonancia puede presentarse en cualquier circuito que presente las características mencionadas en el párrafo anterior, su aparición adquiere una gran importancia en sistemas eléctricos de potencia, donde los potenciales daños pueden resultar sumamente costosos, este trabajo se centrará en el estudio de la ferresonancia en sistemas eléctricos de potencia.

#### **2.1. Diferencias entre la ferresonancia y la resonancia lineal**

La resonancia lineal, o simplemente resonancia en circuitos eléctricos es un fenómeno que se presenta cuando los circuitos poseen capacitancias, inductores y resistencias, se presenta en todos los niveles de tensión.

La resonancia solamente ocurre cuando la frecuencia del término forzante del sistema es igual a la frecuencia natural del sistema (la frecuencia a la cual oscilaría el sistema si no es forzada a oscilar por un elemento externo). La resonancia se manifiesta como un gran aumento en la amplitud de las oscilaciones del sistema, pero en todo momento el sistema oscila tanto con la frecuencia como con la forma de onda del término forzante. Este aumento en la amplitud de la oscilación puede llegar a causar daños al sistema.

**ANÁLISIS DE OSCILADORES NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN. CASO DE ESTUDIO: FERRORESONANCIA EN TRANSFORMADORES**

---

La resonancia, como todos los fenómenos lineales, no presenta sensibilidad a los estados iniciales del sistema.

La ferresonancia es un fenómeno más complejo, que se presenta también en circuitos que posean capacitores, inductores y resistencias; la diferencia aquí aparece en que es necesario que al menos una inductancia en el circuito sea no lineal. La ferresonancia ocurre cuando el flujo magnético a través de la inductancia no lineal es lo suficientemente grande como para llevar a la saturación al inductor. La ferresonancia presenta varios estados estables, uno de los cuales es el que se tendría en el caso lineal (sin variaciones en la forma de onda ni en la frecuencia), y los otros presentan variaciones con respecto al término forzante en la amplitud, en la forma de onda y en la frecuencia de oscilación del sistema, estos últimos son los casos potencialmente dañinos para el sistema.

Además, la ferresonancia presenta una gran sensibilidad a los estados iniciales del sistema, lo cual es un comportamiento típico de los sistemas no lineales.

## **2.2. Identificación de la ferresonancia**

La ferresonancia no es fácil de identificar, ya que los síntomas que se presentan cuando se produce se pueden dar en otros casos. Si se disponen de datos grabados se puede hacer una comparación con las formas de onda típicas de la ferresonancia, las cuales son llamadas ferresonancia fundamental, subarmónica, cuasi-periódica y caótica (Ver [1]). Si no están disponibles estos datos es necesario observar la configuración del sistema mientras los síntomas están presentes, teniendo en cuenta los eventos anteriores a la presencia de dichos síntomas (los cuales podrían iniciar el fenómeno de la ferresonancia).

Es necesario (pero no suficiente) para que se produzca la ferresonancia, que el sistema eléctrico de potencia presente las siguientes tres condiciones [1]:

- Presencia simultánea de capacitancias con inductores no lineales
- Existencia en el sistema de al menos un punto cuyo potencial no sea fijo

**ANÁLISIS DE OSCILADORES NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN. CASO DE ESTUDIO: FERRORESONANCIA EN TRANSFORMADORES**

---

(neutro aislado, un sólo fusible abierto, la conmutación de una sola fase, etc.)

- Componentes del sistema con poca carga

Si alguna de estas condiciones no se cumple, la ferresonancia es poco probable. Los síntomas que por lo general se presentan con la ferresonancia son [1]:

- Grandes sobre tensiones permanentes en modo diferencial (de fase a fase) y en modo común (de fase a tierra)
- Grandes sobre tensiones permanentes sólo en modo común.
- Sobre corrientes permanentes.
- Grandes distorsiones permanentes en las formas de onda de tensiones y corrientes.
- Desplazamiento del punto neutro de tensión.
- Calentamiento del transformador (en operación sin carga).
- Ruido continuo, fuerte y excesivo en transformadores y reactancias.
- Equipo eléctrico dañado debido a efectos térmicos de la ruptura de aislamientos. Un síntoma característico de transformadores destruidos por ferresonancia es la destrucción del bobinado del primario con el bobinado del secundario intacto.
- Aparente disparo intempestivo de dispositivos de protección.

### **2.3. Configuraciones susceptibles de sufrir ferresonancia**

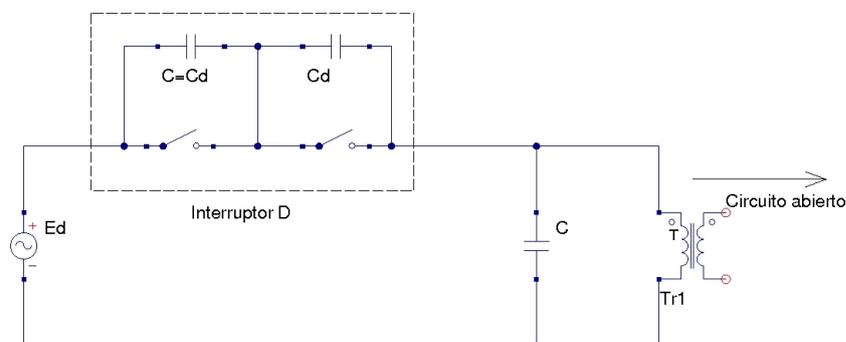
Los sistemas eléctricos de potencia pueden presentar innumerable cantidad de configuraciones susceptibles de sufrir la ferresonancia, pero gracias a la ex-

**ANÁLISIS DE OSCILADORES NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN. CASO DE ESTUDIO: FERRORESONANCIA EN TRANSFORMADORES**

---

perencia se pueden enumerar casos que tienen mayor probabilidad de presentar este fenómeno, algunos casos se presentan en [1], de los cuales citamos aquí:

- **Transformadores de tensión energizados a través de los condensadores de graduación (grading capacitance) de uno o más interruptores de seguridad (circuit breaker):** Los interruptores de seguridad son dispositivos que interrumpen automáticamente el circuito eléctrico para protegerlo cuando se produce una falla en el sistema como un cortocircuito o una sobre tensión causada por ejemplo por una descarga atmosférica, una vez que se soluciona el problema puede cerrarse de nuevo el circuito con el interruptor de seguridad, por medios manuales o por control a distancia. Los interruptores de seguridad para sistemas de alto tensión poseen condensadores de graduación, los cuales están conectados en paralelo a los interruptores, estos condensadores distribuyen equitativamente la tensión entre estos interruptores y ayudan a eliminar los arcos voltaicos que se producen en el momento de la conmutación. Véase Figura 2.1



**Figura 2.1:** Ferroresonancia de un transformador en serie con un interruptor, donde  $C_d$  es la capacitancia de graduación,  $C$  es la capacidad entre el transformador y tierra, y  $E_d$  es la fuente de tensión. **Fuente:** [1].

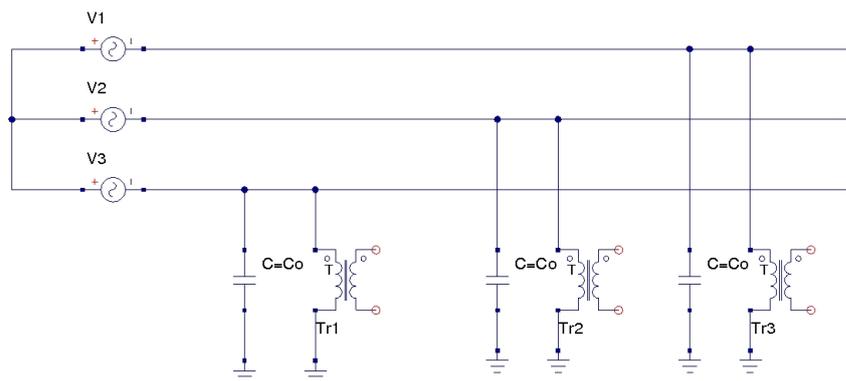
Ciertas operaciones de conmutación pueden llevar al transformador de tensión conectado entre fases y tierra a la ferroresonancia. La conmutación del interruptor de seguridad  $D$  hace que la energía almacenada en la capacitancia  $C$  se descargue a través del transformador llevándolo a la saturación, la fuente  $E_d$  provee suficiente energía a través del condensador

**ANÁLISIS DE OSCILADORES NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN. CASO DE ESTUDIO: FERRORESONANCIA EN TRANSFORMADORES**

---

de graduación  $C_d$  para mantener la oscilación. La ferroresonancia que se observa es del tipo sub-armónico [1].

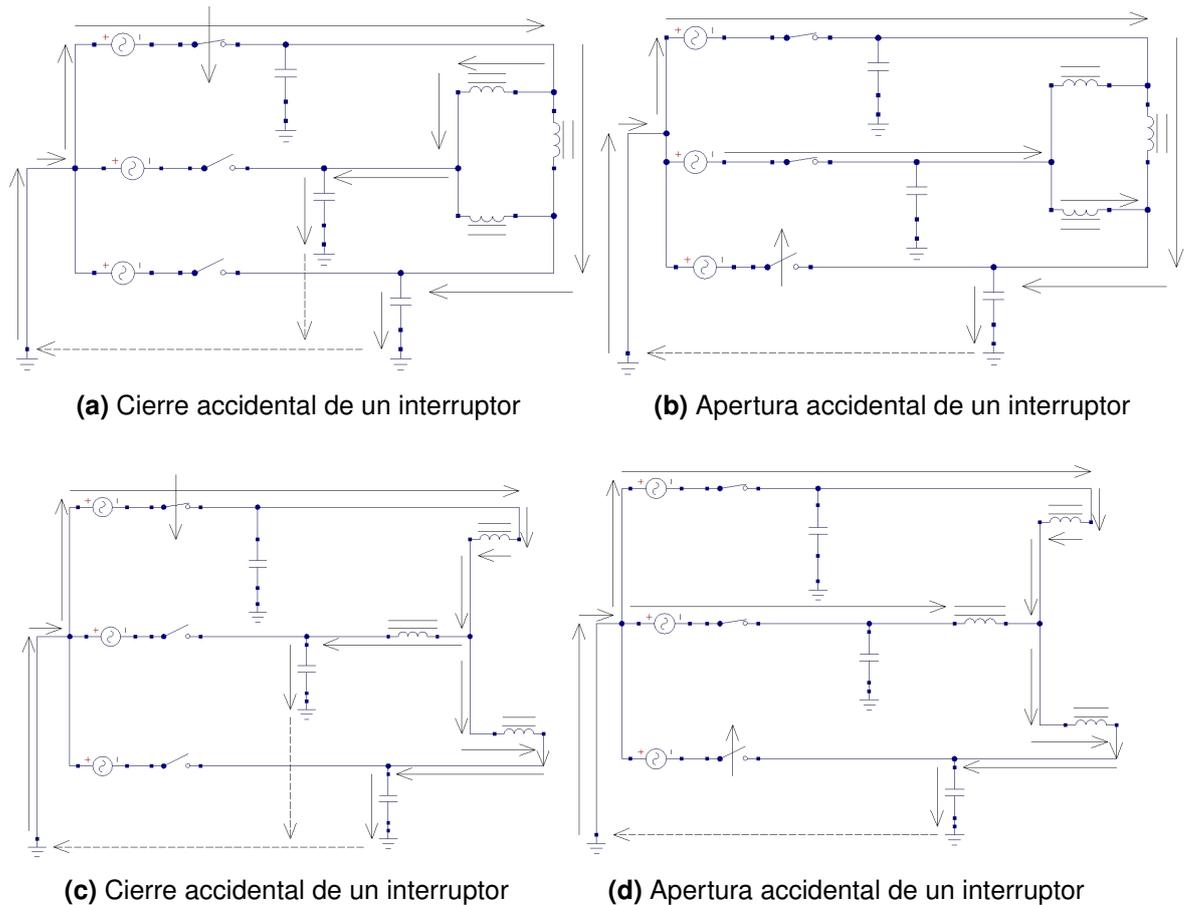
- **Transformadores de tensión conectados a un sistema con neutro aislado:** Cuando este sistema presenta acoplamiento entre el neutro aislado y una fuente de energía de emergencia o cuando se pierde el aterramiento del sistema, sobre tensiones o sobre corrientes transitorias debidas a conmutaciones del sistema o una falla del aterramiento pueden iniciar el fenómeno llevando a saturación el núcleo ferromagnético del transformador, dependiendo de los valores de los componentes del circuito se puede presentar ferroresonancia fundamental, sub-armónica o cuasi-periódica [1]. En la Figura 2.2 se puede observar esta configuración.



**Figura 2.2:** Ferroresonancia de un transformador entre fase y tierra en un sistema con neutro aislado.  $C_o$  es la capacitancia en del sistema en el instante en que se produce la falla. **Fuente:** [1].

- **Transformadores energizados accidentalmente en una o dos fases:** Este tipo de configuración puede ocurrir cuando se pierde una o dos fases de alimentación mientras el transformador esta sin carga o tiene una carga muy pequeña, por ejemplo por la apertura de un fusible en media tensión, la ruptura de un conductor o por trabajos en las líneas con tensión. Los modos ferroresonante que pueden aparecer son fundamental, sub-armónico o caótico [1]. En la Figura 2.3 se pueden observar algunos ejemplos de configuraciones en las que se puede observar este caso.

**ANÁLISIS DE OSCILADORES NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN. CASO DE ESTUDIO: FERRORESONANCIA EN TRANSFORMADORES**

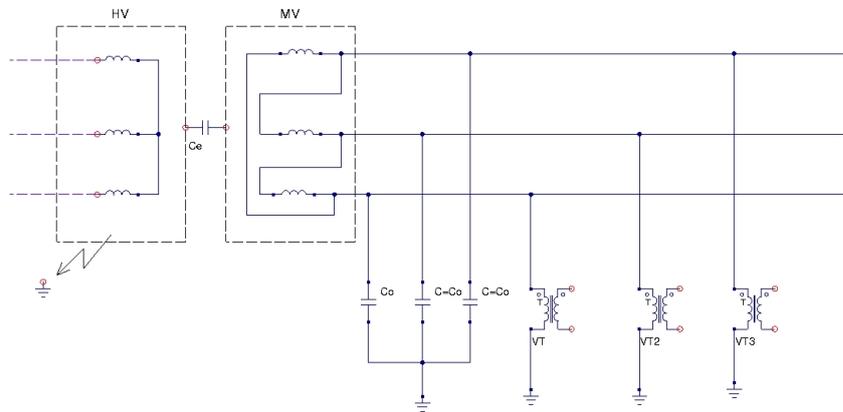


**Figura 2.3:** Algunos ejemplos de accidentes que pueden llevar a la ferroresonancia. (a) y (c) representan circuitos inicialmente desconectados; (b) y (d) representan circuitos inicialmente conectados. **Fuente:** [1]

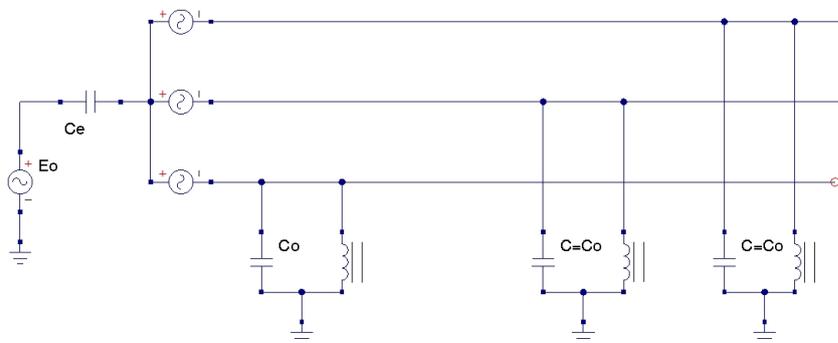
- **Transformadores de alta a media tensión con neutro aislado conectados a transformadores sin carga:** Cuando las tierras de alta y media tensión están aisladas y del lado de media tensión se conecta un transformador sin carga entre fase y tierra, una falla en el aterramiento del lado de alta tensión hace que este lado alcance un elevado potencial, por efectos capacitivos entre el secundario y el primario la sobre tensión aparece del lado de media tensión llevando al núcleo ferromagnético del transformador sin carga a la saturación. Una vez que la falla en el lado de alta tensión es reparada, la tensión del neutro del lado de alta tensión debido al desbalance del sistema puede ser suficiente para sostener el fenómeno. La ferroresonancia que se presenta es la fundamental [1]. En la Figura 2.4 se

**ANÁLISIS DE OSCILADORES NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN. CASO DE ESTUDIO: FERRORESONANCIA EN TRANSFORMADORES**

presenta esta configuración.



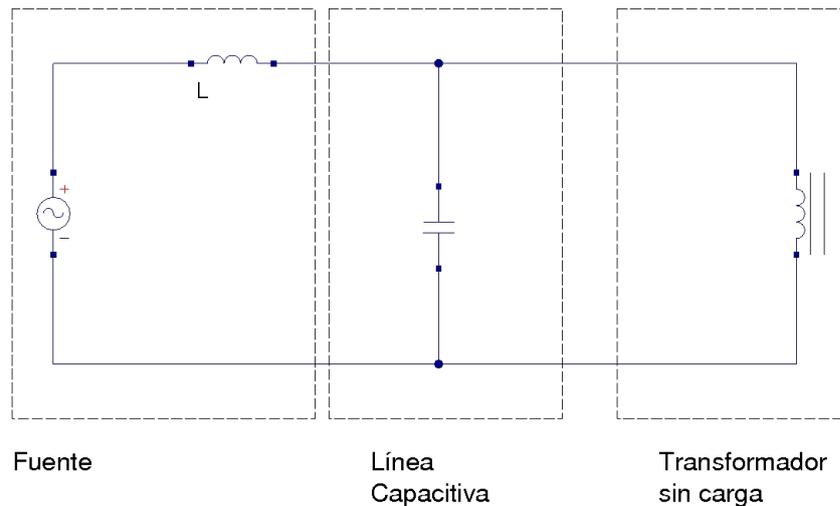
(a) Sistema que sufre la falla



(b) Diagrama equivalente

**Figura 2.4:** Transformador de alta (HV) a media (MV) tensión con neutro aislado conectado a un transformador sin carga:  $E_o$  es la tensión en el instante de la falla en lado de alta tensión;  $C_e$  es la capacitancia entre los bobinados de alta y baja tensión;  $C_o$  es la capacitancia del lado de baja tensión en el momento de la falla. **Fuente:** [1]

- **Transformador alimentado por un sistema de potencia altamente capacitivo con un sistema de baja potencia de cortocircuito:** La ferresonancia puede ocurrir cuando el transformador sin carga es conectado repentinamente a un sistema de baja potencia de cortocircuito comparado con la potencia nominal del transformador por medio de un sistema altamente capacitivo como líneas de transmisión subterráneas o aéreas muy largas. La ferresonancia que se puede presentar es fundamental o cuasi-periódica [1]. En la Figura 2.5 se presenta un ejemplo de esta configuración.



**Figura 2.5:** Transformador sin carga alimentado por un línea de transmisión altamente capacitiva. **Fuente:** [1]

## 2.4. Modelado matemático de la ferroresonancia

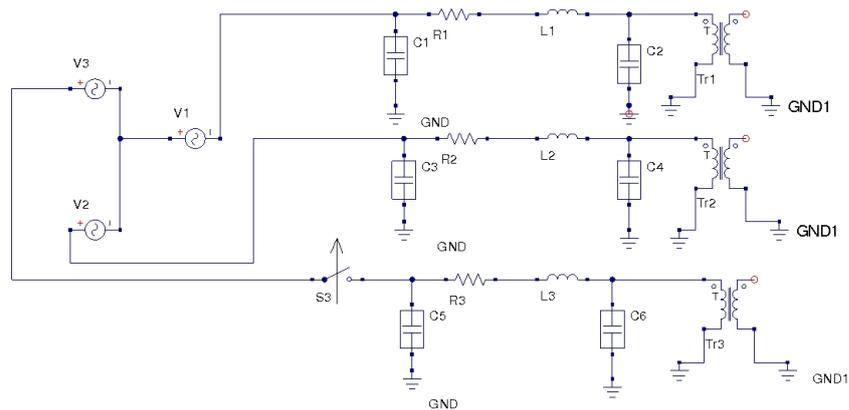
### 2.4.1. Circuito equivalente

En sistemas de transmisión de potencia es habitual la utilización de transformadores en conexión estrella a estrella para alimentar cargas trifásicas [3]. El esquema de la Figura 2.6 representa a dicho sistema en forma simplificada. Tanto las capacitancias, las inductancias y las resistencias que se presentan en un circuito de potencia eléctricos son parámetros distribuidos, pero para su estudio se considera que son parámetros concentrados [19]. En este sistema las líneas de distribución están representadas por el circuito equivalente RCL en configuración  $\pi$ .

La ferroresonancia puede ser iniciada por la pérdida de conexión de una o dos fases cuando el sistema esta sin carga o con una carga muy pequeña [1]. Para realizar el estudio presentado en este trabajo suponemos que uno de los tres interruptores esta abierto, de esta forma las dos fases restantes inducen tensión en el transformador desconectado.

