

UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN

Facultad de Ingeniería

Ingeniería Electrónica



Estudio de un Sistema Ferroresonante Mediante Teorías de Bifurcación

Luis Fernando Salgueiro Romero

San Lorenzo, Paraguay

2013

Miembros del Consejo Directivo

Consejeros Titulares

- Prof. Ing. Isacio Vallejos Aquino (Decano)
- Prof. Ing. María Teresa Pino Rodríguez (Vice Decano)
- Prof. Ing. Amílcar Troche (Docente)
- Prof. Ing. César Sitjar (Docente)
- Prof. Ing. Francisco R. Delgado Marquez (Docente)
- Prof. Ing. Diógenes Sartorio (Docente)
- Prog. Ing. Cirilo Hernáez (Docente)
- Prof. Ing. Ramón Pistilli (Docente - C.S.U.)
- Ing. Pablo Rodríguez (No Docente)
- Ing. Gabriel Enrique Fleitas Ferrari (No Docente)
- Est. Lisandro Echeverría Insua (Estudiante)
- Est. Walter Daniel Noldin (Estudiante)
- Est. Manuel Alejandro Artunduaga (Estudiante)

Consejeros Suplentes

- Prof. Ing. Carlos Montero Volpe (Docente - C.S.U.)
- Ing. Ignacio Daniel Velázquez (No Docente)
- Ing. Alfredo Javier Coronel Correa (No Docente)
- Est. Laura Alejandra Gamarra Sanchez (Estudiante)
- Est. Diego Alfredo Rojas Maluff (Estudiante)
- Est. Geronimo Isaac Medina Banks (Estudiante)

*A mis padres,
Luis y Teresa, que sin su apoyo incondicional,
no hubiese llegado a esta meta.
A mis hermanas y mi familia en general.*

AGRADECIMIENTOS

a Christian Schaerer

a Walter Causarano

a Antonio Aquino

a los amigos y compañeros

AGRADECIMIENTOS INSTITUCIONALES

a la Facultad de Ingeniería de la UNA,
por el apoyo institucional y la oportunidad de trabajar en el Laboratorio de
Mecánica Computacional

a la Facultad Politécnica de la UNA,
por el apoyo institucional y la oportunidad de trabajar en el Laboratorio de
Computación Científica y Aplicada

Índice general

1. Introducción	8
1.1. Objetivo General	9
1.2. Objetivo Específico	9
1.3. Definición del problema	9
1.4. Antecedentes y Estado del arte	11
1.5. Originalidad y aportes	12
1.6. Alcance	13
1.7. Organización por capítulos	13
2. Modelado matemático	15
2.1. Fasores	15
2.2. Método de Galerkin	18
2.2.1. Producto interno	19
2.2.2. Bases de un Espacio vectorial de funciones	20
2.2.3. Método de los residuos ponderados	20
2.2.4. Método de Galerkin	21
2.3. Método de Newton-Rapshon	22
2.3.1. Conceptos previos	22
3. Métodos de continuación	27
3.1. Introducción	27
3.2. Método de Newton y técnicas de Continuación	28
3.2.1. Método de Newton	29
3.2.2. Continuación Natural	30
3.2.3. Algoritmo de Euler-Newton	30
3.3. Teorema de la Función Implícita	31
3.4. Continuación por pseudo-longitud de arco	33
3.5. Bifurcación - Diagramas y puntos de bifurcación	36
3.6. Puntos Límites (Turning Points)	37