El circuito mostrado en la Figura 2.7, es una simplificación utilizada para estudiar la ferroresonancia (ver [3] y las referencias citadas allí). En este circuito se

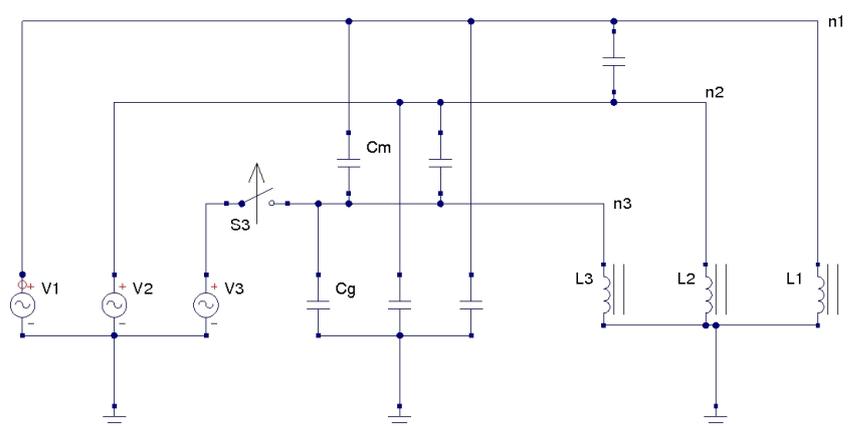
**ANÁLISIS DE OSCILADORES NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN. CASO DE ESTUDIO: FERRORESONANCIA EN TRANSFORMADORES**



**Figura 2.6:** Sistema típico de distribución alimentado una carga trifásica por medio de transformadores. **Fuente:** [3]

presenta una fuente de poder trifásica alimentando a un sistema sin carga, con uno de los conductores de alimentación interrumpido.

El esquema de la Figura 2.7 presenta capacitancias entre fase y tierra, como también capacitancias entre fases, estas capacitancias entre fases proveen el acoplamiento necesario para energizar el transformador desconectado. Note que en la Figura 2.7 solo se muestra el primario de los transformadores, esto es porque al no tener carga no circula corriente por el bobinado del secundario, por lo tanto no se producirá ninguna incidencia en el comportamiento del sistema si el secundario del transformador es ignorado.

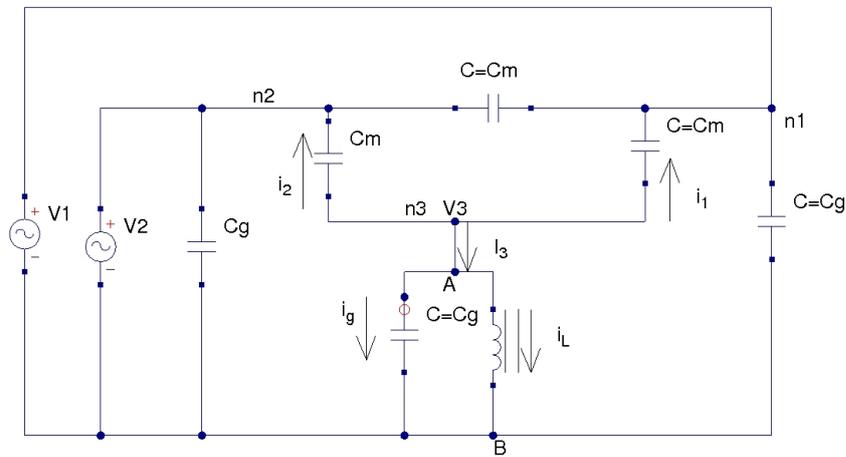


**Figura 2.7:** Circuito simplificado para el estudio de la ferroresonancia;  $C_g$  es la capacidad que aparece entre fase y tierra;  $C_m$  es la capacitancia entre fases. **Fuente:** [3]

En la Figura 2.8 se muestra el circuito que energiza al primario del transfor-

**ANÁLISIS DE OSCILADORES NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN. CASO DE ESTUDIO: FERRORESONANCIA EN TRANSFORMADORES**

mador desconectado, en la misma por simplicidad se omitieron los inductores  $L_2$  y  $L_1$ , pues su presencia no afecta a las impedancias y tensiones vistas desde los terminales de  $L_3$  (los cuales son los puntos  $A$  y  $B$  en la Figura 2.8).



**Figura 2.8:** Circuito que energiza al primario del transformador  $L_3$ . En el nodo  $n_3$  antes de desconectar  $V_3$  la corriente  $I_3 \neq 0$ , en el instante en que la fuente  $V_3$  es desconectada, la corriente  $I_3 = 0$  y la tensión  $V_3$  en  $n_3$  es suministrada por el capacitor  $C_g$  en paralelo al inductor. **Fuente:** Elaboración propia

Para obtener el modelo matemático que describe el circuito que alimenta a la bobina utilizamos el teorema de Thévenin. Para obtener la capacidad equivalente se cortocircuitan las fuentes de tensión  $V_1$  y  $V_2$ ; al hacer esto las capacitancias con respecto a tierra de los nodos  $n_1$  y  $n_2$  quedan en paralelo con cortocircuitos y se pueden omitir. La tensión de los nodos  $n_1$  y  $n_2$  es la misma por lo tanto no circulara corriente a través de la capacitancia mutua entre esas fases, por tanto también puede ser omitida, así la capacitancia total sera:  $C = C_g + 2C_m$ .

Para obtener la tensión equivalente de Thévenin entre los puntos  $A$  y  $B$ , desconectamos la bobina de dichos puntos, de tal forma que se tenga un circuito abierto entre esos puntos. Observando la Figura 2.8 y considerando que la fase  $V_3$  ya ha sido interrumpida, y por tanto la corriente  $I_3 = 0$ , se puede ver que la tensión  $V_{AB}$  será la misma que cae sobre el capacitor  $C_g$  que esta en paralelo a los puntos  $A$  y  $B$ .

En el nodo  $n_3$  suponiendo que las corrientes  $i_g$ ,  $i_1$  e  $i_2$  son salientes a dicho

**ANÁLISIS DE OSCILADORES NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN. CASO DE ESTUDIO: FERRORESONANCIA EN TRANSFORMADORES**

nodo, tenemos que:

$$i_g = -i_1 - i_2 \quad (2.1)$$

Donde, utilizando notación fasorial:  $\bar{i}_g = j\omega C_g \bar{V}_{AB}$ ;  $\bar{i}_1 = j\omega C_m (\bar{V}_{AB} - \bar{V}_1)$ ;  $\bar{i}_2 = j\omega C_m (\bar{V}_{AB} - \bar{V}_2)$ ,  $\omega = 2\pi f$  es la velocidad angular del sistema y  $f$  es la frecuencia de la fuente de alimentación. Considerando los valores de las corrientes  $\bar{i}_g, \bar{i}_1, \bar{i}_2$ ; tenemos que:

$$j\omega C_g \bar{V}_{AB} = -j\omega C_m (\bar{V}_{AB} - \bar{V}_1) - j\omega C_m (\bar{V}_{AB} - \bar{V}_2) \quad (2.2)$$

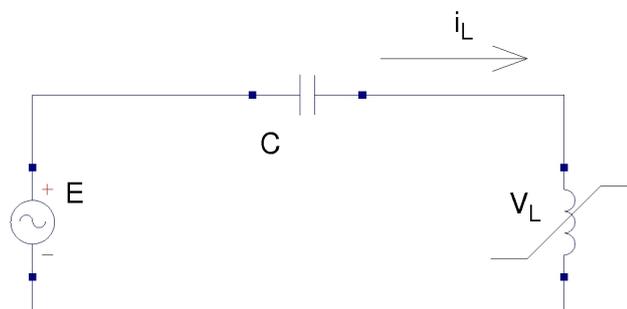
Realizando operaciones algebraicas sobre la ecuación (2.2) llegamos a:

$$j\omega (C_g + 2C_m) \bar{V}_{AB} = j\omega C_m (\bar{V}_2 + \bar{V}_1) \quad (2.3)$$

Como en un sistema trifásico balanceado  $\bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \bar{V}_3 = 0$ , por tanto;  $\bar{V}_1 + \bar{V}_2 = -\bar{V}_3$ , así la tensión  $\bar{V}_{AB}$  es:

$$\bar{V}_{AB} = -\frac{C_m}{C_g + 2C_m} \bar{V}_3 \quad (2.4)$$

El signo negativo indica que el sentido elegido para la corriente  $i_g$  es el contrario al que se tiene en la realidad.

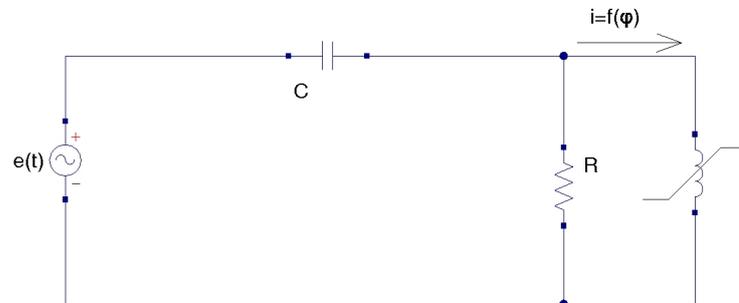


**Figura 2.9:** Circuito equivalente preliminar.  $E = -\frac{C_m}{C_g + 2C_m} V_3$ ,  $C = C_g + 2C_m$ . **Fuente:** Elaboración propia.

Cuando el transformador no tiene carga o tiene una carga muy pequeña, la

**ANÁLISIS DE OSCILADORES NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN. CASO DE ESTUDIO: FERRORESONANCIA EN TRANSFORMADORES**

corriente sin carga del transformador y su impedancia asociada dejan de ser despreciables [16], agregando dichas pérdidas el circuito equivalente es el mostrado en la Figura 2.10.



**Figura 2.10:** Circuito equivalente considerando las pérdidas en el núcleo. **Fuente:** Elaboración propia

#### 2.4.2. Ecuación diferencial que describe la dinámica del sistema

Para obtener las ecuaciones que describen la dinámica del sistema utilizamos el circuito equivalente presentado en la Figura 2.10 con el agregado de las pérdidas en serie del circuito para obtener una descripción más realista del fenómeno en estudio; por simplicidad no se considera la histéresis del núcleo ferromagnético. En la Figura 2.11 se presenta el circuito que será utilizado, en donde  $e(t) = E \sin(\omega t)$ ,  $E$ : Amplitud de la sinusoidal de la fuente de tensión,  $C$  es la capacitancia equivalente del circuito,  $R_1$  las pérdidas en serie del circuito,  $R_2$  las pérdidas en paralelo del circuito. Además:

$$i(\varphi) = k_1\varphi + k_n\varphi^n; \quad n \in \mathbb{N}, \text{ impar}, (k_1, k_n) \in \mathbb{R}^+, \quad (2.5)$$

donde  $i(\varphi)$  es la corriente de la inductancia y  $\varphi$  es el flujo magnético.

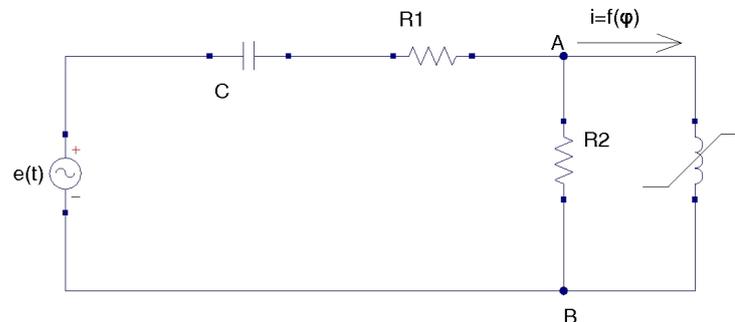
Utilizaremos los siguientes valores numéricos de las constantes del circuito, los cuales fueron extraídos de [2]:

$$R_1 = 32K\Omega; R_2 = 714M\Omega; C = 0,4nF; \omega = 100\pi$$

**ANÁLISIS DE OSCILADORES NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN. CASO DE ESTUDIO: FERRORESONANCIA EN TRANSFORMADORES**

$$i_{(\varphi)} = 10^{-8}\varphi + 2,34 * 10^{-34}\varphi^9 \Rightarrow k_1 = 10^{-8}; k_n = 2,34 * 10^{-34}; n = 9;$$

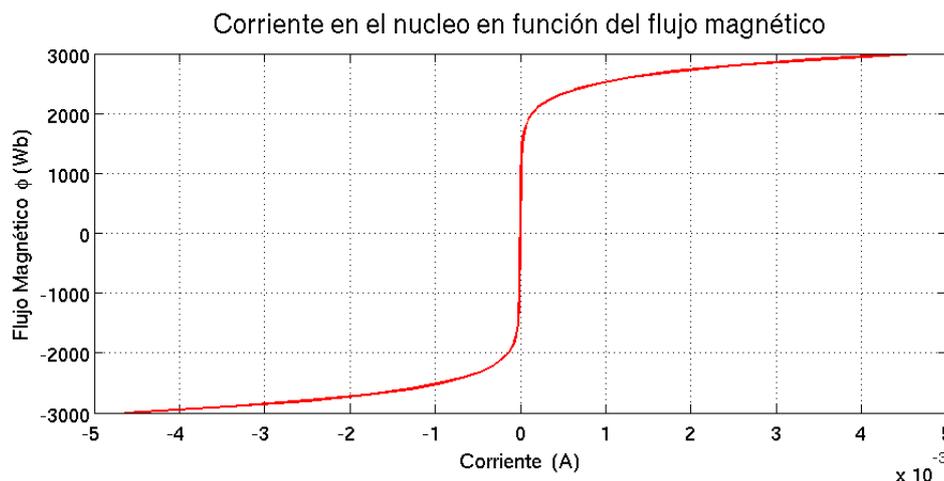
Estos valores corresponden a un transformador de tensión real de 400/20kV.



**Figura 2.11:** Circuito monofásico ferroresonante del primario del transformador.  $R_1 = 32K\Omega$ ;  $R_2 = 714M\Omega$ ;  $C = 0,4nF$ ;  $\omega = 100\pi \text{ rad/s}$ . **Fuente:** [2]

La ecuación (2.5) es la que determina el tipo de comportamiento no lineal que presentara el sistema, así cualquier variación de  $k_1$ ,  $k_n$  y  $n$  tendrá una gran incidencia en el comportamiento del sistema; en este trabajo no se realiza ninguna variación de estos valores.

En la Figura 2.12 se presenta la variación de la corriente que circula por el bobinado del inductor en función del flujo magnético, a esta curva en algunas ocasiones se la denomina curva de magnetización.



**Figura 2.12:** Curva de magnetización: Variación de la corriente que circula a través del bobinado del transformador en función del flujo magnético. **Fuente:** Elaboración propia.

Lo ideal es que el transformador opere en la zona más lineal de la curva de magnetización para evitar los armónicos o cualquier otra distorsión introducida

**ANÁLISIS DE OSCILADORES NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN. CASO DE ESTUDIO: FERRORESONANCIA EN TRANSFORMADORES**

---

por las no linealidades, la mayor parte de los transformadores de potencia están preparados para trabajar en una frecuencia dada y fija [16].

Analizamos el circuito de la Figura 2.11 utilizando la ley de mallas de Kirchhoff; explicaciones de como analizar un circuito eléctrico pueden ser encontradas en [29]. Así tenemos:

$$e(t) - v_C - v_{R_1} - v_{AB} = 0$$

transponiendo términos nos queda

$$e(t) = v_C + v_{R_1} + v_{AB}$$

Donde:

$$v_C = \frac{1}{C} \int (\dot{\varphi} \frac{1}{R_2} + k_1 \varphi + k_n \varphi^n) dt$$

Es la tensión que cae sobre el capacitor.

$$v_{AB} = \dot{\varphi}$$

Es la tensión que cae entre los puntos A y B.

$$v_{R_1} = \frac{R_1}{R_2} \dot{\varphi} + k_1 R_1 \varphi + R_1 k_n \varphi^n$$

Es la tensión que cae sobre  $R_1$ .

Luego reemplazando las tensiones por sus valores obtenemos:

$$\frac{1}{C} \int (\dot{\varphi} \frac{1}{R_2} + k_1 \varphi + k_n \varphi^n) dt + \dot{\varphi} + \frac{R_1}{R_2} \dot{\varphi} + k_1 R_1 \varphi + R_1 k_n \varphi^n = E \text{sen}(\omega t)$$

Derivando esta última expresión con respecto al tiempo nos queda:

$$\frac{R_2 + R_1}{R_2} \ddot{\varphi} + (nR_1 k_n \varphi^{n-1} + k_1 R_1 + \frac{1}{CR_2}) \dot{\varphi} + \frac{k_1}{C} \varphi + \frac{k_n}{C} \varphi^n = E\omega \cos(\omega t), \quad (2.6)$$

La ecuación 2.6 es una ecuación diferencial no lineal ordinaria de segundo orden, para el estudio de este modelo recurriremos a la teoría de sistemas dinámicos continuos, la cual en palabras sencillas busca saber hacia donde evoluciona el sistema, y cómo se comporta cuando llega ahí.

## **2.5. Comentarios Finales del Capítulo**

En este Capítulo se presentó en qué consiste el fenómeno de la ferorrresonancia, su diferencia con la resonancia lineal; las formas de identificar la ferorrresonancia y las configuraciones susceptibles de sufrir ferorrresonancia. Además se presentó el circuito equivalente y las ecuaciones que representan la dinámica del sistema, dichas ecuaciones serán utilizadas en capítulos posteriores para realizar el análisis del fenómeno de la ferorrresonancia.

## **CAPÍTULO 3**

### **SISTEMAS DINÁMICOS**

En el contexto de este trabajo, llamamos sistema dinámico a cualquier sistema (físico o no) en donde existe variación o mudanza de estado con respecto al tiempo u otro parámetro.

En este Capítulo se presentarán las herramientas matemáticas básicas para el estudio de la ferresonancia. Existen en la literatura varios enfoques para tratar este tipo de fenómenos. Nosotros elegimos utilizar el enfoque geométrico global [21], integración numérica y análisis espectral con la transformada de Fourier. Elegimos estas herramientas porque las consideramos más adecuadas para el estudio de la ferresonancia y fenómenos similares, introduciendo el menor número de simplificaciones posibles, lo que mantiene la generalidad, pero sin la necesidad de recurrir a refinamientos matemáticos excesivos para lograr un análisis bastante completo.

Puede encontrarse un tratamiento más extenso en [21], y datos complementarios así como otros enfoques en [12, 6, 23, 22].

#### **3.1. Ecuaciones diferenciales.**

Desde el punto de vista matemático existen dos tipos principales de sistemas dinámicos: Ecuaciones diferenciales y ecuaciones en diferencia. Las ecuaciones diferenciales describen la evolución del sistema en tiempo continuo, mientras que las ecuaciones en diferencia describen sistemas donde el tiempo es discreto [6].

El sistema en estudio en este trabajo es modelado por ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, por tanto esta sección se centrará en presentar los conceptos básicos de este tipo de ecuaciones.

Para desarrollar el estudio del sistema dinámico, inicialmente es necesario saber si las ecuaciones diferenciales tienen solución y si estas soluciones son únicas. Las ecuaciones diferenciales no lineales en general no tienen solución analítica, pero en cierto entorno cercano a unos puntos llamados puntos fijos

se puede hallar una equivalencia entre la ecuación diferencial no lineal y una ecuación diferencial lineal. Las ecuaciones diferenciales lineales tienen solución analítica, lo que facilita el estudio del comportamiento dinámico que estas representan.

### 3.1.1. Existencia y unicidad de las soluciones

Para los propósitos de este trabajo, se define una ecuación diferencial como el sistema:

$$\frac{dx}{dt} := \dot{x} = g(x, t), \quad (3.1)$$

donde  $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$  es un vector evaluado en función a una variable independiente, en este caso el tiempo,  $g : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función continua con dominio  $V \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$ , el conjunto  $V$  es abierto y no vacío, y  $(x, t) \in V$ . El símbolo  $\dot{\cdot}$  indica derivada con respecto a la variable escalar, en este caso  $t$ .

La función  $g(x, t)$  recibe el nombre de campo vectorial asociado a la ecuación diferencial. Se dice que este campo vectorial  $g(x, t)$  genera un flujo  $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ , donde  $\psi(x) = \psi(x, t)$  esta definida para todo  $(x, t) \in V$  con  $t$  en algún intervalo  $I \subseteq \mathbb{R}$ , si  $\psi$  satisface la ecuación (3.1) de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt}(\psi(x, t))|_{t=\tau} = g(\psi(x, \tau)), \forall (x, \tau) \in V. \quad (3.2)$$

Fijando un punto  $(x_o, t_o) \in V$  de forma que  $\psi(t_o) = x_o$ . Entonces  $\psi(x_o, \cdot) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  define la curva solución, trayectoria u órbita de la ecuación diferencial (3.1) con base en  $x_o$ . En este trabajo, representaremos también la solución de la ecuación (3.1) como  $x(t)$ .

Para que el sistema (3.1) tenga solución,  $g$  debe ser continua, y para que esta solución sea única es necesario que  $g$  sea una función Lipschitz, esto quiere decir

que  $\exists M \geq 0$  tal que:

$$|g(x, t) - g(y, t)| \leq M|x - y|, \quad \forall t \in I, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Demostraciones de esta última afirmación pueden ser encontradas en cualquier libro de ecuaciones diferenciales con el nombre de Teorema de Picard - Lindelöf, o Teorema de existencia y unicidad de soluciones, para más detalles se puede recurrir a [34].

Los sistemas como la ecuación (3.1) que contienen en forma explícita al tiempo reciben el nombre de sistemas no autónomos. Es posible convertir estos sistemas no autónomos a sistemas autónomos, esto es, a sistemas que no contienen al tiempo en forma explícita. Pero esta conversión es a costa de agregar una dimensión al sistema [12, 34], la representación del sistema en forma autónoma tiene la ventaja de ser más compacta, en general las propiedades del sistema no autónomo siguen siendo válidas para el sistema autónomo.

### 3.1.2. Sistemas no lineales

Definimos un sistema no lineal autónomo de la siguiente forma:

$$\dot{x} := g(x),$$

donde  $g(x)$  es una función no lineal continua cuya primera derivada también es continua.

Las definiciones generales para las ecuaciones diferenciales aun son válidas para este caso, de esta forma, para el problema de valor inicial;

$$\dot{x} = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad x(0) = x_o. \quad (3.3)$$

podemos definir un flujo  $\psi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de la siguiente forma;  $\psi_t(x_o) = x(x_o, t)$ .