4. Aplicación a la ferresonancia	38
4.1. Introducción	38
4.2. El método de Galerkin y su aplicación al estudio de la ferresonancia	40
4.2.1. Principio	40
4.2.2. Aplicación del método de Galerkin al estudio de la ferresonancia	41
4.2.3. Soluciones en función a un parámetro. Métodos de continuación	46
4.3. Método de pseudo longitud de arco	47
4.3.1. Principio	47
4.3.2. Determinación de la ecuación suplementaria	49
4.3.3. Detectando puntos límites. Cambios en nuevas ramificaciones	51
5. Simulaciones y resultados	53
5.1. Análisis previo	53
5.2. Bifurcación respecto a la amplitud de la fuente de tensión E	55
5.3. Influencia de las armónicas dentro del diagrama de bifurcación del flujo respecto a E	59
5.4. Sensibilidad de la variación de un segundo parámetro dentro del diagrama de bifurcación del flujo respecto a E	61
5.5. Bifurcación del flujo respecto a las pérdidas de la línea (R_s)	63
5.6. Bifurcación del flujo respecto a las pérdidas del núcleo del transformador (R_p)	65
5.7. Bifurcación respecto a la inductancia de la línea de transmisión (L)	67
5.8. Bifurcación respecto a la capacitancia (C)	68
5.9. Resumen de valores críticos	69
5.10. Estudio de otros sistemas eléctricos	70

6. Conclusiones finales y Trabajos Futuros	72
6.1. Trabajos Futuros	73
7. Bibliografía	73

ÍNDICE DE APÉNDICES

A. Algoritmo de Borde	80
A.1. Introducción	80
A.2. Algoritmo de borde	80
A.3. Algoritmo de borde: \tilde{A} y A son no singulares	81
A.4. Algoritmo de borde: A singular y \tilde{A} no singular	82
B. Resumen para el CNMAC-Brasil 2013	85
C. Resumen para el AUGM 2013	88

Índice de figuras

2.1. Representación gráfica de una onda senoidal y su fasor correspondiente	17
3.1. Esquema Predictor-Corrector.	28
3.2. Ejemplos de Bifurcación.	32
3.3. Problemas con los puntos singulares.	32
3.4. Método de Continuación por pseudo-longitud de arco (<i>Pseudo arclength</i>).	35
4.1. Circuitos en estudio y su simplificación de Thevenin.	42
4.2. Tangente infinito a la curva en el punto límite.	47
4.3. Pseudo-longitud de arco.	48
4.4. Determinación de la ecuación suplementaria.	49
5.1. Bifurcación Flujo respecto al parámetro E.	56
5.2. Ramificación Estable.	57
5.3. Ramificación Inestable.	57
5.4. Ramificación Ferroresonante.	58
5.5. Bifurcación del Flujo con respecto al parámetro amplitud de la fuente (E). Comparando la ecuación simplificada de [9] (método analítico) con respecto a la curva obtenida por el método de continuación.	60
5.6. Bifurcación del Flujo respecto al parámetro amplitud de la fuente (E). Tomando en cuenta varias armónicas dentro de la serie de Fourier.	61
5.7. Bifurcación del Flujo respecto al parámetro E. Diferentes valores de R_p	61
5.8. Bifurcación del Flujo respecto al parámetro E. Diferentes valores de C.	62

5.9. Bifurcación del flujo respecto al parámetro R_s	64
5.10. Bifurcación del flujo respecto al parámetro R_s por el Método de Continuación y por el Método de Fuerza Bruta.	65
5.11. Bifurcación del flujo respecto al parámetro R_p	65
5.12. Bifurcación del flujo respecto al parámetro R_p por el Método de Continuación y por el Método de Fuerza Bruta.	66
5.13. Bifurcación del flujo respecto a L	67
5.14. Bifurcación del Flujo respecto a C	68
5.15. Configuración circuital inicial - Ferroresonancia paralela.	70
5.16. Bifurcación del Flujo respecto a E . Modelo Kharchoufi (Ferroreso- nancia paralela).	71

Índice de tablas

5.1. Resumen de puntos Críticos. 69

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

La energía eléctrica en un país es de vital importancia para evolucionar hacia un desarrollo sostenido y sustentable con prosperidad y crecimiento económico adecuado. Hablar de calidad y confiabilidad de la energía son dos factores preponderantes a proveer a los agentes económicos, familia, sector público y empresas productoras de bienes y servicios responsables del crecimiento y desarrollo del país. Debido a la complejidad del sistema y a su continuo crecimiento, es extremadamente difícil conservar estos indicadores en un alto nivel. Por consiguiente es sumamente importante extremar recursos para proveer los indicadores mencionados acorde a los estándares internacionales.

Un problema importante que afecta al sistema eléctrico es la **Ferroresonancia**, que consiste en una resonancia no lineal, de alta complejidad y difícil predicción que a su vez es dependiente de varios factores. Por este motivo, a pesar de que este fenómeno ha sido extensamente analizado desde hace alrededor de 90 años [1], aún continúa presentando fallas catastróficas en equipos como consecuencia de sus efectos destructivos [1].

Se han visto problemas ocasionados a nivel de transmisión [1] como de distribución [3] y también a nivel subterráneo [4], [5], donde se constatan los diferentes estados de la ferresonancia [4].

Por lo tanto, por todos los inconvenientes ocasionados justifican estudios a profundidad del tema, más aun en generar un margen de operación segura que evite todo riesgo de ocurrencia.

1.1. Objetivo General

Analizar un sistema ferroresonante a fin de caracterizar al fenómeno que se presenta, y a partir de ello, buscar soluciones que puedan mitigar sus efectos dañinos.

1.2. Objetivo Específico

- Analizar la ferroresonancia mediante técnicas de teoría de bifurcaciones y teorías de control.
- Estudiar la estabilidad estructural del sistema propuesto.
- Analizar la mayor cantidad de eventos a manera de proponer un marco de operación segura para los operadores de redes eléctricas.
- Proveer un ambiente de simulación computacional, de manera a variar sistemáticamente distintos parámetros del sistema y obtener la mayor información del comportamiento del sistema.

1.3. Definición del problema

Numerosas son las configuraciones de posibles factores desencadenantes de la ferroresonancia [7]. Al ser un fenómeno muy sensible a las condiciones iniciales del sistema, la mayoría de los problemas ocasionados se deben a operaciones erróneas de conmutación, rutinas de conmutación o mudanza de carga implicando altas tensiones en líneas de transmisión [8]. A pesar de presentar un transitorio, es en régimen permanente donde se sienten sus efectos [9], generando una alta tasa de sobretensión (como ferroresonancia fundamental) o sobrecorriente (como ferroresonancia sub-armónica) [9], representando una alarmante fuente de riesgo, no solo para el personal operario sino para el sistema eléctrico en sí.

La presencia de un elemento con características no lineales, que en este caso corresponde a la inductancia no lineal de un transformador ferromagnético saturable y una parte lineal compuesta por componentes capacitivos, resistivos e inductivos, presentes en una línea de transmisión, a lo que también habrá que añadir una fuente de poder con una o más fuentes de tensión sinusoidales, pueden desencadenar la ferresonancia.

La característica principal que uno puede notar es la aparición de al menos dos tipos de comportamientos para una misma excitación, dependiendo de las condiciones iniciales[13].

Destacando la no linealidad, difícil predicción, alta sensibilidad a condiciones iniciales y capacidad de presentar comportamientos caóticos, son condiciones suficientes para encarar un problema con un riesgo potencial bastante alto para el sistema eléctrico de potencia, afectando principalmente a las redes de transmisión y distribución [14].

El paradigma de simular-correr es apropiado para el estudio de este fenómeno en vista a que cualquier prueba de campo hecha erróneamente puede tener costos altos. Proveer un ambiente de simulación computacional, donde se puedan recrear las condiciones de ocurrencias y permitir obtener los parámetros óptimos en la cual no se produzca el fenómeno es más efectivo comparado con montar un prototipo de laboratorio.

El universo de variables que atañen a este fenómeno es amplio, la necesidad de poseer muchas simulaciones es importante para obtener un escenario bien detallado del problema.