### 3.1.3. Sistemas lineales

Representamos un sistema lineal autónomo invariante en el tiempo de la siguiente manera:

$$\frac{dx}{dt} := \dot{x} = Ax, \quad (3.4)$$

donde  $A$  es una matriz  $n \times n$  con coeficientes constantes. La solución de la ecuación (3.4), dado un valor inicial  $x(0) = x_o$  es:

$$x(x_o, t) = e^{At}x_o. \quad (3.5)$$

El término  $e^{At}$  se denomina matriz exponencial, y se puede representar por una serie de potencias de la matriz  $A$  como sigue:

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots,$$

donde  $I$  es la matriz identidad.

El hecho que de una ecuación diferencial lineal invariante en el tiempo se pueda hallar la solución analítica, siempre que esta exista, es un detalle importante, pues esta solución analítica permite el estudio cuantitativo del sistema, además, al ser lineal el sistema se facilita el estudio de estabilidad del mismo, gracias a las propiedades de los sistemas lineales [25].

Más detalles sobre los sistemas lineales y su solución pueden ser encontrados en [24, 25]

### 3.1.4. Puntos fijos y su estabilidad

Los puntos fijos, puntos de equilibrio o ceros  $x^*$  son muy importantes en el estudio de sistemas dinámicos [21]. Los puntos fijos son aquellos puntos que hacen que el campo vectorial  $g(x)$  se anule, esto es  $g(x^*) = 0$ . Estos puntos fijos  $x^*$  pueden ser estables, asintóticamente estables o inestables [12, 6, 21], vea la

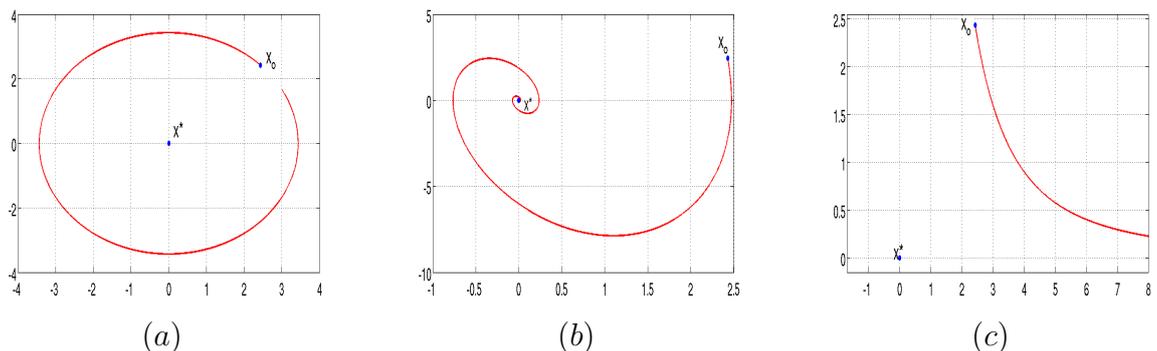
Figura 3.1.

**Definición 3.1.1** Se dice que  $x^*$  es estable cuando [21], dados  $\epsilon > 0$  y  $\delta > 0$  tan pequeños como se quiera, para  $x_o \in B(x^*, \epsilon)$  se tiene que  $x(t) \in B(x^*, \delta) \forall t \geq 0$ .

**Definición 3.1.2** El punto fijo es asintóticamente estable [21], cuando dado  $\epsilon > 0$  cualquiera, para  $x_o \in B(x^*, \epsilon)$ , se tiene que  $x(t) \rightarrow x^* \forall t \geq 0$ .

**Definición 3.1.3** Decimos que  $x^*$  es inestable [21], cuando dados  $\epsilon > 0$  y  $\delta > 0$  cualesquiera, para  $x_o \in B(x^*, \epsilon)$  se tiene que  $x(t) \notin B(x^*, \delta)$  para todo  $t$  lo suficientemente grande.

Detalles sobre la notación utilizada en las definiciones presentadas más arriba pueden ser encontrados en [31].



**Figura 3.1:** Estabilidad del punto fijo: (a)  $x^*$  es estable; (b)  $x^*$  es asintóticamente estable y (c)  $x^*$  es inestable. **Fuente:** Elaboración propia

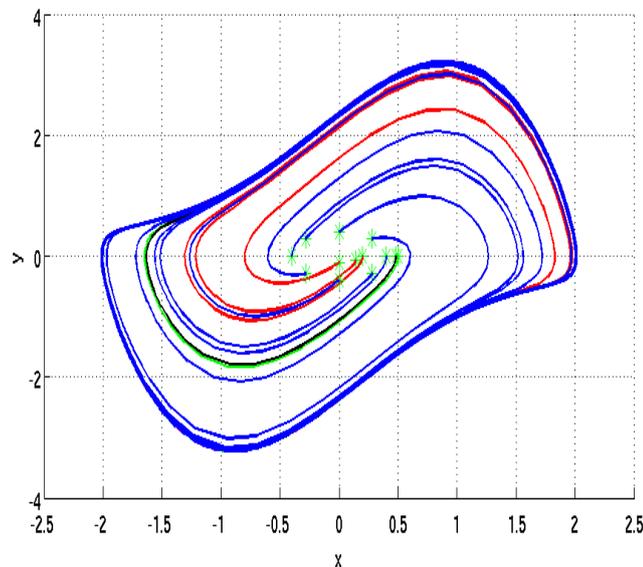
### 3.1.5. Ciclos límite

Quando un punto fijo es asintóticamente estable decimos que es un sumidero o atractor, pues atrae todas las órbitas que están en su entorno. Si el punto fijo es inestable lo llamamos fuente o repulsor, pues repele todas las órbitas que están en su entorno. Pero no todos los repulsores o atractores son puntos, también existen curvas que pueden atraer o repeler órbitas próximas [12], estos son los conjuntos límites.

**ANÁLISIS DE OSCILADORES NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN. CASO DE ESTUDIO: FERRORESONANCIA EN TRANSFORMADORES**

---

Un tipo de conjunto límite muy interesante es el ciclo límite, el cual es una curva cerrada, lo que implica que en el ciclo límite se tienen soluciones periódicas. Los ciclos límite sólo ocurren en sistemas disipativos no lineales. En un sistema físico un ciclo límite representa una oscilación libre.



**Figura 3.2:** Ciclo límite estable: Las órbitas son repelidas del punto inestable interior y atraídas hacia el ciclo límite estable. **Fuente:** Elaboración propia.

Una vez que se han determinado los puntos fijos y su estabilidad deseamos saber si el sistema en estudio tiene o no órbitas cerradas, para eso recurrimos a los siguientes teoremas [12, 21], los cuales son válidos en  $\mathbb{R}^2$ .

**Teorema 3.1.1 Poincaré - Bendixson**[6] *Suponiendo que:*

1.  $D \subset \mathbb{R}^2$  es cerrado y acotado;
2.  $\dot{x} = g(x)$  es un campo vectorial continuamente diferenciable en un conjunto que contiene a  $D$ ;
3.  $D$  no contiene ningún punto fijo; y
4. Existe una trayectoria  $C$  que esta confinada en  $D$ , en el sentido que se inicia en  $D$  y se mantiene en  $D$  en cualquier tiempo futuro.

Entonces  $C$  es una órbita cerrada, o una espiral que tiende a la órbita cerrada cuando  $t \rightarrow \infty$ . En ambos casos,  $D$  contiene una órbita cerrada.

Para probar el Teorema 3.1.1 ver [32, 20].

**Teorema 3.1.2 Criterio de Bendixson**[12] *Dado el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias  $\dot{x} = f(x, y), \dot{y} = g(x, y)$ , si la expresión  $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}$  no es idénticamente nula y no cambia de signo en un dominio  $D$ , entonces la ecuación diferencial no presenta órbitas cerradas en  $D$ .*

La prueba del Teorema 3.1.2 se puede encontrar en [21].

### 3.1.6. Linealización del sistema no lineal

Una propiedad importante de los sistemas lineales es que a partir de los autovalores de las matrices que se obtienen de estos sistemas se puede estudiar la estabilidad de todo el sistema sin resolverlo [25].

En un sistema no lineal, esto no es posible. Pero los sistemas no lineales pueden linealizarse alrededor de sus puntos fijos  $x^*$  [12, 21]. El sistema linealizado alrededor de  $x^*$  tiene la forma [21];

$$\dot{\tilde{x}} = J(x^*)\tilde{x}, \quad \tilde{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (3.6)$$

donde  $J = \left[ \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right]$  es la matriz Jacobiana de la primera derivada parcial de la función  $g = (g_1(x_1, \dots, x_n), g_2(x_1, \dots, x_n), \dots, g_n(x_1, \dots, x_n))^T$ , donde T indica transpuesta, y  $x = x^* + \tilde{x}$  con  $|\tilde{x}| \ll 1$ .

El sistema (3.6) es un sistema lineal de la forma (3.4), por tanto la solución del sistema (3.6), dado un valor inicial  $\tilde{x}(0) = \tilde{x}_o$  es:

$$\tilde{x}(\tilde{x}_o, t) = e^{J(x^*)t}\tilde{x}_o. \quad (3.7)$$

Para utilizar el sistema (3.6) en el estudio del comportamiento local del sistema (3.3), es necesario según el Teorema de Hartman - Grobman [21] (el cual no

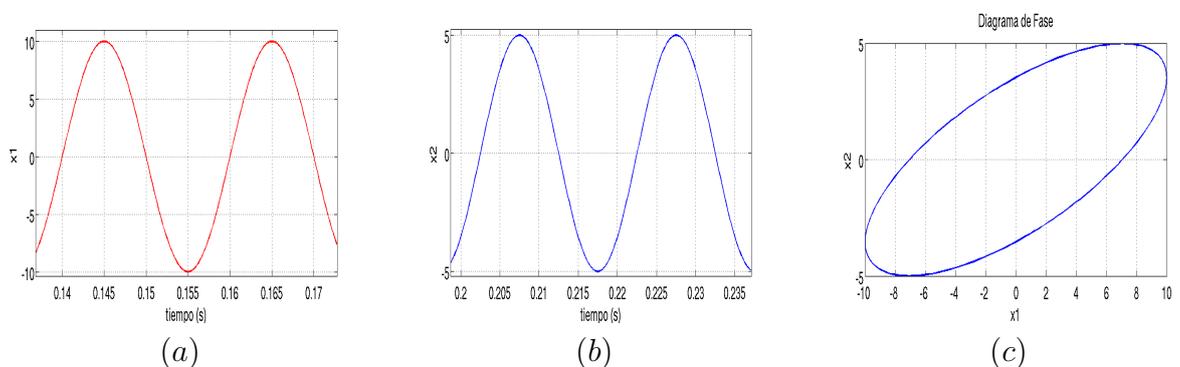
citaremos, pues para ello son necesarias definiciones que escapan al alcance de este trabajo) que  $J(x^*)$  no tenga autovalores cero o puramente imaginarios. Si estas condiciones se cumplen es posible determinar el comportamiento de las soluciones del sistema no lineal cercanas al punto fijo y su estabilidad por medio del sistema linealizado.

Cuando  $J(x^*)$  no tiene autovalores cero o puramente imaginarios,  $x^*$  es llamado punto fijo hiperbólico o no degenerado. Si alguno de los autovalores tiene parte real cero, la estabilidad del sistema no lineal no puede determinarse por linealización, en este caso debe recurrirse al estudio de estabilidad mediante la función de Liapunov [21].

### 3.2. El Mapa de Poincaré

Antes de definir lo que es el mapa de Poincaré, iniciamos esta sección introduciendo el diagrama de fase, el cual es sencillamente un gráfico en donde se dibujan dos variables de estado del sistema (por ejemplo el voltaje y el flujo magnético) [14].

Todas las características dinámicas del sistema están presentes en el diagrama de fases [12]. En el diagrama de fases se observa la evolución temporal de un punto siguiendo una trayectoria; trayectorias cerradas se corresponden con soluciones periódicas [14]. Vea Figura 3.3.

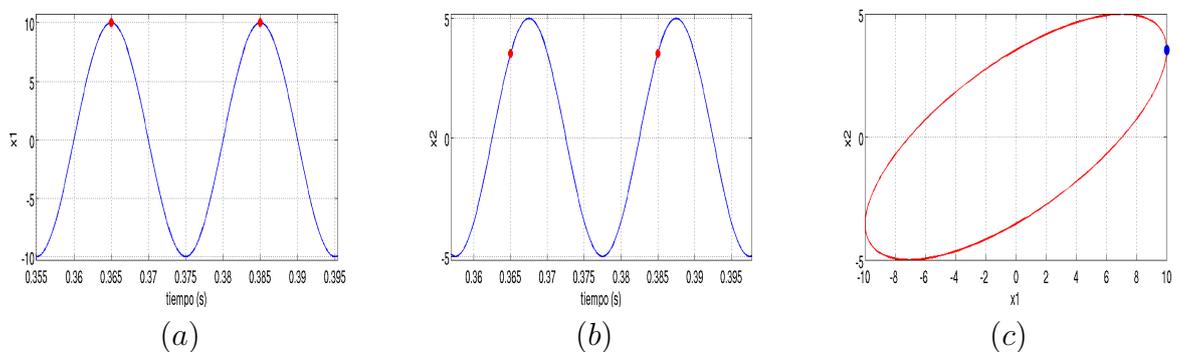


**Figura 3.3:** Construcción del diagrama de fase: (a) Variable de estado  $x_1$  en función del tiempo; (b) Variable de estado  $x_2$  en función del tiempo y (c) Diagrama de fase. **Fuente:** Elaboración propia

**ANÁLISIS DE OSCILADORES NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN. CASO DE ESTUDIO: FERRORESONANCIA EN TRANSFORMADORES**

Quando el sistema presenta varias frecuencias armónicas, el diagrama de fase puede volverse bastante complejo. Para disminuir esta complejidad y conocer la relación que existe entre las frecuencias armónicas que presenta el sistema y una frecuencia de referencia se recurre al mapa de Poincaré.

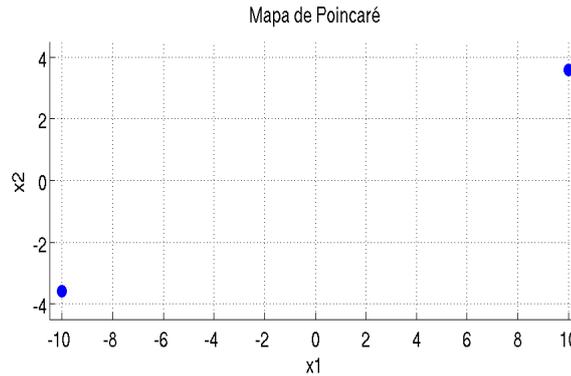
El mapa de Poincaré es un muestreo estroboscópico en el tiempo de las variables de estado del sistema. Para construir el mapa de Poincaré, cada muestra se toma en un tiempo  $t = k\tau$ , donde  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\tau = \frac{1}{F_o}$  es el tiempo de muestreo y  $F_o$  es la frecuencia con respecto a la cual se desea analizar el sistema. Vea Figura 3.5.



**Figura 3.4:** Construcción del mapa de Poincaré: (a) Los puntos rojos indican las muestras tomadas de  $x_1$ ; (b) Los puntos en rojo indican las muestras tomadas de  $x_2$  y (c) Mapa de Poincaré superpuesto al Diagrama de Fase correspondiente. **Fuente:** Elaboración propia.

Si la frecuencia del sistema es igual, o un múltiplo entero de  $F_o$ , en el mapa de Poincaré se obtiene un solo punto. Si la frecuencia del sistema es un submúltiplo de  $F_o$ , esto es,  $f = \frac{1}{n}F_o$  donde  $n \in \mathbb{N}$ , o múltiplo de  $f$ , el mapa de Poincaré presenta  $n$  puntos. En otros casos el mapa de Poincaré muestra un conjunto de puntos más complejo.

Más detalles e información adicional con respecto al mapa de Poincaré puede ser encontrado en [21, 6, 12].



**Figura 3.5:** Mapa de Poincaré indicando sub-armónicos de frecuencia  $\frac{F_o}{2}$ . **Fuente:** Elaboración propia

### 3.3. Estabilidad estructural, la bifurcación

El comportamiento de un sistema dinámico depende de uno o más parámetros de control [12]. Estos parámetros de control son los coeficientes de las ecuaciones que definen al sistema dinámico.

Por ejemplo, en el sistema dinámico  $H(x, t) = \alpha\ddot{x} + \beta\dot{x} + \gamma x - A\cos(\omega t)$ , los parámetros de control del sistema son  $\alpha, \beta, \gamma, A$  y  $\omega$ . Si uno o más de los parámetros del campo vectorial  $H(x, t)$  cambia, tendremos un campo vectorial  $F(x, t)$ , si no existe gran diferencia entre  $H(x, t)$  y  $F(x, t)$ , se dice que ambos son próximos, más formalmente [12]:

**Definición 3.3.1** *Dados dos campos vectoriales  $H(x, t)$  y  $F(x, t)$ , definidos en el mismo espacio  $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , se dice que esos campos están en la misma vecindad de radio  $\epsilon$  si  $|H(x, t) - F(x, t)| < \epsilon$  para cada par  $(x, t)$ .*

De los campos vectoriales  $H$  y  $F$  podemos obtener sus diagramas de fase, los cuales muestran las características dinámicas de ambos sistemas. Si existe similitud entre las características dinámicas de ambos sistemas, decimos que ambos son equivalentes. Una formalización de este concepto está dado por la siguiente definición [12].

**Definición 3.3.2** *Dos campos vectoriales  $H$  y  $F$  son topológicamente equivalentes si existe una función invertible que transforme el diagrama de fases de  $H$*

en el diagrama de fases de  $F$ .

Conociendo los conceptos de vecindad entre dos campos vectoriales y equivalencia entre los mismos, se puede introducir la siguiente definición [12]:

**Definición 3.3.3** *Un sistema es estructuralmente estable si campos vectoriales suficientemente próximos tienen diagramas de fase equivalentes.*

Reduciendo el diagrama de fase a un punto con ayuda del mapa de Poincaré, simplificamos el análisis de su variación, así, fijando que el mapa de Poincaré obtenga el valor máximo de una de las variables de estado se tiene una referencia para poder realizar la comparación.

Si se dibuja este valor máximo de la variable de estado elegida en función del parámetro dado se puede observar el comportamiento de los distintos diagramas de fase, gracias a las propiedades del mapa de Poincaré, si el sistema es estructuralmente estable los diagramas de fase no variarán mucho entre sí al variar el parámetro dado, y los mapas de Poincaré serán similares, pero si se pierde la estabilidad existirá una gran variación, lo que puede ser observado con el mapa de Poincaré como la aparición de más de un punto o el cambio muy grande en la amplitud máxima de la variable de estado usada de referencia.

El gráfico obtenido de dibujar el valor máximo de la variable de estado en función de un parámetro recibe el nombre de diagrama de bifurcación, los puntos donde se dan cambios bruscos en el comportamiento cualitativo del sistema dinámico, esto es, donde se da un cambio en la estabilidad estructural del sistema, reciben el nombre de puntos de bifurcación.

Una explicación más extensa sobre la estabilidad estructural y los tipos de bifurcación se puede encontrar en [12, 21]

### **3.4. Integración numérica**

Existen varios métodos para realizar integración numérica, en este trabajo se utilizan variaciones del método de Runge-Kutta proveídas por el paquete

**ANÁLISIS DE OSCILADORES NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN. CASO DE ESTUDIO: FERRORESONANCIA EN TRANSFORMADORES**

---

Matlab®), estos métodos son muy utilizados pues su implementación computacional no es muy complicada y se obtienen resultados bastante precisos con su utilización.

Para facilitar la comprensión del método de Runge-Kutta, o simplemente RK, primero presentamos el método de Euler, que es un caso particular de los métodos RK.

Lo que buscamos es resolver el sistema:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (3.8)$$

una forma general de resolver este sistema es utilizando la formula:

$$y_{i+1} = y_i + \gamma h; \quad (3.9)$$

La ecuación (3.9) expresa que hallamos un nuevo valor  $y_{i+1}$  que se encuentra a una distancia  $h$  de un valor original  $y_i$  estimando su posición con un estimador  $\gamma$ . Esta formula se aplica paso a paso para calcular un valor posterior y, por lo tanto, para trazar la trayectoria de la solución [13]. Los métodos que utilizan la ecuación (3.9) reciben el nombre de métodos de un paso.

El procedimiento más simple para resolver el sistema (3.8) es utilizar el mismo sistema, en la forma de la primera derivada en  $x_i$ , la cual ofrece una estimación directa de la pendiente en  $x_i$ , de tal forma  $\gamma = f(x_i, y_i)$ , donde  $f(x_i, y_i)$  es el sistema (3.8) evaluado en  $x_i$  e  $y_i$ , sustituyendo el valor de  $\gamma$  en (3.9):

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h; \quad (3.10)$$

La formula (3.10) se conoce como método de Euler, de Euler-Cauchy o de punto pendiente.

### 3.4.1. Errores introducidos por los métodos numéricos

Los métodos numéricos presentan dos tipos de error:

**ANÁLISIS DE OSCILADORES NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN. CASO DE ESTUDIO: FERRORESONANCIA EN TRANSFORMADORES**

---

1. Errores de truncamiento, generados por las mismas técnicas usadas para aproximar los valores
2. Errores de redondeo, los cuales se generan por la limitada cantidad de dígitos disponibles en las computadoras.

Hay dos tipos de errores de truncamiento; el error de truncamiento local que resulta de una aplicación del método dado, en un solo paso y el error de truncamiento propagado que resulta de las aproximaciones producidas durante los pasos previos. La suma de ambos errores es el error de truncamiento global.