La importancia de poseer un ambiente de simulación está ampliamente jus-

tificada a nivel de costo, tiempo y seguridad humana. Simular permite obtener cualidades del sistema que a nivel de campo sería imposible visualizarlas y situaciones críticas cuya importancia justifican este trabajo.

Es acuciante, desde el punto de vista de un problema abierto de ingeniería, poseer un conocimiento acabado del tema, aún existen aristas poco exploradas. La literatura correspondiente solo provee soluciones parciales en casos bastante característicos.

1.4. Antecedentes y Estado del arte

La primera vez que la palabra ferresonancia apareció en la literatura fue en los años 20 [45]. Las primeras publicaciones referentes a una oscilación no lineal presente en el sistema eléctrico fueron en el año 1907 [44].

Dentro de la literatura uno puede encontrar trabajos encarados desde distintos puntos de vista, utilizando métodos gráficos, analíticos y últimamente la simulación computacional, ya sea utilizando paquetes comerciales o bien software realizados en un entorno de desarrollo.

Los sistemas eléctricos de potencia poseen una predisposición a constituirse en un sistema caótico lo cual ha facilitado a la teoría de la dinámica no lineal y el caos erigirse como una herramienta importante de estudio para analizar la ferresonancia, aplicando la teoría de bifurcación y caos para un análisis más detallado.

Un buen modelado matemático tiene sus frutos a medida que los resultados obtenidos pueden contrastarse a la realidad de los hechos, últimamente los estudios se han centrado en la idea de mejorar los modelos del transformador y estudiar la ferresonancia a partir de ello [16].

Mozaffari [17] estudió el efecto de las condiciones iniciales en la ferresonancia, demostrando su naturaleza caótica. La implicancia de aplicar descargadores MOSA en el ámbito de distribución fue descrita por Short (1994) y Kershaw(1989). Como mitigar los efectos al aplicar una resistencia a tierra en los descargadores es demostrado por Radmanesh [16].

Kieny [13], planteó el problema de la ferresonancia bajo un punto de vista algebraico, resolviendo un sistema de ecuaciones y hallando el diagrama de bifurcación con respecto a un parámetro, el cual sirvió de punta pie para una serie trabajos utilizando la misma filosofía.

Un antecedente aquí en Paraguay fue el abordaje realizado en [4], el cual caracteriza la ferresonancia en sus distintas facetas desde un punto de vista de la teoría de sistemas dinámicos y teorías espectrales. Demuestra que con la simulación computacional directa es posible calcular el diagrama de bifurcación.

1.5. Originalidad y aportes

Siguiendo la línea de investigación iniciada en [4], encaramos este proyecto no desde el punto de vista de los sistemas dinámicos, sino más bien utilizando la filosofía de Kieny [13], encarándolo desde el punto de vista algebraico. Analizamos la sensibilidad de los puntos críticos de los diagramas de bifurcaciones para distintos parámetros.

Dentro de este trabajo se realiza un modelado matemático de uno de los posibles casos de ferresonancia descritos en la sección 4.2.2. Se plantea el modelo Thevenin de la parte lineal del circuito y las ecuaciones diferenciales que modelan el sistema como un sistema de ecuaciones algebraicas. Resolviéndolo de manera iterativa con el algoritmo de Newton-Raphson en conjunción con uno

de los métodos de continuación, específicamente hablando del método de continuación por pseudo-arco (*pseudo-arclength Continuation method*), es posible diseñar las curvas de bifurcación para los distintos parámetros del sistema.

1.6. Alcance

El trabajo pretende brindar un análisis bien detallado de la ferresonancia mediante el modelado matemático de las variables que actúan en el sistema, tal que los resultados obtenidos sean precisos y calificados respecto a lo visualizado en experiencias reales.