El método de Euler se puede desarrollar a partir de la serie de Taylor, así tomando el sistema (3.9) y desarrollándolo en la serie de Taylor tenemos:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + \frac{f'(x_i, y_i)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_i, y_i)}{n!}h^n + O(h^{n+1}) \quad (3.11)$$

Donde  $h = x_{i+1} - x_i$ ;  $O(h^{n+1}) = \frac{f^{(n+1)}(x_i, y_i)\xi}{(n+1)!}h^{n+1}$ , es el error de truncamiento local, el cual es proporcional al tamaño de paso elevado a la potencia  $(n + 1)$ ,  $\xi$  está en algún lugar en el intervalo de  $x_i$  a  $x_{i+1}$ .

Comparando las ecuaciones (3.11) y (3.10) podemos decir que el método de Euler se corresponde con la serie de Taylor hasta el término  $f(x_i, y_i)h$ ; el error de truncamiento indica que se desprecia parte de la solución verdadera al utilizar un número finito de términos de la serie de Taylor. Esto nos indica que obtendremos una solución más aproximada a la real cuando utilicemos más términos de la serie de Taylor para aproximar la solución, esto implica la utilización de las derivadas de orden superior que aparecen en dichos términos, las cuales son complicadas de calcular.

### 3.4.2. Métodos de Runge-Kutta

Con los métodos RK logramos una exactitud equivalente a la que obtendríamos utilizando la serie de Taylor sin despreciar los términos con derivadas

**ANÁLISIS DE OSCILADORES NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN. CASO DE ESTUDIO: FERRORESONANCIA EN TRANSFORMADORES**

---

de orden superior. La fórmula que utiliza este método es una forma generalizada de la ecuación (3.9) [13]:

$$y_{i+i} = y_i + \gamma(x_i, y_i, h)h. \quad (3.12)$$

Donde  $\gamma(x_i, y_i, h)$  es la función incremento, la cual tiene la forma general;

$$\gamma = a_1k_1 + a_2k_2 + \dots + a_nk_n; \quad (3.13)$$

donde las  $a$  son constantes y las  $k$  son:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i); \\ k_2 &= f(x_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1h); \\ k_3 &= f(x_i + p_2h, y_i + q_{21}k_1h + q_{22}k_2h); \\ &\vdots \\ k_n &= f(x_i + p_{n-1}h, y_i + q_{n-1,1}k_1h + q_{n-1,2}k_2h + \dots + q_{n-1,n-1}k_{n-1}h) \end{aligned}$$

donde las  $p$  y las  $q$  son constantes, las ecuaciones que definen los valores de  $k$  son relaciones de recurrencia, esto hace que los métodos RK sean eficientes para cálculos en computadora.

Se pueden tener métodos RK de diferentes órdenes en función de  $n$ , que indica el número de términos de la función incremento, y por lo tanto también representa el orden de la aproximación, por lo general para un método RK de orden  $n$  el error de truncamiento local es  $O(h^{n+1})$  y el global es  $O(h^n)$ .

Los valores de  $a$ ,  $p$  y  $q$  pueden ser deducidos [13], pero no se obtienen valores únicos, esto implica que existe un conjunto de métodos RK para cada orden  $n_k$ . Si la solución buscada es de orden  $n_k$  o menor todos los métodos RK de orden  $n_k$  dan los mismos resultados, esto no ocurre para soluciones con orden  $n_j > n_k$ ; para estos casos algunos métodos RK de orden  $n_k$  son mejores que otros.

### **3.4.3. Métodos adaptativos de Runge-Kutta**

Como este trabajo se centra en el estudio de sistemas que tienen componentes que cambian rápidamente, como transitorios, junto con componentes de cambio lento, como los estados estables; es decir, se trabaja con sistemas rígidos. Los métodos RK descritos hasta este punto no son adecuados para nuestros fines, pues el tamaño de paso es constante, lo que implica que si usamos un tamaño de paso grande podemos perder información del transitorio y si utilizamos tamaños de paso muy pequeños usamos innecesariamente recursos computacionales, pues la precisión adicional no es necesaria en las zonas de cambio lento, que por lo general tienen una mayor duración en el tiempo.

Por lo tanto recurrimos a los métodos adaptativos RK, los cuales adaptan el tamaño de paso para seguir con más precisión a la solución. Esta adaptación del tamaño de paso se realiza utilizando un estimador del error local en cada paso, de tal forma que si el error es mayor a lo deseado se reduce el tamaño del paso y si es menor se aumenta dicho paso para disminuir el costo computacional.

Existen dos formas importantes de incorporar el control adaptativo del tamaño del paso a los métodos de un paso como los métodos RK. Una forma consiste en estimar el error como la diferencia entre dos soluciones en el mismo punto utilizando el método RK del mismo orden, ambas soluciones son obtenidas con tamaños de paso diferentes. La otra forma consiste también en estimar el error como la diferencia de dos soluciones en el mismo punto, pero utilizando métodos RK de diferente orden.

En este trabajo utilizamos mayormente este último caso, pues los algoritmos que utilizan la estimación de error con cálculos con métodos RK de diferente orden son más eficientes computacionalmente frente a los que utilizan la variación del tamaño del paso sin variar el orden del método RK.

### 3.5. Transformada de Fourier

Utilizamos la transformada de Fourier para conocer el comportamiento de una señal dada (esto sería una órbita dada del sistema) en el dominio de la frecuencia.

Dada una señal en el dominio del tiempo  $f(t)$ , que cumpla las siguientes condiciones:

1.  $f(t)$  tiene sólo un número finito de máximos y mínimos en cualquier intervalo de tiempo finito;
2.  $f(t)$  tiene sólo un número finito de discontinuidades finitas en cualquier intervalo de tiempo finito;
3.  $f(x)$  es absolutamente integrable, esto es,  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$ .

Definimos el par transformado de Fourier de la siguiente manera [28];

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (3.14)$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.15)$$

Donde (3.14) se denomina transformada de Fourier inversa, y (3.15) se denomina transformada directa de Fourier de  $f(t)$  o simplemente transformada de Fourier,  $\omega = 2\pi F$  es la velocidad angular en  $rad/s$  y  $F$  es frecuencia en  $Hz$ .

Nos interesa conocer la densidad espectral de  $f(t)$ , esto es, deseamos conocer la descomposición de  $f(t)$  en sus componentes en frecuencia. Lo que nos interesa en forma específica es representar esta descomposición en forma gráfica, lo que logramos representando el modulo de la transformada de Fourier  $|F(\omega)|$  en función de la frecuencia.

Como obtenemos cada órbita a partir de integración numérica, los datos que tenemos a nuestra disposición son datos discretos y finitos, es por ello que debemos recurrir a la transformada discreta de Fourier (DFT), el par transformado de Fourier en tiempo discreto se define como [26];

$$f(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega, \quad (3.16)$$

$$F(\Omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(n) e^{-j\Omega n} \quad (3.17)$$

Donde (3.16) es la transformada de Fourier inversa en tiempo discreto, y (3.17) es la transformada directa de Fourier en tiempo discreto,  $\Omega = 2\pi n \frac{F}{F_s}$  es la velocidad angular en radianes por muestra,  $n$  es el número de muestra,  $F$  es frecuencia de la señal analógica en  $Hz$ ,  $F_s = \frac{1}{T}$  es la frecuencia de muestreo en  $Hz$  y  $T$  es el período de muestreo en segundos. Las variables de velocidad angular están relacionadas de la siguiente forma,  $\Omega = \omega T$ .

### 3.5.1. Análisis de señales con la transformada de Fourier discreta

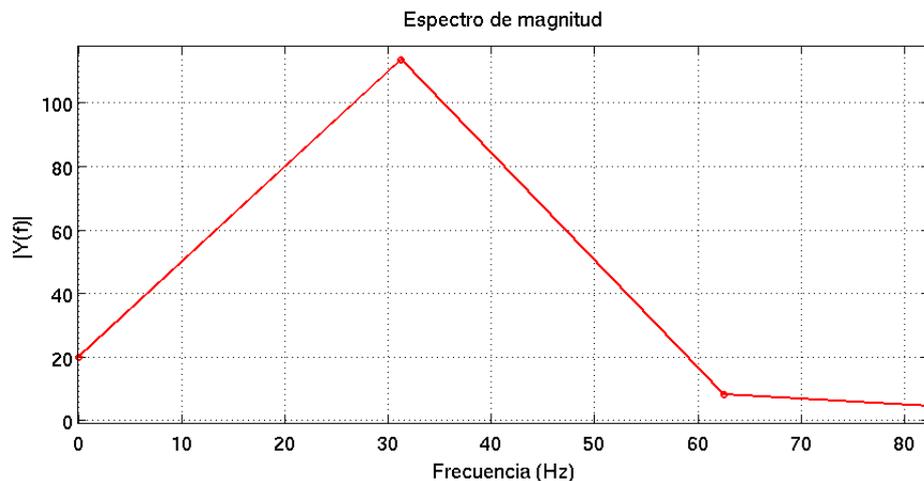
Para poder aplicar la DFT a la señal obtenida por medio de integración numérica, esta tiene que cumplir con algunas condiciones además de las necesarias para la existencia de la transformada de Fourier. Para empezar se debe tener una cantidad de muestras por segundo  $F_s \geq 2B$  por el Teorema del Muestreo[28, 26], donde  $B$  es el ancho de banda de la señal, esto quiere decir que la frecuencia más alta de la señal a analizar es como máximo  $\frac{F_s}{2}$ .

Llamamos  $L$  a la cantidad de muestras en un período de la señal, por lo tanto el período  $T$  de la señal estará dado por  $T = LT_s$ , donde  $T_s = \frac{1}{F_s}$  es el tiempo de muestreo. Mientras más grande sea  $L$  existe menor posibilidad de que se produzca el aliasing [26], y la obtención de la señal original es más precisa utilizando la transformada discreta inversa de Fourier; algunos autores recomiendan el uso

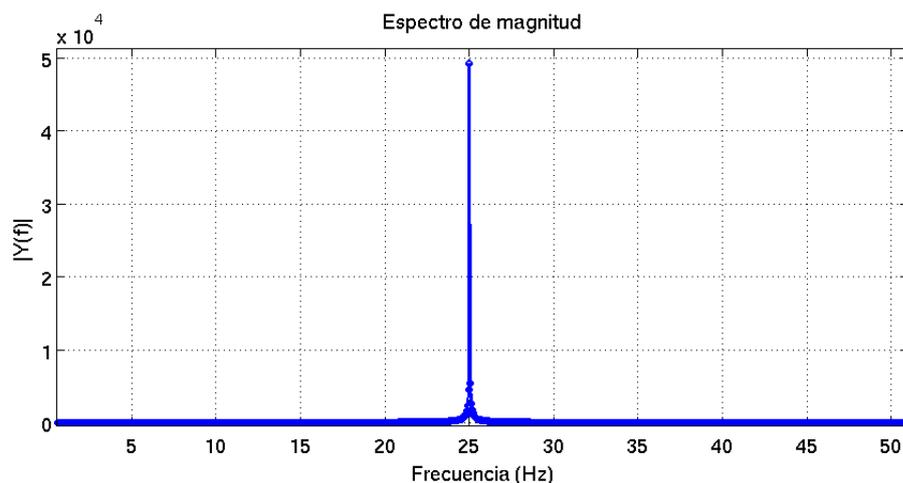
**ANÁLISIS DE OSCILADORES NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN. CASO DE ESTUDIO: FERRORESONANCIA EN TRANSFORMADORES**

de  $L = 10$  como una buena relación entre costos computacionales y precisión de los resultados.

Llamamos  $N$  a la cantidad de muestras de la señal  $f(n)$ , si queremos representar completamente la señal  $f(t)$  con  $t \rightarrow \infty$  por medio de  $f(n)$  entonces  $N \rightarrow \infty$ , lo cual es materialmente imposible, pues  $N$  por limitaciones técnicas debe ser un número finito y por tanto la señal  $f(n)$  será truncada. Si  $N$  es un valor cercano a  $L$  el truncamiento producirá el fenómeno de goteo espectral [26], el cual hace que el espectro de magnitud se ensanche en frecuencia (ver Figura 3.6).



(a) Presencia de goteo espectral



(b) No se presenta goteo espectral

**Figura 3.6:** Espectro de magnitud de una señal cosenoidal; (a)  $N = L = 10$  presenta goteo espectral; (b)  $L = 10$  y  $N = 5000$  el goteo espectral es imperceptible. **Fuente:** Elaboración propia.

**ANÁLISIS DE OSCILADORES NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN. CASO DE  
ESTUDIO: FERRORESONANCIA EN TRANSFORMADORES**

---

Para tener una buena aproximación al espectro de magnitud real  $N$  debe ser un valor mucho mayor que  $L$ ; se puede utilizar la información de un sólo período de la señal, esto es la información de  $T = LT_s$ , y rellenar los  $N - L$  puntos restantes con ceros.

### **3.6. Comentarios Finales del Capítulo**

En este capítulo fueron presentadas las herramientas seleccionadas para el estudio del fenómeno de la ferresonancia, se inicio el capítulo con una introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias, las que representan en general a los sistemas dinámicos continuos, a partir de esta introducción se presento el método geométrico global con la linealización alrededor de un punto fijo para iniciar el estudio del comportamiento del sistema a nivel local, para este estudio es importante tener los conceptos de estabilidad de un punto fijo, existencia de conjuntos límites, y el concepto de bifurcación. Para el estudio de sistemas con órbitas oscilantes a nivel local introducimos el mapa de Poincaré.

Se finalizo el capítulo con una breve explicación de los métodos numéricos utilizados en este trabajo y del análisis espectral con la transformada de Fourier.

## CAPÍTULO 4

### LA FERRORESONANCIA VISTA COMO UN SISTEMA DINÁMICO

El presente Capítulo está dividido en dos partes, en la primera parte se presenta el análisis matemático del modelo que representa la ferroresonancia con ayuda de las herramientas mostradas en el Capítulo anterior. En la segunda parte se presentan los resultados experimentales obtenidos a partir del análisis matemático de la primera parte del Capítulo, se presentan también algunos comentarios sobre dichos resultados.

#### 4.1. Análisis del modelo matemático

El modelo simplificado del primario de un transformador de tensión en falla es dado por la ecuación (2.6), que por comodidad repetimos aquí;

$$\frac{R_2 + R_1}{R_2} \ddot{\varphi} + (nR_1 k_n \varphi^{n-1} + k_1 R_1 + \frac{1}{CR_2}) \dot{\varphi} + \frac{k_1}{C} \varphi + \frac{k_n}{C} \varphi^n = E \omega \cos(\omega t), \quad (4.1)$$

donde  $e(t) = E \sin(\omega t)$ ,  $E$ : Amplitud de la sinusoidal de la fuente de tensión,  $C$  es la capacitancia equivalente del circuito,  $R_1$  las pérdidas en serie del circuito,  $R_2$  las pérdidas en paralelo del circuito. Además:

$$i(\varphi) = k_1 \varphi + k_n \varphi^n; \quad n \in \mathbb{N}, \text{ impar}, (k_1, k_n) \in \mathbb{R}^+, \quad (4.2)$$

donde  $i(\varphi)$  es la corriente de la inductancia y  $\varphi$  es el flujo magnético.

Considerando  $x_1 = \varphi$ ,  $\dot{x}_1 = \dot{\varphi} = x_2$  y  $\dot{x}_2 = \ddot{\varphi}$ , la ecuación (4.1) toma la forma no-autónoma:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & x_2 \\ \dot{x}_2 = & -\frac{R_2(k_1 + k_n x_1^{n-1})}{(R_2 + R_1)C} x_1 - \frac{R_2(nR_1 k_n x_1^{n-1} + k_1 R_1 + \frac{1}{CR_2})}{R_1 + R_2} x_2 + \frac{R_2}{R_2 + R_1} E \omega \cos(\omega t) \end{cases} \quad (4.3)$$

**ANÁLISIS DE OSCILADORES NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN. CASO DE ESTUDIO: FERRORESONANCIA EN TRANSFORMADORES**

---

Utilizaremos la ecuación (4.3) para realizar los estudios de comportamiento dinámico del sistema porque el modelo expresado de esta forma facilita los experimentos numéricos.

#### 4.1.1. Estudio del sistema homogéneo

En esta sección estudiaremos el sistema homogéneo obtenido de hacer  $E = 0$  en (4.3);

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & x_2 \\ \dot{x}_2 = & -\frac{R_2(k_1+k_n x_1^{n-1})}{(R_2+R_1)C}x_1 - \frac{R_2(nR_1 k_n x_1^{n-1}+k_1 R_1+\frac{1}{CR_2})}{R_1+R_2}x_2 \end{cases} \quad (4.4)$$

Antes de resolver la ecuación, extraemos toda la información posible de (4.4). Primeramente hallamos los puntos fijos del sistema, los cuales resultan ser:

$$x_a^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_b^* = \begin{bmatrix} \left(-\frac{k_1}{k_n}\right)^{\frac{1}{n-1}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Podemos decir respecto al punto fijo  $x_b^*(x_1, x_2)$ ; el valor de  $x_1$  será imaginario si  $n$  es impar y las constantes son positivas o ambas son negativas, en caso contrario será un valor real. Teniendo en cuenta los valores típicos de las constantes  $k_1, k_2$  y  $n$  para un transformador real de tensión de  $400/20kV$ , que por comodidad repetimos aquí:  $k_1 = 10^{-8}$ ,  $k_n = 2,34 * 10^{-34}$  y  $n = 9$ . Vemos que en este caso  $x_1$  será imaginario.

En nuestro caso  $x_1$  representa el flujo magnético a través del núcleo del transformador, el cual no puede ser imaginario por tanto  $x_b^*$  no tiene significado físico.

Es de notar que la posición del punto fijo  $x_a^*$  no depende de las constantes del sistema.

##### 4.1.1.1. Linealización en torno a $x_a^*$

Continuando con este estudio procedemos a linealizar el sistema dado por (4.4) alrededor de los puntos fijos; para esto recurrimos al desarrollo en serie de

**ANÁLISIS DE OSCILADORES NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN. CASO DE ESTUDIO: FERRORESONANCIA EN TRANSFORMADORES**

---

Taylor siguiendo el procedimiento indicado en [12].

Haciendo:

$$\tilde{x}_1 = x_1 - \hat{x}_1 = x_1 - 0 \Rightarrow x_1 = \tilde{x}_1$$

$$\tilde{x}_2 = x_2 - \hat{x}_2 = x_2 - 0 \Rightarrow x_2 = \tilde{x}_2$$

Donde:  $\tilde{x}_1$  y  $\tilde{x}_2$  son las componentes de  $\tilde{x}$ , que es la aproximación de primer orden para la distancia al punto  $x(x_1, x_2)$  y el punto fijo  $x_a^*(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ . El sistema linealizado es:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= \tilde{x}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= -\frac{R_2 k_1}{C(R_1 + R_2)} \tilde{x}_1 - \frac{C R_1 R_2 k_1 + 1}{C(R_1 + R_2)} \tilde{x}_2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

El desarrollo en serie de Taylor tiene algunas propiedades muy útiles [27]; el sistema linealizado obtenido aquí es continuo y su primera derivada es continua, la matriz de coeficientes constantes del sistema linealizado es el Jacobiano del sistema no linealizado y ambos sistemas están en la misma vecindad de radio  $\epsilon$ , con  $\epsilon \leq R_n(x)$ , donde  $R_n(x)$  es el término complementario de la serie de Taylor.

La matriz Jacobiana calculada en  $x_a^*$  es:

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{R_2 k_1}{C(R_1 + R_2)} & -\frac{C R_1 R_2 k_1 + 1}{C(R_1 + R_2)} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Los autovalores de  $J_1$  son:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{C R_2 R_1 k_1 + 1}{2C(R_1 + R_2)} - \frac{[(C R_1 R_2 k_1 + 1)^2 - 4R_2 k_1 C(R_1 + R_2)]^{1/2}}{2C(R_1 + R_2)} \\ \lambda_2 &= -\frac{C R_2 R_1 k_1 + 1}{2C(R_1 + R_2)} + \frac{[(C R_1 R_2 k_1 + 1)^2 - 4R_2 k_1 C(R_1 + R_2)]^{1/2}}{2C(R_1 + R_2)} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Los autovalores tendrán parte real cero si  $2C(R_1 + R_2) \rightarrow \infty$  o  $4R_2 k_1 C(R_1 + R_2) \rightarrow 0$ , lo cual para un transformador real es muy improbable, por lo tanto se cumplen los requisitos del Teorema de Hartman - Grobman [21], y podemos uti-

**ANÁLISIS DE OSCILADORES NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN. CASO DE ESTUDIO: FERRORESONANCIA EN TRANSFORMADORES**

---

lizar el sistema linealizado para el análisis del comportamiento local del sistema.

Para realizar dicho análisis, realizaremos comparaciones entre los resultados del sistema linealizado alrededor de  $x_a^* = [0, 0]$ , que se muestran a continuación, con las soluciones del sistema (4.4) halladas por integración numérica;

$$\dot{\tilde{x}} = J_1 \tilde{x}$$

cuya solución es [25];

$$\tilde{x}(t) = S e^{\Lambda t} S^{-1} \tilde{x}(0) \quad (4.8)$$

Donde:

$S$ : Es la matriz que tiene por columnas los autovectores de  $J_1$ .

$$S = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}$$

$S^{-1}$ : Es la inversa de  $S$ .

$\Lambda$ : Es una matriz diagonal, los elementos de la diagonal son los autovalores de  $J_1$ .

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$\tilde{x}(0)$ : Es el valor inicial de  $\tilde{x}$  (valor en el tiempo cero).

#### 4.1.1.2. Existencia de ciclos límite

Para saber si el sistema presenta ciclos límite en  $\mathbb{R}^2$  empleamos el Teorema 3.1.2. De la ecuación (4.4), considerando  $f = \dot{x}_1$  y  $g = \dot{x}_2$  obtenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial g}{\partial x_2} = -\frac{R_2}{(R_2 + R_1)} \left( nk_n R_1 x_1^{n-1} + k_1 R_1 + \frac{1}{C R_2} \right) \quad (4.9)$$

Primero verificamos si la ecuación (4.9) es idénticamente nula; para que eso

ocurra se debe dar:

$$x_1^{n-1} = -\frac{(k_1 R_1 + \frac{1}{CR_2})}{nk_n R_1}$$

observando la ecuación (4.2), que representa la corriente en función del flujo magnético en el devanado del transformador, podemos notar que  $n$  es impar (si no fuera así, la ecuación (4.2) no representaría correctamente una curva de magnetización, la cual es una función impar), por tanto  $x_1$  siempre tendrá un valor imaginario y (4.9) no es idénticamente nula.

La segunda condición para que exista ciclo límite es que la ecuación (4.9) cambie de signo; el único término que puede cambiar de signo en dicha ecuación es  $x_1$ , el cual está elevado a la potencia  $n - 1$ , como  $n$  es impar,  $x_1$  está elevado a una potencia par y por tanto el resultado será siempre positivo, por tanto la ecuación (4.9) no cambia de signo en ningún momento. Por esto último y teniendo en cuenta el párrafo anterior, el sistema no presenta ciclos límite.

#### **4.1.2. Estudio del sistema no homogéneo**

El sistema no homogéneo es el mostrado en la ecuación (4.3), para estudiar este sistema recurriremos a la utilización del diagrama de bifurcación para estudiar su comportamiento global y simulaciones numéricas para estudiar el comportamiento local.

Primero realizamos un estudio del comportamiento local, comparando las órbitas del sistema linealizado alrededor de  $x_a^* = [0, 0]$  con las del sistema no lineal que son obtenidas mediante integración numérica de (4.3).

Representamos el sistema linealizado no homogéneo de la siguiente manera:

$$\dot{\tilde{x}} = J_1 \tilde{x} + Bu(t)$$

Donde:  $J_1$  es el Jacobiano de (4.4);

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$u(t) = \frac{R_2}{R_2 + R_1} E \omega \cos(\omega t)$$

La solución del sistema linealizado es [25]:

$$\tilde{x}(t) = S e^{\Lambda t} S^{-1} \tilde{x}(0) + \int_0^t S e^{\Lambda(t-\tau)} S^{-1} B u(\tau) d\tau \quad (4.10)$$

Donde:

$S$ : Es la matriz que tiene por columnas los autovectores de  $J_1$ .

$$S = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}$$

$S^{-1}$ : Es la inversa de  $S$ .

$\Lambda$ : Es una matriz diagonal, los elementos de la diagonal son los autovalores de  $J_1$ .

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$\tilde{x}(0)$ : Es el valor inicial de  $\tilde{x}$  (valor en el tiempo cero).

#### 4.1.2.1. Diagrama de bifurcación

El cálculo de la curva de bifurcación por métodos analíticos es extremadamente difícil, por eso encontrar una buena aproximación más sencilla es importante; [2] propone calcular la curva de bifurcación sólo para la ferroresonancia fundamental, utilizando la siguiente simplificación:  $\varphi(t) = \phi \cos(\omega t - \theta)$ . La ferroresonancia fundamental es la que se da a la misma frecuencia de la fuente.

Luego de introducir  $\varphi(t) = \phi \cos(\omega t - \theta)$  en (4.1), y teniendo en cuenta que:

**ANÁLISIS DE OSCILADORES NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN. CASO DE ESTUDIO: FERRORESONANCIA EN TRANSFORMADORES**

---

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\phi\omega\text{sen}(\omega t - \theta)$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\phi\omega^2\text{cos}(\omega t - \theta)$$

nos queda:

$$\begin{aligned} & -\frac{(R_1 + R_2)}{R_2}\phi\omega^2\text{cos}(\omega t - \theta) - \frac{\phi\omega}{R_2C}\text{sen}(\omega t - \theta) - \dots \\ & \dots - R_1k_1\phi\omega\text{sen}(\omega t - \theta) - R_1nk_n\phi^n\text{cos}^{n-1}(\omega t - \theta)\text{sen}(\omega t - \theta) + \dots \\ & \dots + \frac{k_1\phi}{C}\text{cos}(\omega t - \theta) + \frac{k_n\phi^n}{C}\text{cos}^n(\omega t - \theta) = E\omega\text{cos}\omega t \end{aligned} \quad (4.11)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\text{cos}^p A = \frac{1}{2^p}\mathbf{C}_{\frac{p}{2}}^p + \frac{1}{2^{p-1}}\{\text{cos}(pA) + \mathbf{C}_1^p\text{cos}(p-2)A + \dots + \mathbf{C}_{\frac{p-2}{2}}^p\text{cos}(2A)\} \quad (4.12)$$

si  $p$  es par, y

$$\text{cos}^p A = \frac{1}{2^{p-1}}\{\text{cos}(pA) + \mathbf{C}_1^p\text{cos}(p-2)A + \dots + \mathbf{C}_{\frac{p-1}{2}}^p\text{cos}A\} \quad (4.13)$$

si  $p$  es impar, donde  $\mathbf{C}_m^k = \frac{k!}{m!(k-m)!}$  son las combinaciones de  $k$  elementos tomados de  $a$   $m$ . De las relaciones (4.12) y (4.13) nos interesan únicamente los términos con frecuencia fundamental, así tenemos que:

$$\text{cos}^p A = \frac{1}{2^p}\mathbf{C}_{\frac{p}{2}}^p. \quad (4.14)$$

si  $p$  es par, y

$$\text{cos}^p A = \frac{1}{2^{p-1}}\mathbf{C}_{\frac{p-1}{2}}^p\text{cos}A. \quad (4.15)$$

si  $p$  es impar. Introduciendo los resultados (4.14) y (4.15) en la ecuación (4.11)

**ANÁLISIS DE OSCILADORES NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN. CASO DE ESTUDIO: FERRORESONANCIA EN TRANSFORMADORES**

nos queda (Recordando que  $n$  es impar en nuestro caso, por tanto  $n - 1$  es par):

$$\begin{aligned} & \left\{ -\frac{(R_2 + R_1)}{R_2} \phi \omega^2 \cos\theta + \frac{\phi \omega}{R_2 C} \text{sen}\theta + R_1 k_1 \phi \omega \text{sen}\theta + R_1 n k_n \phi^n \frac{1}{2^{n-1}} \mathbf{C}_{\frac{n-1}{2}}^{n-1} \text{sen}\theta + \frac{k_1 \theta}{C} \cos\theta + \dots \right. \\ & \quad \left. \dots + \frac{k_n \phi^n}{2^{n-1} C} \mathbf{C}_{\frac{n-1}{2}}^n \cos\theta \right\} \cos\omega t + \left\{ -\frac{(R_1 + R_2)}{R_2} \phi \omega^2 \text{sen}\theta - \frac{\phi \omega}{R_2 C} \cos\theta - \dots \right. \\ & \quad \left. \dots - R_1 k_1 \phi \omega \cos\theta - R_1 n k_n \phi^n \frac{1}{2^{n-1}} \mathbf{C}_{\frac{n-1}{2}}^{n-1} \cos\theta + \frac{k_1 \phi}{C} \text{sen}\theta + \frac{k_n \phi^n}{2^{n-1} C} \mathbf{C}_{\frac{n-1}{2}}^n \text{sen}\theta \right\} \text{sen}\omega t = E \omega \cos\omega t \end{aligned} \quad (4.16)$$

Simplificamos la ecuación (4.16) recurriendo al siguiente procedimiento:

$$Y_1 \cos(\omega t) + Y_2 \text{sen}(\omega t) = Y \cos(\omega t - \lambda). \quad (4.17)$$

donde:  $Y_1 = -\frac{(R_2+R_1)}{R_2} \phi \omega^2 \cos\theta + \frac{\phi \omega}{R_2 C} \text{sen}\theta + R_1 k_1 \phi \omega \text{sen}\theta + R_1 n k_n \phi^n \frac{1}{2^{n-1}} \mathbf{C}_{\frac{n-1}{2}}^{n-1} \text{sen}\theta + \frac{k_1 \theta}{C} \cos\theta + \frac{k_n \phi^n}{2^{n-1} C} \mathbf{C}_{\frac{n-1}{2}}^n \cos\theta,$

$$Y_2 = -\frac{(R_1+R_2)}{R_2} \phi \omega^2 \text{sen}\theta - \frac{\phi \omega}{R_2 C} \cos\theta - R_1 k_1 \phi \omega \cos\theta - R_1 n k_n \phi^n \frac{1}{2^{n-1}} \mathbf{C}_{\frac{n-1}{2}}^{n-1} \cos\theta + \frac{k_1 \phi}{C} \text{sen}\theta + \frac{k_n \phi^n}{2^{n-1} C} \mathbf{C}_{\frac{n-1}{2}}^n \text{sen}\theta$$

$$Y = E \omega.$$

Transformando el coseno de la suma de ángulos en suma de productos de senos y cosenos en el segundo término de la ecuación (4.17) tenemos:

$$Y_1 \cos(\omega t) + Y_2 \text{sen}(\omega t) = Y \cos(\lambda) \cos(\omega t) + Y \text{sen}(\lambda) \text{sen}(\omega t). \quad (4.18)$$

Para que la ecuación (4.18) sea idéntica a la ecuación (4.17), se debe cumplir que  $Y_1 = Y \cos\lambda$ ,  $Y_2 = Y \text{sen}\lambda$ . De esta forma se tiene que  $Y_1^2 + Y_2^2 = Y^2$ ; para que la ecuación (4.18) sea idéntica a la ecuación (4.16) se debe cumplir que  $\lambda = 0$ , con estos datos podemos llegar a los siguientes resultados:

$$Y_2 = 0; \quad (4.19)$$

$$Y_1^2 = Y^2. \quad (4.20)$$

Reemplazando valores en la ecuación (4.20) llegamos a:

$$\{A \cos(\theta) + B \sin(\theta)\}^2 = E^2 \omega^2 \quad (4.21)$$

de la ecuación (4.19) y teniendo en cuenta los valores de  $Y_2$  llegamos a:

$$\cos(\theta) = \frac{A}{(A^2 + B^2)^{1/2}} \quad (4.22)$$

Utilizando las ecuaciones (4.21) y (4.22), se llega a la siguiente expresión [15]:

$$E^2 \omega^2 = A^2 + B^2, \quad (4.23)$$

donde  $A = \phi \left[ \frac{k_1}{C} - \frac{R_2 + R_1}{R_2} \omega^2 \right] + \frac{k_n \phi^n}{2^{n-1} C} \mathbf{C}_{\frac{n-1}{2}}^n$ ,  $B = \phi \left[ \frac{\omega}{R_2 C} + R_1 k_1 \omega \right] + R_1 n k_n \phi^n \frac{1}{2^{n-1}} \mathbf{C}_{\frac{n-1}{2}}^{n-1}$ .

La ecuación (4.23) es la expresión analítica para calcular la curva de bifurcación simplificada o curva S.

## 4.2. Resultados experimentales

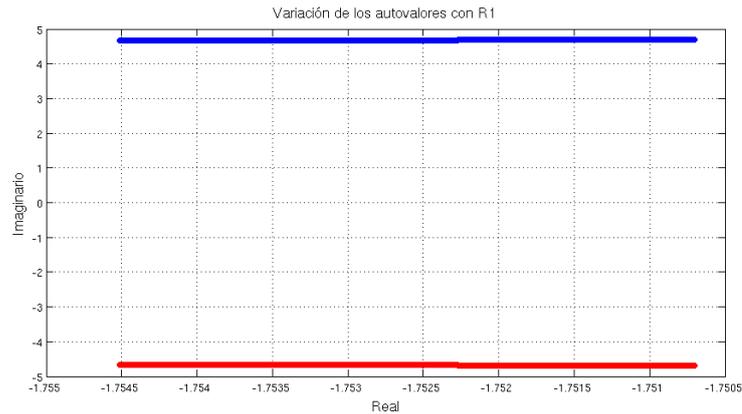
### 4.2.1. Estudio del sistema homogéneo

#### 4.2.1.1. Estabilidad del punto fijo

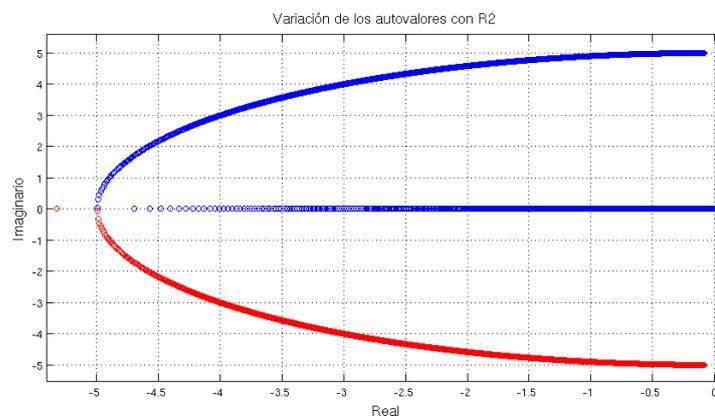
A partir de (4.7) podemos conocer la estabilidad del punto fijo para las variaciones de los parámetros del circuito ( $R_1$ ,  $R_2$  y  $C$ ), mientras los autovalores no tengan valor cero o puramente imaginario.

La Figura 4.1 nos muestra que sólo en casos extremos los autovalores tendrán valor cero o puramente imaginario, lo que nos permite utilizar la linealización

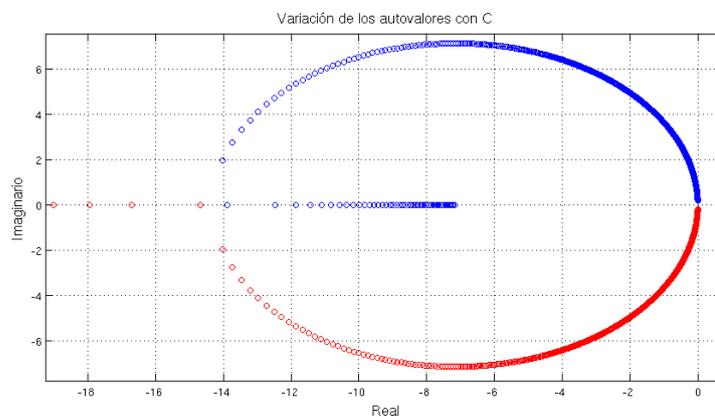
**ANÁLISIS DE OSCILADORES NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN. CASO DE ESTUDIO: FERRORESONANCIA EN TRANSFORMADORES**



(a) Variación de  $R_1$



(b) Variación de  $R_2$



(c) Variación de  $C$

**Figura 4.1:** Variación de los autovalores con la variación de los parámetros del circuito, las abscisas son los valores reales y la ordenadas los valores imaginarios. **Fuente:** Elaboración propia.

para estudiar el sistema (4.3) para un amplio rango de valores de  $C$ ,  $R_1$  y  $R_2$ ; también podemos ver que los valores reales nunca llegan a ser positivos y por tanto el sistema es bastante estable.

Utilizando los valores numéricos de las constantes, que los repetimos aquí por comodidad,  $R_1 = 32K\Omega$ ;  $R_2 = 714M\Omega$ ;  $C = 0,4nF$ ;  $k_1 = 10^{-8}$ ;  $n = 9$ ; en la ecuación (4.7), tenemos que:

$$\lambda_1 = -1,7508 - j4,6833$$

$$\lambda_2 = -1,7508 + j4,6833$$

A partir de estos autovalores podemos decir que el punto fijo  $x_a^*$  es un foco hiperbólico y presenta una estabilidad asintóticamente estable, lo cual es válido en forma local, para los valores dados. Una discusión más extensa y otros tipos de estabilidad en función de los autovalores de la expresión (4.6) puede ser encontrada en [12].

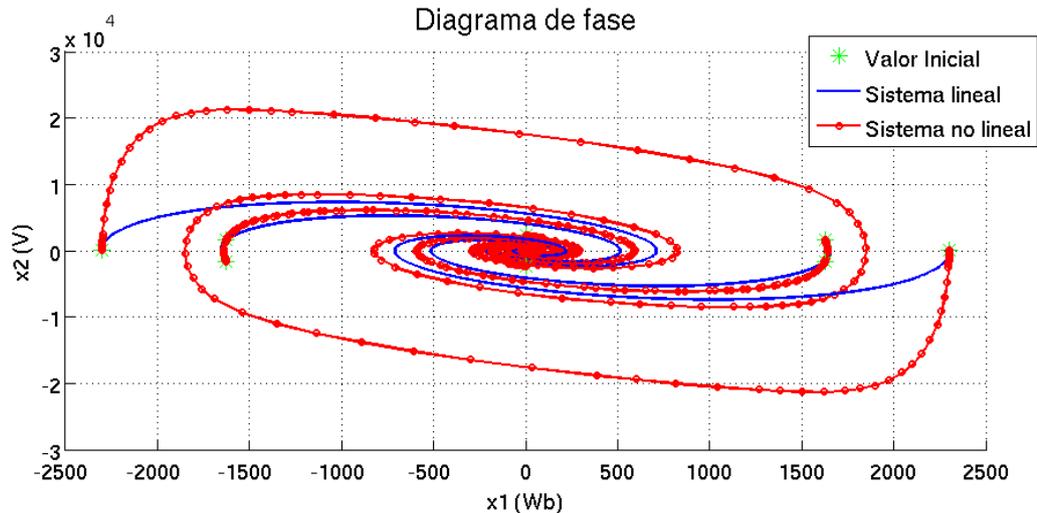
#### **4.2.1.2. Experimentos de «tirar y soltar»**

Realizamos una serie de experimentos dando valores iniciales de tensión y flujo magnético al sistema homogéneo (4.4), lo cual, si utilizamos un sistema de resortes y frenos unidos a una masa como analogía mecánica del sistema eléctrico, es como «tirar» de la masa a una posición dada y «soltarla», para luego ver lo que sucede.

A partir de estos experimentos pudimos notar lo siguiente: Alrededor del punto fijo  $x_a^* = (0,0)$ , los sistemas lineal y no-lineal presentan comportamientos idénticos para  $(x_1, x_2)(0) \in B((0,0), \epsilon)$ , y diferencias notables en la frecuencia, amplitud y forma de onda de la respuesta transitoria fuera de esta vecindad [15] como se puede notar en las Figuras 4.2 y 4.3. En la Figura 4.3 también podemos notar que el sistema no lineal tiende a establecerse en un tiempo diferente al que se establece el sistema lineal.

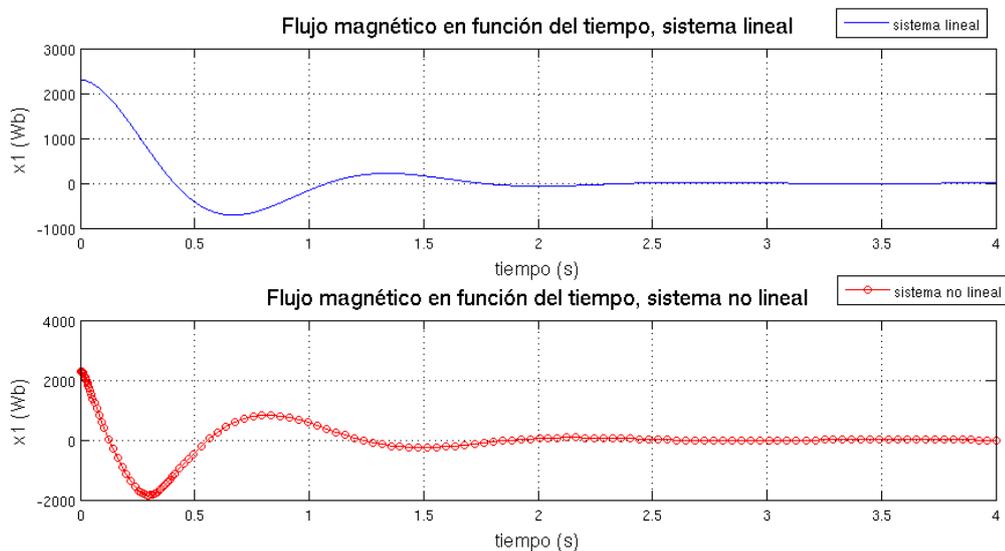
Tanto en la Figura 4.2 como en la Figura 4.3 podemos notar que el sistema homogéneo se estabiliza en el punto fijo  $(x_1, x_2) = (0,0)$  tanto para el sistema lineal como para el no lineal. En la Figura 4.2 es de notar las diferencias de com-

**ANÁLISIS DE OSCILADORES NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN. CASO DE ESTUDIO: FERRORESONANCIA EN TRANSFORMADORES**



**Figura 4.2:** Comparación entre los diagramas de fase de los sistemas homogéneos, tanto lineal como no lineal, note la diferencia entre ambas trayectorias, en ciertos casos las trayectorias no lineales están más próximas a las lineales que en otros. **Fuente:** Elaboración propia.

portamiento de las respuestas del sistema no lineal según cambian los valores iniciales, esta sensibilidad a los valores iniciales es una característica propia de los sistemas no lineales.



**Figura 4.3:** Flujo magnético a través del bobinado del transformador contra el tiempo para un valor inicial lejano al punto fijo  $x_a^*$ , la frecuencia y la amplitud de la respuesta del sistema no lineal es mayor que la del sistema lineal. **Fuente:** Elaboración propia.

Para todas estas simulaciones fueron utilizados los valores de las constantes presentadas en capítulos previos. La integración numérica fue realizada en Matlab®.