Se presentaran métodos de análisis matemáticos correspondientes a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, rama de la matemática en donde cuadra un sistema ferresonante, dichas técnicas también servirían para otros estudios en donde la física es similar como ser el caso de osciladores, moduladores, etc. Además, se plantearan como resultados del análisis matemático y computacional, criterios de operación segura para sistemas de potencia, en particular los sistemas de distribución eléctrica ante contingencias.

1.7. Organización por capítulos

En el capítulo 2 se introducen las herramientas matemáticas iniciales que serán utilizadas para el desarrollo de este trabajo, se introducen los conceptos de fasores, el método de Newton-Raphson así como también el método de Galerkin, con un punto de vista general.

En el capítulo 3 empezamos analizando los métodos de continuación, las bases sobre la que se sustenta, el teorema de la función implícita, el método de Newton, así como una explicación de los métodos corrector-predictor. También se detalla sobre los algoritmos de continuación natural y el método de continuación por pseudo-longitud de arco (*pseudo-arclength continuation method*).

Además se definen los conceptos de puntos regulares y puntos singulares para luego ver como se aplica el método de continuación por pseudo-longitud de arco con estos tipos de puntos y así poder realizar los diagramas de bifurcación.

En el capítulo 4 se presentan el uso de las herramientas matemáticas previamente introducidas al estudio de la ferresonancia. Se hace el estudio de un caso particular donde el tratamiento aplicado es general.

En el capítulo 5 se detallan las simulaciones realizadas con los distintos diagramas de bifurcación para los distintos parámetros del sistema, además se hace un estudio de sensibilidad de la influencia de los parámetros, dentro del diagrama de bifurcación de un parámetro en particular. También se hace el estudio de un esquema de conexionado diferente al que se estaba estudiando inicialmente.

En el capítulo 6 se detallan las conclusiones finales acerca del trabajo realizado así como también las futuras investigaciones.

CAPÍTULO 2

MODELADO MATEMÁTICO

La Ferroresonancia es un fenómeno presente en un circuito eléctrico presente ante ciertas condiciones de configuración y valores paramétricos. La raíz de la cual parten los distintos enfoques de estudio del sistema son las leyes de mallas de Kirchhoff (LMK) y las ecuaciones diferenciales que modelan el comportamiento de un capacitor e inductor en un circuito eléctrico.

Por un lado, la teoría de sistemas dinámicos utilizan las ecuaciones generadas a partir de LMK para realizar un tratamiento temporal del sistema. Se genera un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden cuyo proceso se lleva al ámbito de los métodos numéricos a fin de hallar soluciones aproximadas del sistema.

Por otro lado, la teoría de fasores y el modelado de sistemas de ecuaciones diferenciales mediante métodos algebraicos nos ayudan a obtener los modelos matemáticos precisos cuando hablamos de modelar circuitos eléctricos. En este trabajo se encara el problema desde este punto de vista, haciendo uso del principio de los Fasores y del método de Galerkin en conjunción con un método de continuación [20] - [24].

2.1. Fasores

Se trata de analizar un circuito eléctrico con una fuente de excitación senoidal y su respuesta en régimen permanente. Si una fuente senoidal se conecta a una red de elementos pasivos todas las tensiones y corrientes de dicha red serán senoidales en el estado permanente y diferirán de la fuente solo en amplitud y en ángulo de fase [20].

La forma de onda de la excitación de tensión senoidal está dado por:

$$V(t) = V_m \sin(\omega t + \alpha) \quad \text{con} \quad \omega = 2\pi F; \quad F = \frac{1}{T} \quad (2.1)$$

siendo:

- V_m : Amplitud máxima o valor pico de la onda senoidal.
- ω : frecuencia angular.
- F : frecuencia de la onda.
- T : Periodo de la onda.
- α : fase inicial de la onda senoidal.

de la teoría trigonométrica sabemos que:

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

que aplicados a la ecuación (2.1) tenemos:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \alpha) = V_m [\cos(\omega t) \cos(\alpha) - \sin(\omega t) \sin(\alpha)] \quad (2.2)$$