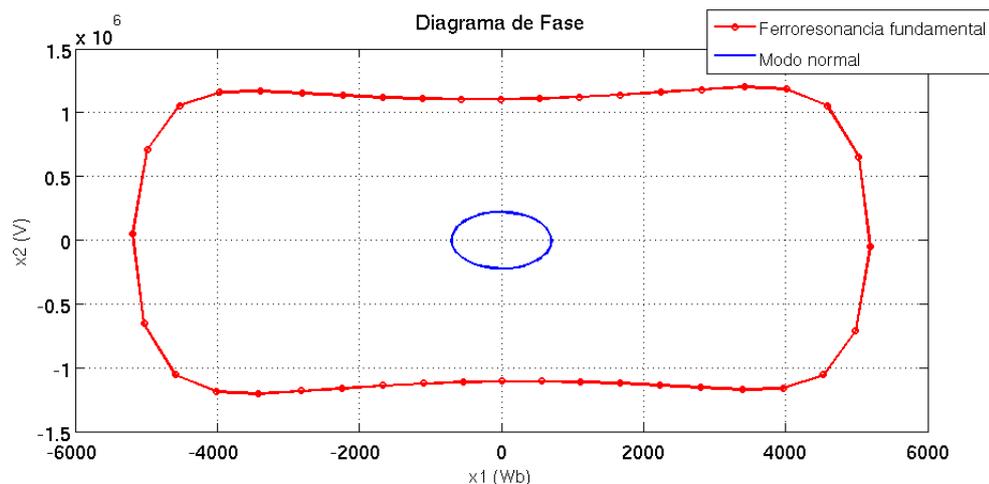
con la función ODE45, la cual esta basada en la formula explicita de Runge-Kutta(4,5) con el par de Dormand-Price; la función ODE45 es la recomendada como la primera opción a ser utilizada por la documentación del Matlab®, y presenta resultados con una suficiente precisión para nuestros fines. Los diagramas del sistema linealizado fueron obtenidos utilizando la ecuación (4.8)

#### 4.2.2. Comportamiento del sistema no homogéneo

En el caso no homogéneo (4.3) procedemos de la misma forma que en el caso homogéneo y los experimentos de «tirar y soltar», primero damos un valor inicial de tensión y flujo magnético al sistema y observamos que ocurre.

Repetiendo este experimento para diferentes puntos iniciales  $(x_1, x_2)(0)$ , observamos que los regímenes permanentes de los sistemas lineal y no-lineal son idénticos para  $(x_1, x_2)(0) \in B((0,0), \epsilon_1)$ , decimos que en esta zona estamos en una operación segura. Fuera de esa zona, tenemos la operación ferroresonante, donde aparecen armónicos en la solución y distorsiones en la forma de onda tanto del flujo magnético a través del devanado del transformador como de la tensión que cae sobre el mismo.

En la Figura 4.4 se puede observar el modo estable ferroresonante fundamental en rojo y el modo estable normal en azul.



**Figura 4.4:** Diagrama de fase: Operación normal y ferroresonante. **Fuente:** Elaboración propia.

Al igual que en los experimentos con el sistema homogéneo, el comportamiento de las órbitas del sistema (4.3) muestra una alta sensibilidad a los valores iniciales  $(x_1, x_2)(0)$ ; esto es, para una pequeña variación en los valores iniciales se tiene que el sistema se comporta en forma muy diferente cuando transcurre un tiempo lo suficientemente grande, este comportamiento hace que sea extremadamente difícil predecir el comportamiento del sistema. Sin embargo el sistema no deja de ser determinístico, pues manteniendo constantes todos los parámetros del sistema, dado un estado inicial el sistema termina estableciéndose siempre en el mismo estado final.

Las órbitas para el sistema linealizado fueron obtenidas a partir de la ecuación (4.10). Las órbitas para el sistema no lineal fueron obtenidas utilizando la herramienta de integración numérica de Matlab<sup>®</sup>, ODE23 la cual es una implementación de la fórmula explícita de Runge-Kutta(2,3) con el par de Bogacki y Shampine; utilizamos la función ODE23 pues el sistema perturbado es moderadamente rígido. Las constantes utilizadas son las presentadas en el Capítulo 3, con  $E = 220kV$ .

Este tipo de experimentos llevan un tiempo de cómputo considerable para su realización, y no aportan una visión global del comportamiento del sistema, es por esto que necesitamos los diagramas de bifurcación.

#### **4.2.2.1. Comparación entre el Diagrama de Bifurcación hallado por fuerza bruta y la Curva S**

Los componentes o parámetros del sistema eléctrico de potencia tales como resistencias, capacitores e inductores pueden presentar variaciones en sus valores, esto debido al envejecimiento, variaciones de las condiciones ambientales y sobre exposición a condiciones de operación extrema. Estas modificaciones en sus valores hace que el sistema se comporte de forma distinta para la que fue proyectada originalmente. Con el diagrama de bifurcación se observa el comportamiento del sistema frente a estas variaciones.

**ANÁLISIS DE OSCILADORES NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN. CASO DE ESTUDIO: FERRORESONANCIA EN TRANSFORMADORES**

---

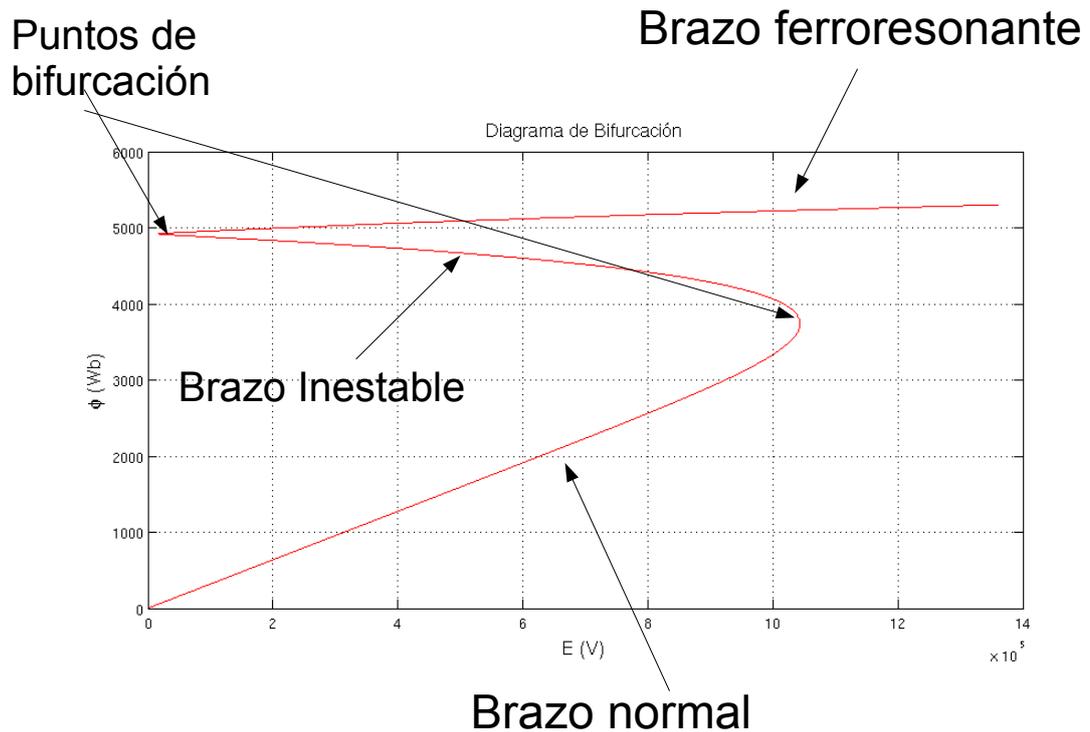
La curva o diagrama de bifurcación indica para qué rangos del parámetro seleccionado el sistema es estable en operación normal, inestable o estable en operación ferroresonante. Un detalle a resaltar de la curva de bifurcación es que no depende de los valores iniciales del sistema.

Con la expresión (4.23) dibujamos la curva de bifurcación para la ferroresonancia fundamental o curva S, que mostramos en la Figura 4.5. Para trazar esta curva se varió el parámetro  $E$ , otras curvas de bifurcación pueden ser obtenidas si se varían los demás parámetros del sistema, los cuales son  $R_1$ ,  $R_2$  y  $C$ . En este trabajo solamente se varía el valor del parámetro  $E$ , dejándose para trabajos futuros la obtención de las curvas de bifurcación correspondientes a la variación de los parámetros restantes.

En la Figura 4.5 podemos ver los puntos de bifurcación, el brazo normal, donde el sistema se comporta en forma lineal; el brazo inestable y el brazo ferroresonante donde se presentan armónicos múltiples de la frecuencia de la fuente y distorsiones en la forma de onda.

Los puntos donde se pasa del brazo normal al inestable y del brazo ferroresonante al inestable se llaman puntos de bifurcación, por lo general se denomina a los puntos de bifurcación presentes en este caso bifurcación de silla-nodo (saddle-node bifurcation) [21], aunque puede recibir otros nombres [6], como bifurcación de pliegue (fold bifurcation) o salto de resonancia (jump resonance).

Si se aumenta lentamente el valor de  $E$  en la Figura 4.5 desde cero, el sistema se mantendrá en el brazo normal hasta que en un punto dado se dará un salto en la amplitud del flujo magnético, este es el primer punto de bifurcación, pasando el sistema al brazo ferroresonante. Si disminuimos la amplitud de  $E$  desde un valor muy grande, primero el sistema se mantendrá en el brazo ferroresonante, hasta llegar a un punto donde repentinamente disminuirá la amplitud de flujo magnético, pasando el sistema al brazo normal, aquí encontramos el segundo punto de bifurcación. Por estos saltos repentinos los puntos de bifurcación reciben el nombre de saltos de resonancia.



**Figura 4.5:** Diagrama de bifurcación o Curva S. **Fuente:** Elaboración propia.

En la Figura 4.6 comparamos la curva S con el diagrama de bifurcación trazada considerando todos los armónicos y obtenida por medio de simulaciones numéricas.

Para trazar el diagrama obtenido por simulaciones numéricas procedimos de la siguiente forma; se resolvió por medio de integración numérica el sistema (4.3), para varios valores iniciales y para una serie de valores del parámetro  $E$  dentro de un rango de valores. Para cada órbita obtenida se trazo el mapa de Poincaré con período de muestreo igual al período del término perturbador, de tal forma que el muestreo se inicie en un tiempo  $\tau$  una vez que la órbita se establece en su estado estable, y el primer valor de muestreo es el valor máximo del flujo magnético que se da dentro del intervalo  $[\tau, \tau + T]$ , donde  $T$  es el período del término perturbador.

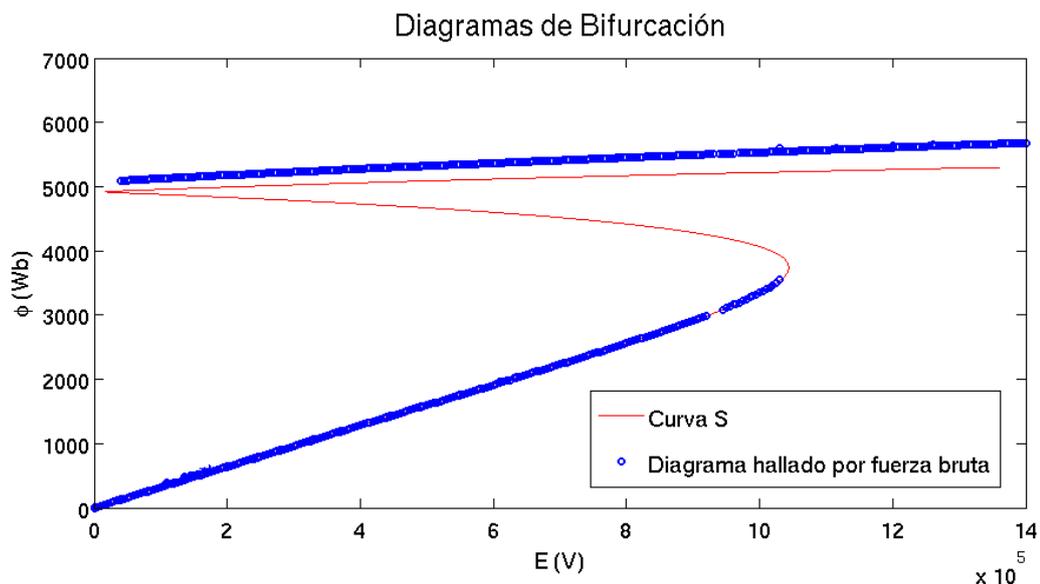
Como vimos en apartados anteriores el tiempo de establecimiento del sistema (4.4) varía con los valores iniciales, por tanto realizamos una estimación

**ANÁLISIS DE OSCILADORES NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN. CASO DE ESTUDIO: FERRORESONANCIA EN TRANSFORMADORES**

a partir del sistema linealizado (4.5): Tomamos el valor del tiempo de establecimiento del sistema (4.5) que para los valores de las constantes dados es  $2,2s$ , y consideramos que en tres veces el tiempo de establecimiento del sistema linealizado se disiparán todos los transitorios del sistema no lineal. Por limitaciones del algoritmo desarrollado  $\tau$  debe ser un número entero, por tanto tomamos  $\tau = 7s$ .

Estos valores obtenidos por medio del muestreo son almacenados, y son dibujados sólo los valores máximos almacenados, en función del flujo magnético y el parámetro  $E$ . Se toman valores máximos tanto para el mapa de Poincaré como para el gráfico resultante, pues el diagrama simplificado se obtiene considerando en la aproximación el valor máximo del flujo magnético  $\phi$ ; si no hiciéramos esto, una comparación entre ambos diagramas no tendría sentido.

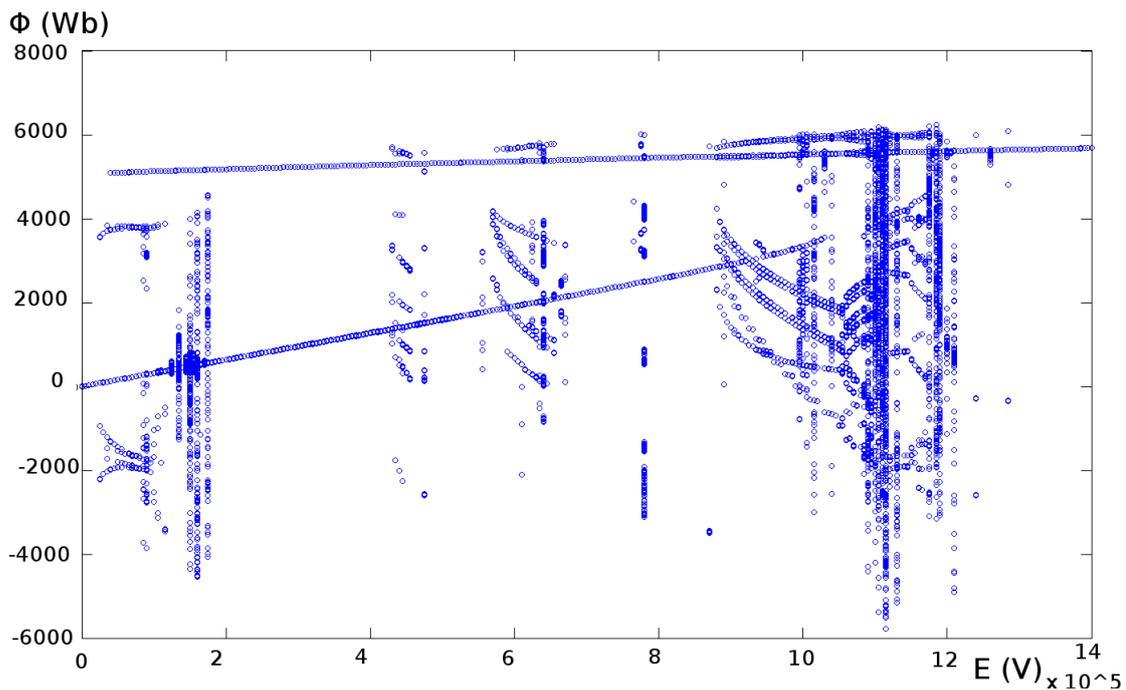
Es notable que ambos diagramas coinciden en el brazo normal, en el brazo ferroresonante el error relativo máximo observado entre el diagrama hallado por fuerza bruta y la curva S es  $E_r \simeq 6,5\%$ . El brazo inestable no puede ser obtenido por medio de simulaciones numéricas, dado el carácter inestable del equilibrio en esos puntos.



**Figura 4.6:** Diagrama de bifurcación simplificado (línea continua roja) y curva obtenida de (4.1) (línea de círculos azules). **Fuente:** Elaboración propia.

#### 4.2.2.2. Diagrama de Bifurcación completo hallado por fuerza bruta

Como ya mencionamos, los diagramas de la Figura 4.6 consideran sólo los puntos máximos del flujo magnético, si no despreciamos el resto de los puntos obtenidos por medio de la simulación numérica, obtenemos un diagrama de bifurcación que muestra una gran variedad de comportamientos ferroresonantes. Este diagrama es presentado en la Figura 4.7.



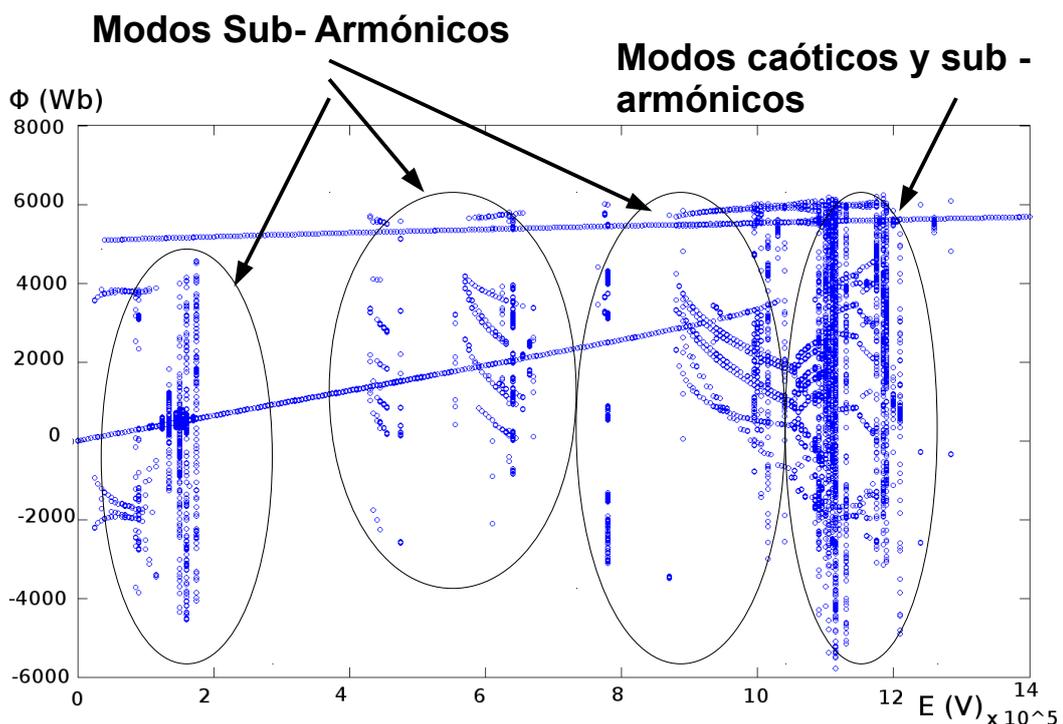
**Figura 4.7:** Diagrama de bifurcación completo obtenido por fuerza bruta. **Fuente:** Elaboración propia.

El mapa de Poincaré presenta un sólo punto si la órbita es periódica con el mismo período de muestreo utilizado para trazar el mapa, o si dicha órbita tiene un período  $\frac{1}{k}$  veces el período de muestreo, donde  $k \in \mathbb{N}$ . En este trabajo fue utilizado el mismo período que el de la función perturbadora  $u(t) = \frac{R_2}{R_2+R_1} E \omega \cos(\omega t)$  de la ecuación (4.3) para trazar el mapa de Poincaré. En estas condiciones, cuando el mapa de Poincaré presenta  $n$  puntos aislados se tiene una órbita con período  $n$  veces el período de la función perturbadora, con  $n \in \mathbb{N}$ , a este tipo de órbita se la llama órbita sub-armónica o modo sub-armónico de  $n$  puntos. Si el mapa de Poincaré es una curva cerrada el comportamiento recibe el nombre de modo

**ANÁLISIS DE OSCILADORES NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN. CASO DE ESTUDIO: FERRORESONANCIA EN TRANSFORMADORES**

cuasi-periódico. Cuando el mapa de Poincaré presenta una nube de puntos la órbita se llama caótica o modo caótico.

La sección de Poincaré que utilizamos es la definida por la tensión y el flujo magnético a través del inductor; el diagrama de bifurcación que presentamos en este trabajo muestra las variaciones del flujo magnético en función del parámetro amplitud de la función perturbadora, esto es, vemos varios mapas de Poincaré de perfil, esto hace que puntos distribuidos en el mapa de Poincaré se vean como una línea vertical en el diagrama de bifurcación, sin importar si son puntos muy cercanos, una curva cerrada o una nube de puntos; por lo tanto, observando la Figura 4.7 no podemos concluir directamente donde están los modos sub-armónicos, cuasi-periódicos o caóticos, pero si podemos tener una idea de donde buscarlos.



**Figura 4.8:** Zonas en donde se pueden encontrar modos ferresonantes distintos al modo ferresonante fundamental. **Fuente:** Elaboración propia.