Es decir, la señal senoidal inicial se estudiará como una suma de funciones senos y cosenos. Con la fórmula de Euler para senos y cosenos se pasa de un plano temporal a un plano complejo [20], esto es:

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{V_m}{2} \cdot (e^{j\alpha} \cdot e^{j\omega t} + e^{-j\alpha} \cdot e^{-j\omega t}) = \\ &= V \cdot e^{j\omega t} + V^* \cdot e^{-j\omega t} \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\text{con: } V = \frac{V_m \cdot e^{j\alpha}}{2}; \quad V^* = \frac{V_m \cdot e^{-j\alpha}}{2}.$$

Este tipo de notación introduce el concepto de “fasor”, el cual nos permite trabajar con funciones senoidales y a la par facilita los procesos de diferenciación e

integración.

El fasor es una cantidad compleja constante, que se emplea para representar funciones temporales del tipo senoidal en el plano complejo. Posee:

1. Módulo: amplitud de la función temporal que representa.
2. Fase: fase inicial de la función temporal.

El fasor se relaciona con las funciones temporales mediante la siguiente expresión:

$$f(t) = F \cos(\omega t + \theta) = \text{Re}\{F e^{j\omega t}\} \quad (2.4)$$

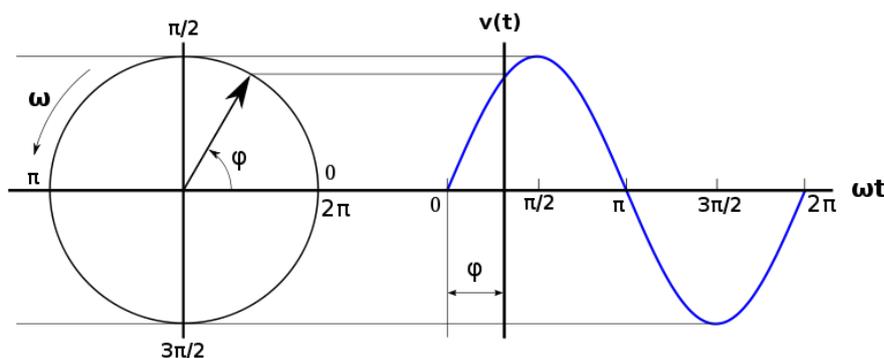


Figura 2.1: Representación gráfica de una onda senoidal y su fasor correspondiente. **Fuente:**[12]

La representación gráfica del fasor es como se puede visualizar en la Figura 2.1, donde la norma del vector representa la magnitud del fasor que gira con una velocidad angular ω .

Al integrar el álgebra de fasores en el tratamiento de ecuaciones integro-diferenciales, estos se relacionan mediante las siguientes expresiones:

Diferenciación:

$$\begin{aligned} f(t) &\rightarrow F \\ f'(t) &\rightarrow j\omega F \\ f''(t) &\rightarrow (j\omega)^2 F \end{aligned} \quad (2.5)$$

Integración:

$$\begin{aligned} f(t) &\rightarrow F \\ \int f(t)dt &\rightarrow \frac{F}{j\omega} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Por lo tanto, al integrar estas relaciones a las ecuaciones integro-diferenciales, las integraciones se convierten en divisiones y las diferenciaciones en multiplicaciones, llevando al sistema a convertirse a un sistema de ecuaciones algebraicas.

2.2. Método de Galerkin

La ferresonancia es un sistema dinámico del tipo no lineal determinístico donde su estudio al igual que otros tipos de fenómenos presentes en la naturaleza se ha acrecentado gracias al incremento del poderío computacional necesario para su análisis.

La mayor parte de estos fenómenos no poseen solución analítica, es por ello que se recurren a soluciones particulares y aproximadas a fin de poder recabar información lo más generalizada posible.

A partir de las ecuaciones diferenciales del sistema dinámico, la idea es hallar soluciones u órbitas periódicas que permitan realizar un análisis cuantitativo del mismo. Es ahí donde se encaran estos esquemas mediante métodos numéricos aproximados y donde la potencia del método además del poderío computacional permite que los tiempos de convergencia y los errores en la precisión de sus resultados se reduzcan a medida que avanza la tecnología.

De las observaciones hechas en [19] y simulaciones temporales hechas en [52], el flujo magnético presente en el inductor del transformador posee un comportamiento senoidal en estado estacionario. En este presente trabajo se han empleado métodos que nos permitirán alcanzar las soluciones periódicas de régimen estacionario sin el cálculo previo del transitorio.

El método de Galerkin es un método aproximado que usualmente es utilizado para resolver ecuaciones diferenciales e integrales numéricamente. La idea básica consiste en buscar una solución a estas ecuaciones en términos de una serie de funciones características que satisfagan las condiciones impuestas al problema [22].

Antes de profundizar con más detalle, es necesario realizar una retroalimentación de algunos conceptos que nos servirán de base para empezar a definir al método de Galerkin.

2.2.1. Producto interno

Definición 2.1. *Producto interno*

Consideremos un espacio vectorial de funciones cuyo dominio es el intervalo cerrado $[a, b]$. Definimos el producto interno de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ como sigue:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \quad (2.7)$$

Es importante resaltar que el producto interno análogo al producto punto del álgebra lineal con la diferencia que es un producto continuo de dimensión infinita. Si el producto interno de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ es cero se dice que estas dos funciones son ortogonales entre sí sobre $[a, b]$. En este trabajaremos con funciones cuadráticas integrables i.e. $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx < \infty$

Lema 1. Si $\langle f, w \rangle = \int_a^b f(x) \cdot w(x) dx = 0$ para cualquier función $w(x)$, entonces $f(x) = 0$.

2.2.2. Bases de un Espacio vectorial de funciones

Una base completa de un espacio vectorial V de funciones es un conjunto de funciones $S = \{\phi_i\}_1^\infty$ linealmente independiente con la propiedad de que cualquier función $f(x) \in V$ puede ser escrito únicamente como una combinación lineal de sus funciones bases.

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \cdot \phi_j(x) \quad (2.8)$$

Se mencionan estos conceptos cuya prueba queda al margen de los objetivos de la tesis. Para las pruebas y más detalles pueden referirse a [21].

2.2.3. Método de los residuos ponderados

El método de los residuos ponderados es una técnica numérica utilizada para aproximar por medio de un número finito de funciones $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ una expansión infinita, como ejemplo, la solución de una ecuación diferencial que como aproximación propiamente dicha no es posible satisfacer la solución en todo el dominio del sistema, sino que solamente será posible satisfacerla en un número finito de condiciones.

La solución de dicha ecuación diferencial es aproximada. Consideremos la ecuación 2.9, donde $D[y(x)]$ es denominado un operador diferencial de $y(x)$.

$$D[y(x)] + f(x) = 0 \quad \text{sobre el intervalo } a \leq x \leq b; \quad (2.9)$$

Multiplicando 2.9 por cualquier función arbitraria $w(x)$ e integrando sobre el intervalo $[a, b]$, se obtiene:

$$\int_a^b w(x) \cdot [D[y(x)] + f(x)] \cdot dx = 0 \quad \text{para cualquier función arbitraria } w(x) \quad (2.10)$$

Las expresiones (2.9) y (2.10) son equivalentes debido a la arbitrariedad de la función $w(x)$.