En la Figura 4.8 se muestran las zonas donde se pueden encontrar los modos sub-armónicos y caóticos, el modo cuasi-periódico no pudo ser encontrado

**ANÁLISIS DE OSCILADORES NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN. CASO DE ESTUDIO: FERRORESONANCIA EN TRANSFORMADORES**

---

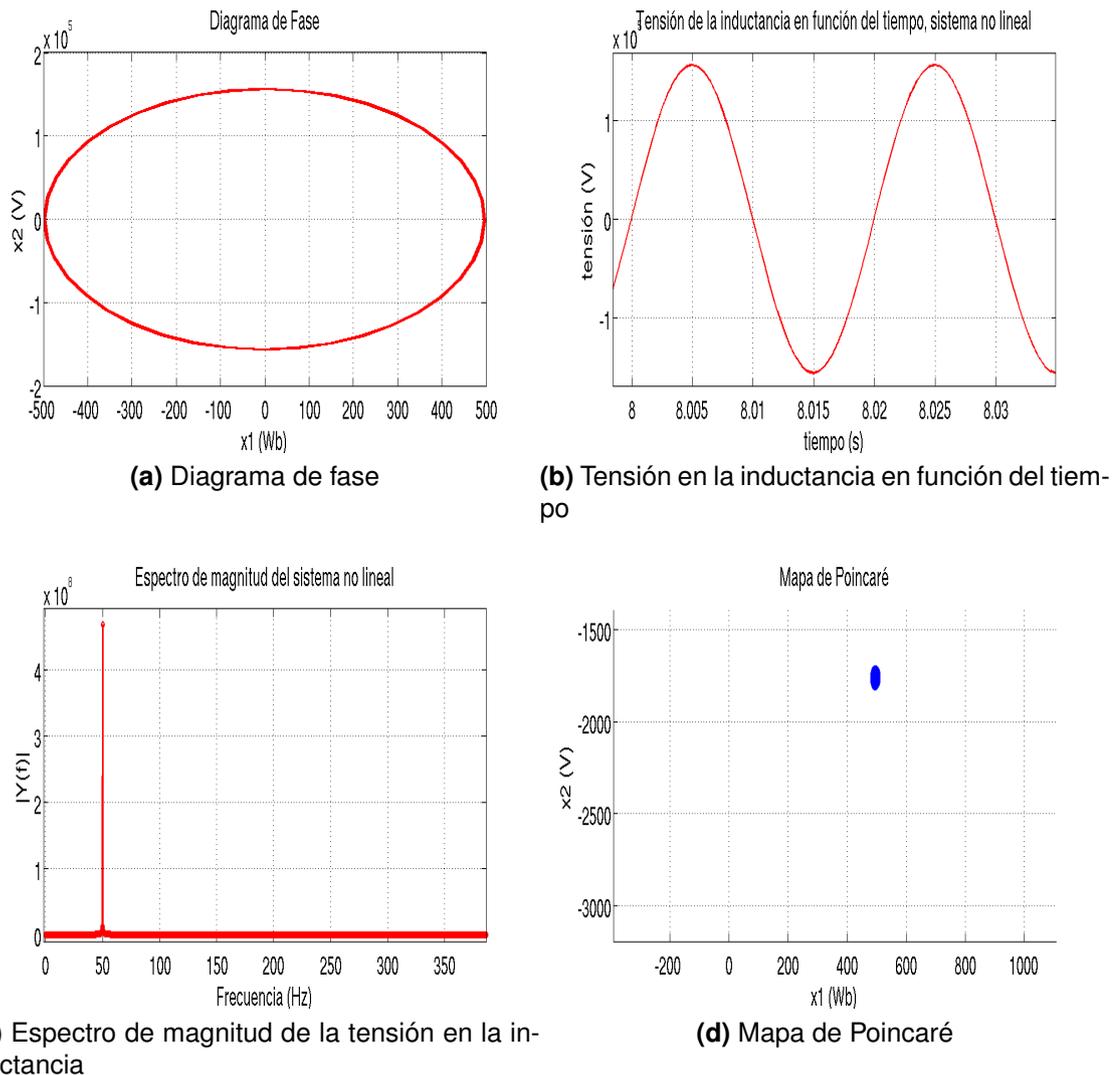
variando únicamente el parámetro  $E$ , esto quizá se deba a que se desprecia el efecto de la histéresis [17]. Estas zonas fueron determinadas de la siguiente forma: En cada zona probable de presentar comportamientos distintos al modo normal o al ferrosresonante fundamental (en las zonas sucias del gráfico de bifurcación) se tomó el parámetro  $E$  como referencia, con estos valores se realizaron experimentos numéricos con diferentes valores iniciales para cada valor de  $E$ , y observando los resultados de dichos experimentos determinamos que tipo de comportamiento ferrosresonante se presenta en cada zona indicada.

#### **4.2.2.3. Modos de operación en estado estable**

A continuación se presentan algunos de los diferentes modos de operación en estado estable encontrados para el sistema (4.3), estos modos de operación fueron hallados utilizando la Figura 4.8 como referencia. Para cada modo de operación se presenta el diagrama de fase, la respuesta del sistema en función del tiempo, el espectro de magnitud y el mapa de Poincaré. Todos los gráficos representan el estado estable, esto es, no muestran los efectos transitorios.

1. *Modo Estable Normal*: Es donde se desea que el sistema se establezca, porque los equipos fueron diseñados para ello. La forma de la señal no presenta distorsiones y su espectro de magnitud se concentra en la frecuencia fundamental, lo ideal es que el sistema se establezca siempre en este estado. Vea la Figura 4.9.
2. *Modo Ferrosresonante Fundamental*: Es el modo ferrosresonante que más se presenta en la práctica [1]. Este modo causa daños al sistema principalmente por las grandes amplitudes y distorsiones de la tensión que presenta. En el espectro de magnitud se puede observar que la señal está distribuida en frecuencias múltiplos impares de la frecuencia fundamental, el mapa de Poincaré presenta un solo punto. Vea la Figura 4.10.
3. *Modos Sub-armónicos*: En los modos sub-armónicos también se puede ob-

**ANÁLISIS DE OSCILADORES NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN. CASO DE ESTUDIO: FERRORESONANCIA EN TRANSFORMADORES**

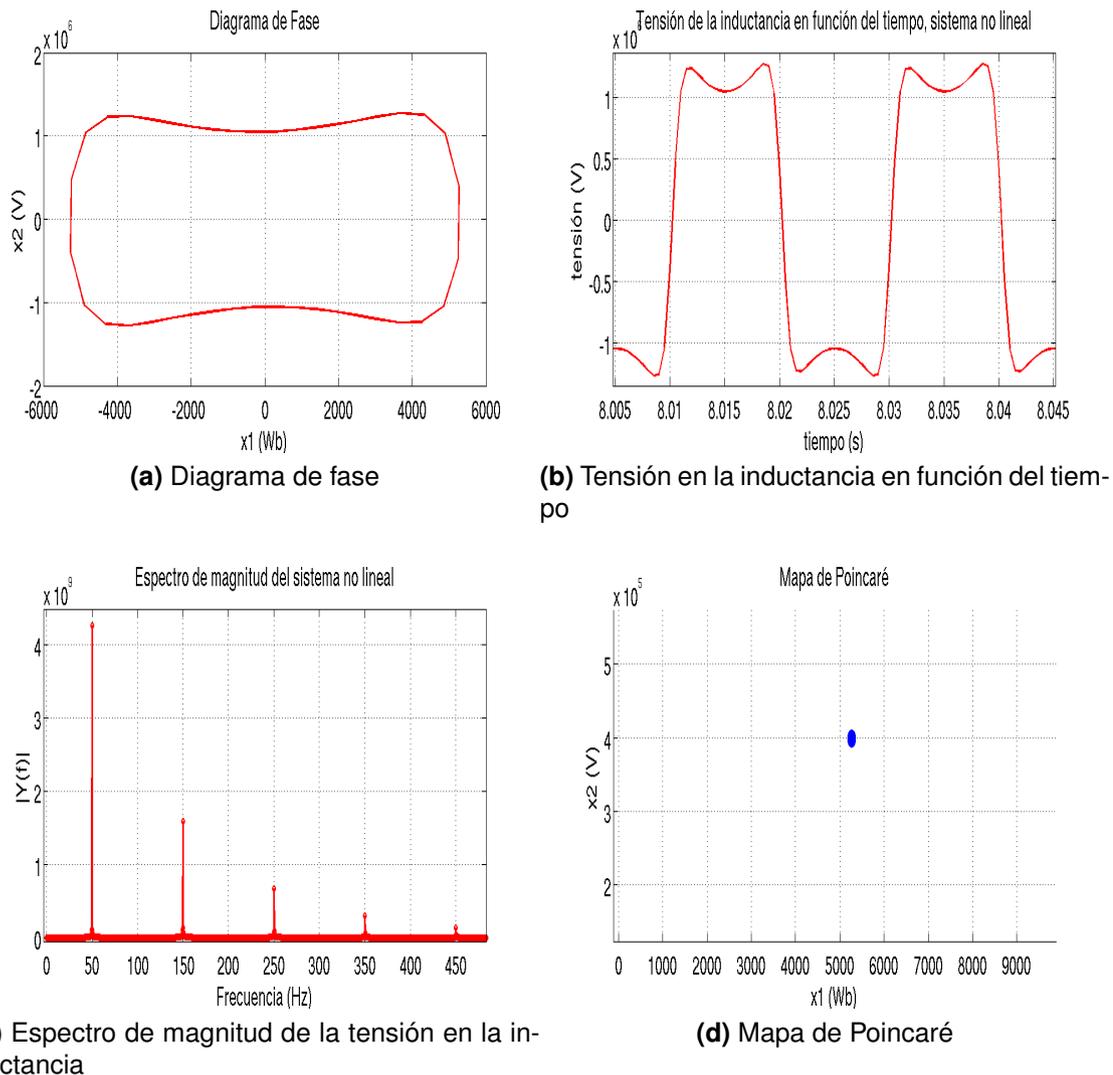


**Figura 4.9:** Modo estable normal hallado con valor inicial  $x_o = [-1000; 0]$  y  $E = 1,56 * 10^5 V$ . **Fuente:** Elaboración propia.

servar grandes distorsiones y grandes amplitudes de la señal, pero en este caso en el espectro de magnitud se observa que la señal está distribuida en frecuencias múltiplos de algún sub múltiplo de la frecuencia fundamental. Un detalle importante que se observa es que la señal presenta mayores componentes en frecuencias que no son la frecuencia fundamental (la frecuencia de operación del sistema), lo que causa pérdidas en el transformador, que pueden ser notadas por sobrecalentamientos y vibraciones mecánicas.

En las Figuras 4.11, 4.12 y 4.13 se presentan distintos modos estables sub-

**ANÁLISIS DE OSCILADORES NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN. CASO DE ESTUDIO: FERRORESONANCIA EN TRANSFORMADORES**

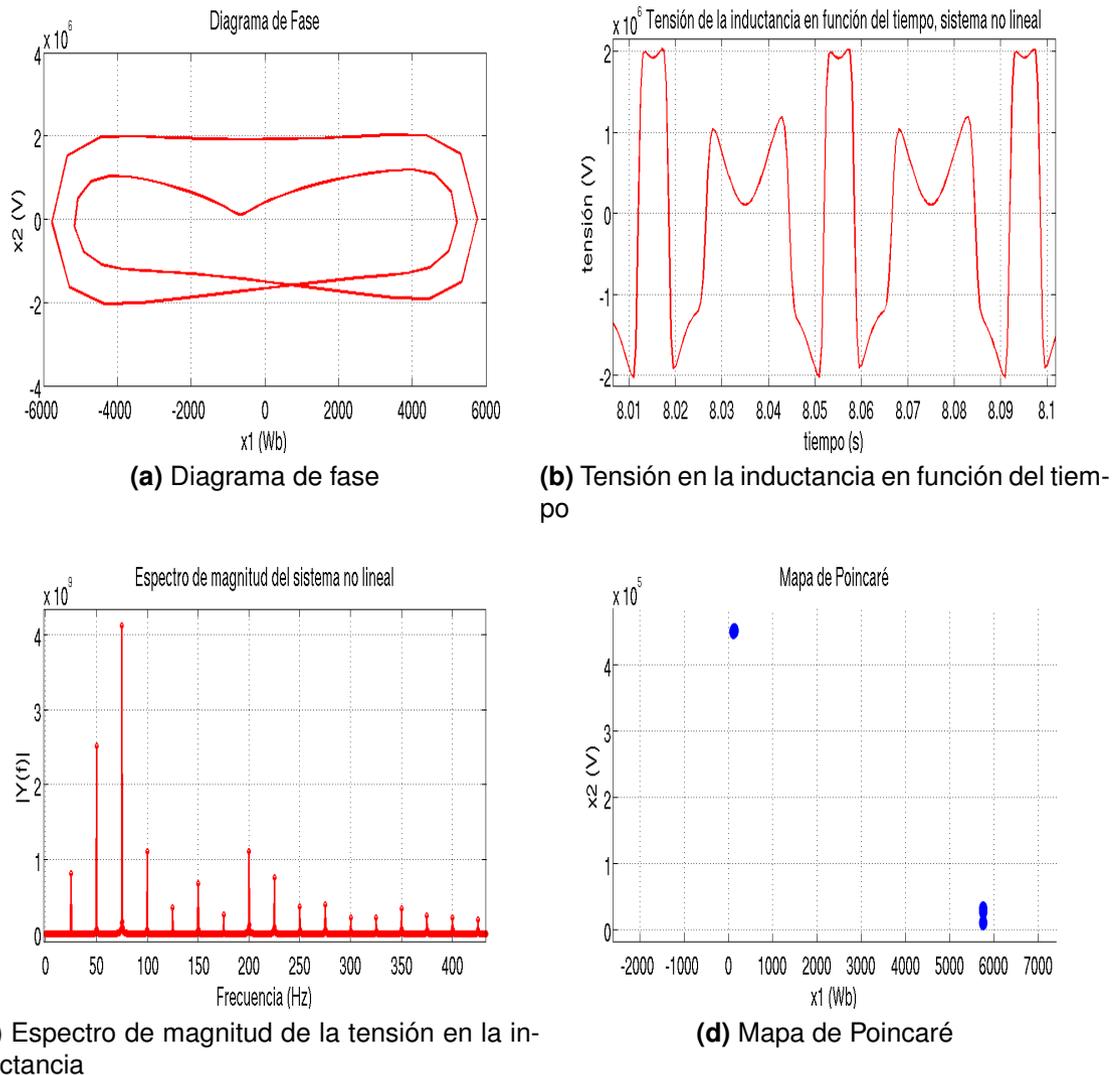


**Figura 4.10:** Modo estable ferroresonante fundamental hallado con valor inicial  $x_o = [-3500; 0]$  y  $E = 4,72 * 10^5 V$ . **Fuente:** Elaboración propia.

armónicos, la denominación de sub-armónico de  $n$  puntos esta dada por la cantidad de puntos que se presentan en el mapa de Poincaré.

4. *Modo Caótico transitorio:* En la Figura 4.14 se presenta un modo caótico, este no es un estado estable, en el mapa de Poincaré 4.14d los puntos están esparcidos sin seguir un orden determinado. Se puede observar en 4.14b que este modo caótico tiende a estabilizarse en la ferroresonancia fundamental cuando se deja transcurrir un período largo de tiempo, este fenómeno donde la dinámica inicial del sistema parece ser caótica se denomina caos transitorio [18].

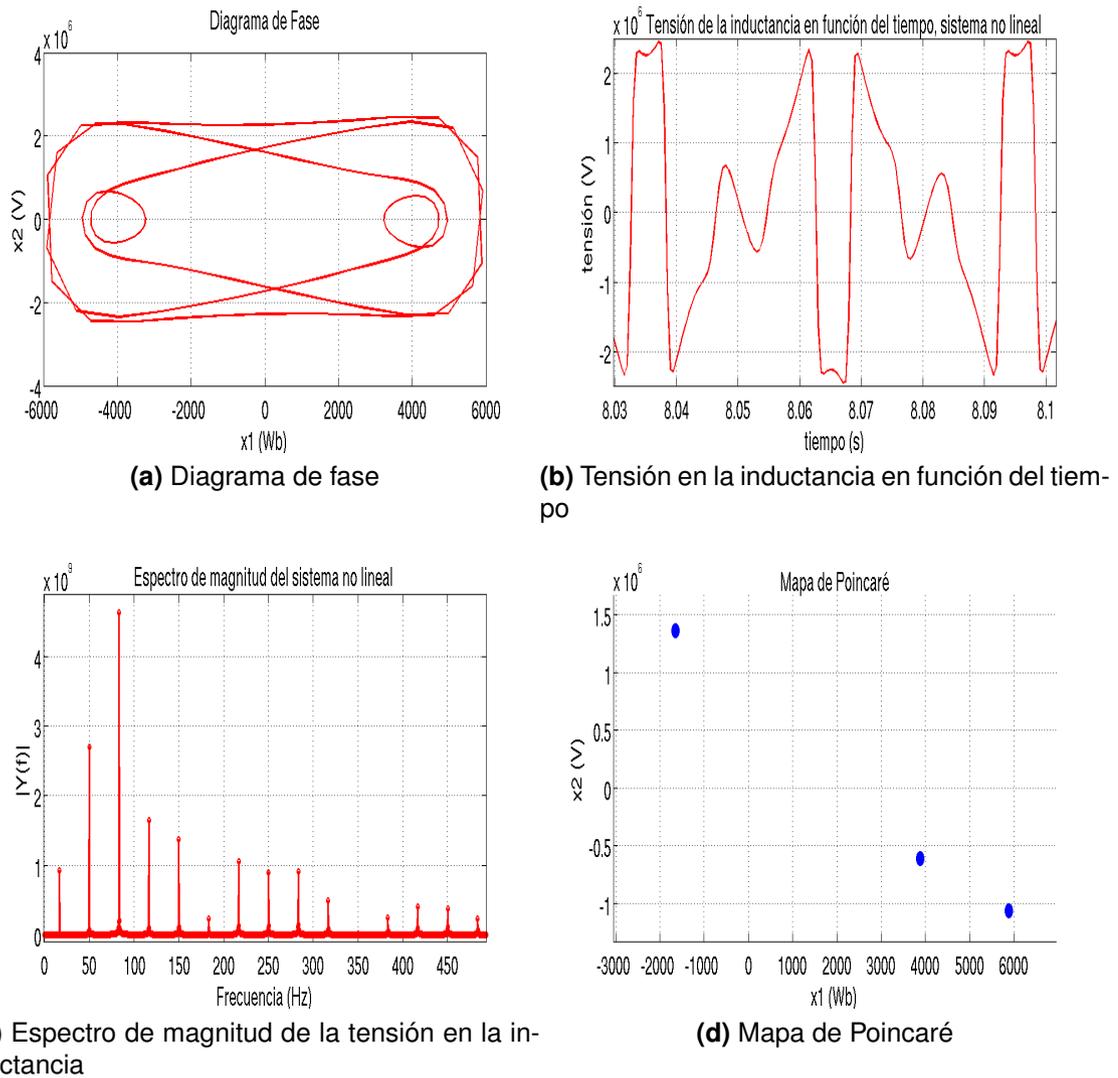
**ANÁLISIS DE OSCILADORES NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN. CASO DE ESTUDIO: FERRORESONANCIA EN TRANSFORMADORES**



**Figura 4.11:** Modo estable sub-armónico de 2 puntos hallado con valor inicial  $x_o = [-4000; 0]$  y  $E = 6,39 \times 10^5 V$ . **Fuente:** Elaboración propia.

5. *Saturación del sistema:* La Figura 4.15 muestra el diagrama de fase 4.15a, el de tensión del inductor en función del tiempo 4.15b, el gráfico del espectro de magnitud 4.15c y el mapa de Poincaré 4.15d, cuando el valor del parámetro  $E$  es muy elevado y el sistema entra en saturación, el diagrama de fase es similar al del modo ferresonante fundamental, pero en el gráfico de espectro de magnitud podemos ver que se presentan componentes de la señal en todos los armónicos múltiplos enteros de la frecuencia fundamental de la fuente.

**ANÁLISIS DE OSCILADORES NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN. CASO DE ESTUDIO: FERRORESONANCIA EN TRANSFORMADORES**



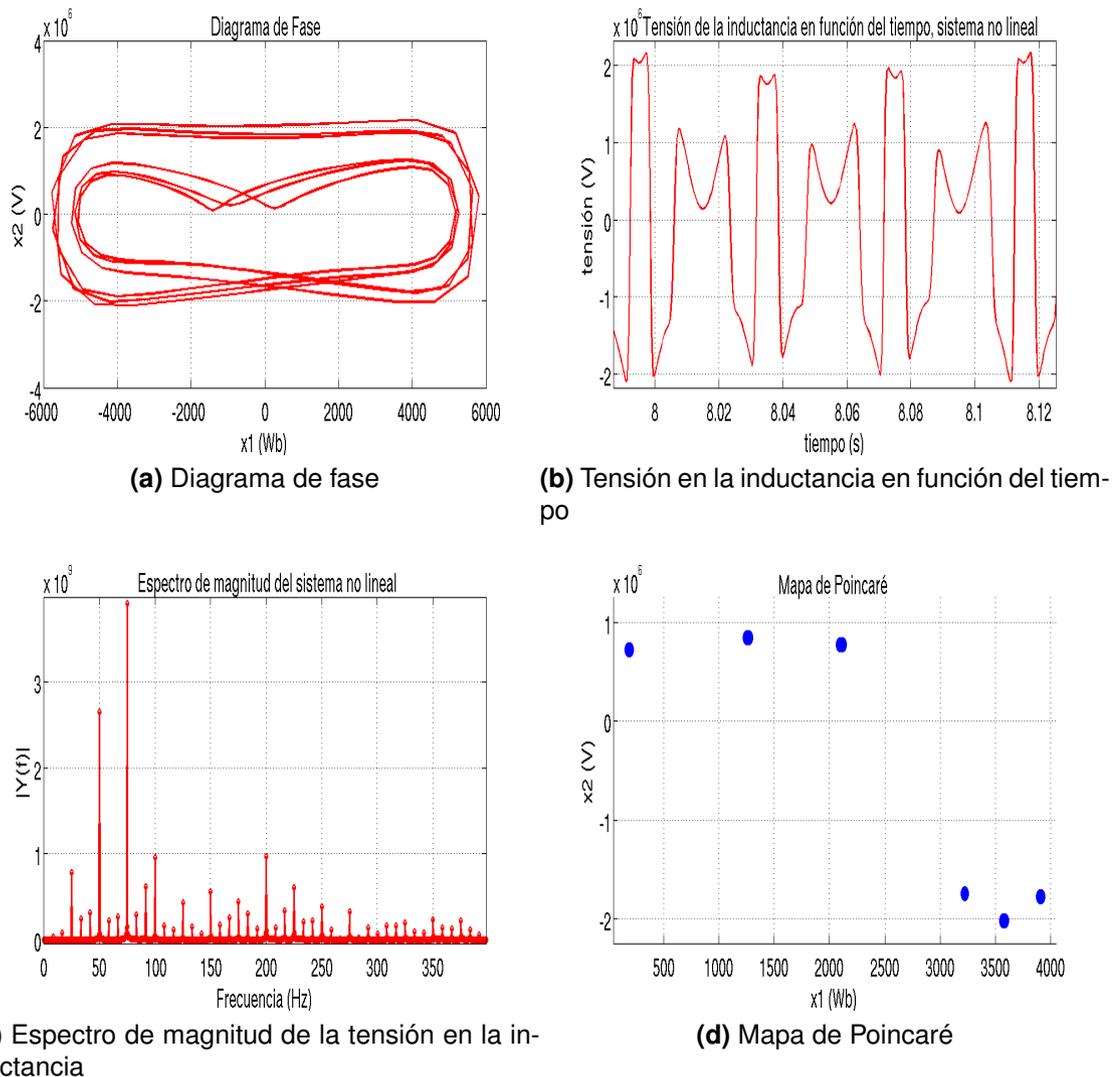
**Figura 4.12:** Modo estable sub-armónico de 3 puntos hallado con valor inicial  $x_o = [-4000; 0]$  y  $E = 11, 17 * 10^5 V$ . **Fuente:** Elaboración propia.

Los resultados del modo normal, ferroresonante y sub-armónicos de orden 2 son bastante aproximados a los obtenidos en forma experimental [1] y a los obtenidos en forma teórica [14], para los demás modos sub-armónicos no se encuentran disponibles suficientes datos para realizar comparaciones. En [3] se menciona al modo caótico transitorio encontrado en este trabajo.

### 4.3. Comentarios Finales del Capítulo

En este capítulo se presentó la implementación de las herramientas matemáticas dadas en el Capítulo 3, se mostraron los resultados de los experimentos

**ANÁLISIS DE OSCILADORES NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN. CASO DE ESTUDIO: FERRORESONANCIA EN TRANSFORMADORES**

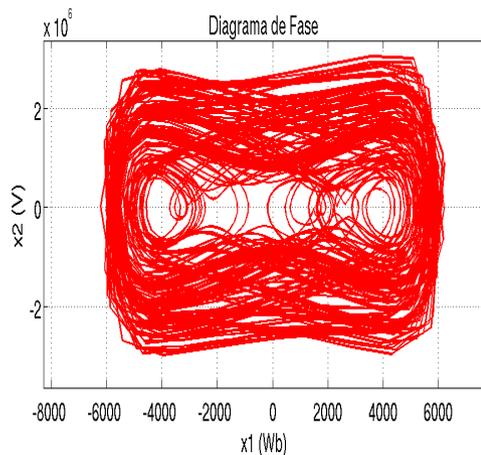


**Figura 4.13:** Modo estable sub-armónico de 6 puntos hallado con valor inicial  $x_o = [0; -1000]$  y  $E = 6,39 \times 10^5 V$ . **Fuente:** Elaboración propia.

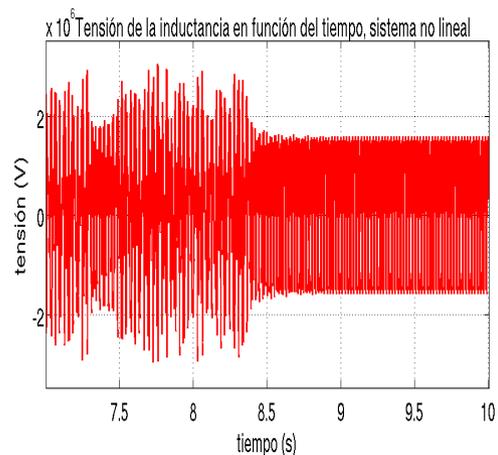
numéricos desarrollados, se discutieron dichos resultados brevemente y se indicaron los potenciales desperfectos que pueden causar los modos ferroresonantes al sistema eléctrico de potencia. Lo más resaltante que se puede indicar de este capítulo es que el análisis matemático y los experimentos numéricos permiten notar que el sistema presenta dos grandes áreas; el área cercana al punto fijo donde el comportamiento que se tiene es el que se tendría si el sistema fuera lineal; y el área lejana al punto fijo, donde se pueden observar gran cantidad de comportamientos debidos a las no linealidades.

En el siguiente capítulo se presentan las principales conclusiones a las que

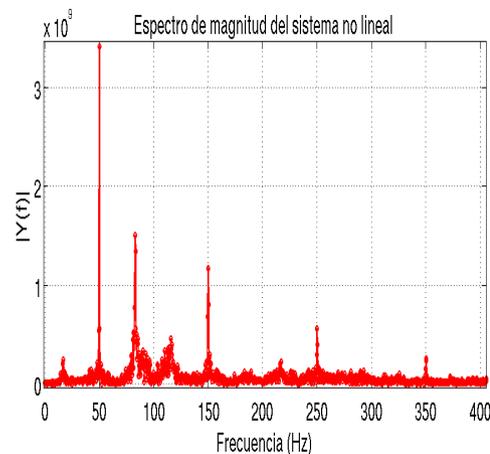
**ANÁLISIS DE OSCILADORES NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN. CASO DE ESTUDIO: FERRORESONANCIA EN TRANSFORMADORES**



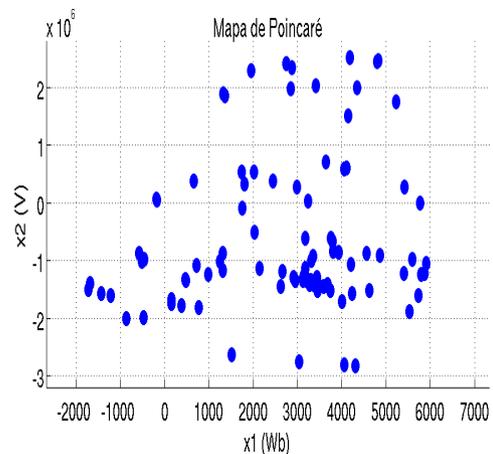
(a) Diagrama de fase



(b) Tensión en la inductancia en función del tiempo



(c) Espectro de magnitud de la tensión en la inductancia

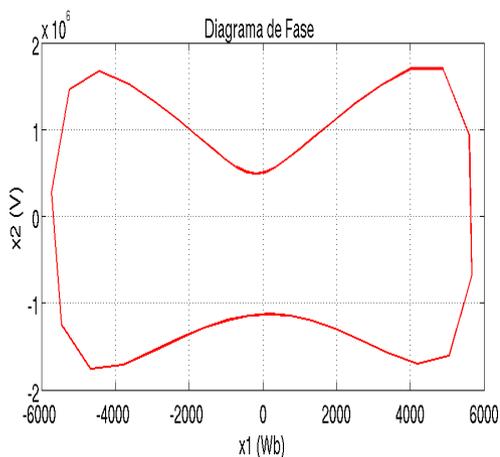


(d) Mapa de Poincaré

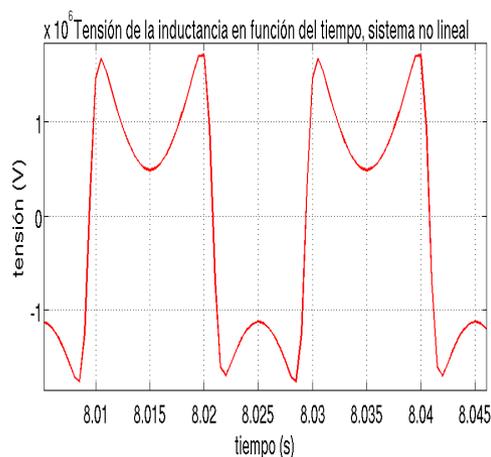
**Figura 4.14:** Modo caótico: Caos transitorio hallado con valor inicial  $x_o = [-4000; 0]$  y  $E = 12, 11 * 10^5 V$ . **Fuente:** Elaboración propia.

llegamos con este trabajo, y algunas propuestas de trabajos futuros que podrían continuar el presente trabajo.

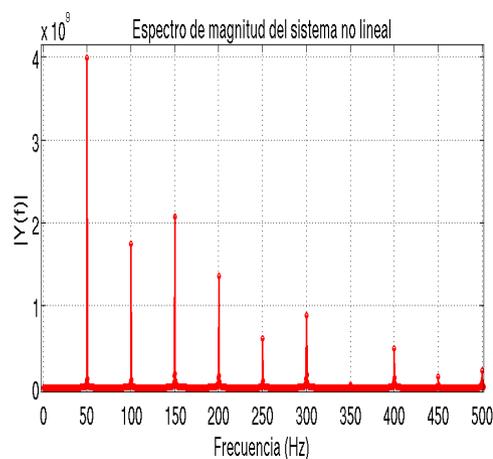
**ANÁLISIS DE OSCILADORES NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN. CASO DE ESTUDIO: FERRORESONANCIA EN TRANSFORMADORES**



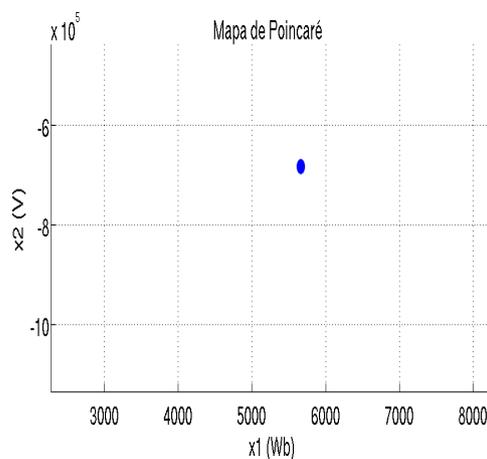
(a) Diagrama de fase



(b) Tensión en la inductancia en función del tiempo



(c) Espectro de magnitud de la tensión en la inductancia



(d) Mapa de Poincaré

**Figura 4.15:** Estado estable debido a la saturación del núcleo ferromagnético del transformador hallado con valor inicial  $x_o = [0; 0]$  y  $E = 15 * 10^5 V$ . **Fuente:** Elaboración propia.

## **CAPÍTULO 5**

### **CONCLUSIONES FINALES Y TRABAJOS FUTUROS**

En este trabajo se presentó en qué consiste el fenómeno de la ferresonancia, su diferencia con la resonancia lineal y en qué casos se puede producir la ferresonancia.

Se presentaron las herramientas matemáticas básicas para el estudio de la ferresonancia, estas herramientas se presentaron con la suficiente generalidad como para poder ser empleadas en el estudio de fenómenos similares.

De la implementación de las herramientas presentadas y de la observación de los resultados pudimos notar una gran sensibilidad del sistema a los valores iniciales, observándose grandes cambios en períodos largos de tiempo cuando se tiene pequeñas variaciones en los valores iniciales, lo que hace que la predicción en un sistema ferresonante sea extremadamente difícil. Sin embargo el sistema presenta comportamiento determinístico.

Se pudo notar que existe una zona en donde todos los puntos iniciales llevan al sistema a operar en el modo normal (y seguro), esta zona se podría describir como cercana al punto fijo. La zona donde los puntos iniciales son lejanos al punto fijo llevan a comportamientos ferresonantes.

El diagrama de bifurcación resulta de gran ayuda para el estudio del comportamiento global del sistema al no depender de los valores iniciales. La curva S obtenida por medio analíticos es una aproximación bastante buena a los resultados obtenidos por fuerza bruta.

Los resultados obtenidos con las herramientas presentadas reproducen en gran medida los resultados experimentales y teóricos de otros trabajos. Las diferencias encontradas aparecen debido a las simplificaciones (por ejemplo no considerar la histéresis) y por la falta de exactitud del modelo utilizado para representar el fenómeno físico.

Algunos trabajos futuros que pueden seguir la línea iniciada por este trabajo:

**ANÁLISIS DE OSCILADORES NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN. CASO DE ESTUDIO: FERRORESONANCIA EN TRANSFORMADORES**

---

- Estudiar otros modelos de sistemas ferrosesonantes que podrían presentar resultados más próximos a los obtenidos en la practica.
- Realizar los gráficos de bifurcación utilizando como parámetros a variar los valores de  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $\omega$  y  $C$ , los cuales en este trabajo fueron mantenidos constantes
- Hallar la cuenca de atracción del punto fijo estable; en este trabajo se determino que el sistema se establece en el modo normal si los puntos iniciales pertenecen a una vecindad del punto fijo estable. Al determinar la cuenca de atracción se establecerá la frontera que separa los puntos iniciales que llevan al modo normal de los que llevan al modo ferrosesonante.
- Estudiar el fenómeno de la ferrosesonancia considerando la histéresis de la corriente de magnetización.
- Estudiar la respuesta en frecuencia del sistema ferrosesonante.
- La realización de las simulaciones con una computadora de escritorio llevan bastante tiempo, sugerimos la utilización de un cluster de computadoras para tener dichos resultados en menos tiempo.
- Dado que el Matlab® es un lenguaje interpretado presenta poca eficiencia computacional, proponemos que los algoritmos sean implementados en lenguajes de bajo nivel como el  $C/C++$ , que proporcionan una mayor eficiencia computacional.
- Desarrollar una bancada experimental para el estudio de la ferrosesonancia para contrastar los resultados teóricos con los prácticos en tiempo real.

### **Bibliografía**

- [1] Philippe Ferracci, Ferroresonance, *Groupe Schneider: Schneider Cahier Technique* Nro 190, March 1998.
- [2] Fathi Ben Amar, Rachid Dhifaoui. "Bifurcation Lines Calculations of Period-1 Ferroresonance", Proceedings of the 6th WSEAS International Conference on Power Systems, Lisbon, Portugal, September 22-24, 2006.
- [3] S. Mozaffari, Chaotic Ferroresonance In Power Transformers, University of British Columbia, 1996, 141 pags.
- [4] D. Jacobson, "Examples of ferroresonance in a high voltage power system," in Proc. IEEE Power Eng. Soc. Annual Meeting, Toronto, ON, Canada, Jul. 2003.
- [5] David A. N. Jacobson, Peter W. Lehn, and Robert W. Menzies, Stability Domain Calculations of Period-1 Ferroresonance in a Nonlinear Resonant Circuit. *IEEE Transactions on Power Delivery*, VOL. 17, NO. 3, pp. 865-871 July 2002
- [6] Strogatz, Steven H., *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Westview Press 1994.
- [7] Bethenod, J., "Sur le Transformateur à Résonance", *L'Éclairage Électrique*, vol. 53, Nov. 30, 1907, pp. 289-96.
- [8] Boucherot, P., "Éxistence de Deux Régimes en Ferrorésonance", *Rev. Gen. de L'Élec.*, vol. 8, no. 24, December 11, 1920, pp. 827-828.
- [9] Afshin Rezaei-Zare, Majid Sanaye-Pasand, Hossein Mohseni, Shahrokh Farhangi, and Reza Iravani. Analysis of Ferroresonance Modes in Power Transformers Using Preisach-Type Hysteretic Magnetizing Inductance, *IEEE Transactions on Power Delivery*, VOL. 22, NO. 2, April 2007
- [10] Afshin Rezaei-Zare, Reza Iravani, Majid Sanaye-Pasand, Hossein Mohseni and Shahrokh Farhangi. An Accurate Hysteresis Model for Ferroresonance

**ANÁLISIS DE OSCILADORES NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN. CASO DE ESTUDIO: FERRORESONANCIA EN TRANSFORMADORES**

---

Analysis of a Transformer, IEEE Transactions on Power Delivery, VOL. 23, NO. 3, July 2008.

- [11] "IEEE slow transients task force report "Modeling and analysis guide-lines for slow transients—Part III: The study of ferroresonance", in IEEE Trans. Power Del., Jan. 2000, vol. 15, no. 1, pp. 255–265.
- [12] Nelson Fiedler-Ferrara, Carmen P. Cintra do Prado. "Caos. Uma Introdução". Editora Edgard Blücher LTDA. 1994.
- [13] S. C. Chapra, R. P. Canale. Métodos numéricos para ingenieros, Cuarta Edición. México: McGraw - Hill Interamericana, 2004.
- [14] V. Valverde, A.J. Mazón, I. Zamora, G. Buigues, Ferroresonance in Voltage Transformers: Analysis and Simulations. International Conference On Renewable Energies And Power Quality (ICREPQ'07), Sevilla 28,29 and 30 Mach 2007. Disponible en [www.icrepq.com/icrepq07/317-valverde.pdf](http://www.icrepq.com/icrepq07/317-valverde.pdf)
- [15] César F. Bogado, Walter Causarano, Christian E. Schaerer. Bifurcación ferroresonante por la saturación magnética, Congresso de Matemática Aplicada e Computacional - Sudeste, Uberlandia, Brasil, septiembre 20 - 23, 2011.
- [16] I. L. Kosow, Maquinas Eléctricas y Transformadores, Segunda Edición. México: Prentice-Hall, 1993.
- [17] H. Lamba, M. Grinfeld, S. McKee, and R. Simpson, "Subharmonic ferroresonance in an LCR circuit with hysteresis," IEEE Trans. Magn., vol. 33, no. 4, pp. 2495–2500, Jul. 1997.
- [18] Moon, F.C., Chaotic Vibration - An Introduction for Scientists and Engineers, John Wiley & Sons, New York , N.Y., 1987.
- [19] J. J. Grainger, W. D. Stevenson Jr., Análisis de Sistemas de Potencia, Primera Edición. México: McGraw-Hill, 2001

**ANÁLISIS DE OSCILADORES NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN. CASO DE  
ESTUDIO: FERRORESONANCIA EN TRANSFORMADORES**

---

- [20] Andronov, A. A., Vitt, E. A. and Khaiken, S. E., Theory of Oscillators. Pergamo Press, Oxford 1966.
- [21] J. Guckenheimer and P. Holmes, Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields, 3rd ed. New York: Springer-Verlag, 1990.
- [22] Devaney, Robert L., An Introduction to Chaotic Dynamical System, 2nd ed. Addison-Wesley, 1989.
- [23] Nayfeh, Ali H. and Mook, Dean T., Nonlinear Oscillations. Wiley Classics Library Edition. 1995
- [24] Ogata, Katsuhiko, Ingeniería de Control Moderna, 4<sup>a</sup> Ed. PEARSON - Prentice Hall, Madrid. 2003
- [25] Strang, Gilbert, Linear Algebra and its Applications, Fourth Edition. THOMSON - Brooks/Cole. 2005
- [26] Proakis, J. G. y Manolakis D. G., Tratamiento digital de señales, 3ra Ed. PRENTICE HALL, Madrid, 1998.
- [27] Piskunov, N., Calculo Diferencial e Integral, Cuarta reimpression. Limusa Noriega Editores, México DF, 1994.
- [28] Stremmer, F. G., Introducción a los Sistemas de Comunicación, 3ra Ed. Addison Wesley Iberoamericana, Wilmington, 1993.
- [29] Sears, F. W., Zemansky, M. W., Young, H. D., Freedman, R. A., Física Universitaria Volumen 2, 9na Ed. Addison Wesley Longman, Mexico DF, 1999.
- [30] G. Swift, "An analytical approach to ferroresonance," IEEE Trans. Power App. Syst., vol. 88, pp. 42–46, Jan. 1969.
- [31] E. Lages Lima, Espaços Metricos 4ta Edição, Proyecto Euclides, Rio de Janeiro, IMPA, 2007.

**ANÁLISIS DE OSCILADORES NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN. CASO DE  
ESTUDIO: FERRORESONANCIA EN TRANSFORMADORES**

---

- [32] Hirsch, M. W. and Smale, S., Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra. Academic Press. New York 1974.
- [33] Coddington, E. A. and Levinson, N., Theory of Ordinary Differential Equations. McGraw-Hill. New York 1955.
- [34] Doering C. I., Lopez A. O., Equações Diferenciais Ordinárias. IMPA, Rio de Janeiro, 2005.

# Apéndice

## **APÉNDICE A**

### **Publicaciones logradas**

Un avance parcial del presente trabajo fue presentado en la V Jornada de Jóvenes Investigadores de la Universidad Nacional de Asunción, los días 15, 16 y 17 de junio de 2011. Con el título: *Influencia de los armónicos en el calculo de la bifurcación ferroresonante.*

Se realizo la presentación de un artículo con resultados parciales de este trabajo en el Congreso de Matemática Aplicada e Computacional - Sudeste, Uberlandia (CMAC-SE-2011), Brasil, realizado los días 20 al 23 de septiembre del 2011. El título del artículo presentado en este congreso es: *Bifurcación ferroresonante por la saturación magnética.* La participación en este congreso fue posible gracias al apoyo financiero brindado por la Facultad de Ingeniería de la UNA.

Parte de los resultados finales del presente trabajo fue presentado en la VI Jornada de Jóvenes Investigadores de la Universidad Nacional de Asunción, los días 27, 28 y 29 de junio de 2012. Con el título: *Modos de Operación Ferroresonantes.*

## **APÉNDICE B**

# **Resumen presentado a la V Jornada de Jóvenes Investigadores de la Universidad Nacional de Asunción**

# **APÉNDICE C**

## **Póster presentado en el CMAC-SE 2011**

## **APÉNDICE D**

**Resumen publicado en el CMAC-SE 2011**

# **APÉNDICE E**

## **Resumen presentado a la VI Jornada de Jóvenes Investigadores de la Universidad Nacional de Asunción**