Sea:

$$u(x) = \phi_0 + \sum_{j=1}^n C_j \cdot \phi_j(x) \quad (2.11)$$

una solución de prueba de (2.9) y reemplazamos $y(x)$ por $u(x)$ en (2.9), obtendremos la siguiente expresión:

$$D[u(x)] + f(x) = r(x) \quad (2.12)$$

donde $r(x)$ es la función residual de aproximar una solución finita. Entonces el objetivo es aproximar $u(x)$ de manera a que la integral del residual sea cero para algunas funciones pesos ponderados, i.e. $u(x)$ parcialmente satisface 2.10 en el sentido de:

$$\int_a^b w(x) \cdot [D[u(x)] + f(x)] \cdot dx = 0 \quad \text{para alguna elección de } w(x) \quad (2.13)$$

2.2.4. Método de Galerkin

Uno de los métodos de residuos ponderados más utilizados es el método de Galerkin, el cual selecciona las funciones peso de manera específica, tal que sean seleccionadas de las funciones bases, i.e. $w(x) = \{\phi_i\}_{i=1}^n$. Entonces se restringe a que las n-ecuaciones sostengan la afirmación de:

$$\int_a^b \phi_i(x) \cdot [D[u(x)] + f(x)] \cdot dx = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.14)$$

2.3. Método de Newton-Rapshon

2.3.1. Conceptos previos

El proceso de modelar el sistema a través de fasores y aplicar a continuación el método de Galerkin al sistema generado, tenemos como resultado un sistema del tipo $F(x) = 0$ consistente en un sistema de ecuaciones algebraicas del tipo no lineal con los coeficientes de la serie como incógnitas del sistema.

El proceso de resolver un sistema no lineal de ecuaciones es más complejo que en los casos lineales, existen distintos tipos de métodos que aplicados a un sistema particular puede que no funcione para otro. Por lo tanto es necesario predefinir un método de resolución y evaluar la evolución de la convergencia de lo que se ha escogido.

Al hablar del método de Galerkin se expuso que es un método de aproximación, por lo tanto inherentemente existen errores los cuales no es prudente ignorarlos. Considerar un algoritmo que sea estable y ver en que condiciones se quiebra dicha estabilidad, es un factor vital a la hora de escoger qué algoritmo utilizar y qué condiciones se debería evitar a fin de que el proceso produzca resultados de manera rápida y precisa.

Hasta ahora la palabra **convergencia** y **estabilidad** no fueron bien definidos, es bastante simple, **convergencia** es básicamente la garantía de que dadas una cantidad finita de iteraciones al realizar un determinado algoritmo matemático, los resultados obtenidos se aproximen al resultado real del sistema y **estabilidad** es que dado un pequeño error de entrada a dicho algoritmo el error producido se encuentre acotado por un determinado valor, es decir, que no se produzcan divergencias en los errores a medida que se va iterando.

Cada algoritmo de resolución tiene asociado características como **rapidez de convergencia** y **orden de convergencia**. Hablar de rapidez de convergencia uno puede intuir la definición fácilmente al solo hecho de escuchar la palabra rapidez. Un algoritmo que con menos cantidad de iteraciones produce un resultado preciso y favorable posee mayor **rapidez de convergencia** que otro. Pero la definición de orden de convergencia es un poco más complicado de definir y para ello es preciso hablar de límites de aproximación entre otros.

Ya que estamos hablando de un proceso iterativo de resolución, el cual mediante una serie de aproximaciones se intenta obtener el resultado deseado del sistema, los resultados de dicho proceso pueden verse como una sucesión cuyo límite de convergencia es el resultado deseado.

Sea $\{x_k\}$ una sucesión cuyo límite de convergencia es x^* , decimos que la sucesión convergen con orden q cuando

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^q} = \epsilon \quad \text{con } \epsilon > 0$$

donde q es denominado **orden de convergencia**.

El Método de Newton-Raphson, al ser un algoritmo eficiente en la búsqueda de ceros de una función, también ofrece una convergencia cuadrática cuando la aproximación inicial se encuentra cerca del punto de búsqueda. Es un algoritmo robusto, rápido y bastante estable.

Aunque posee ciertas condiciones en las cuales la convergencia no está garantizada, es uno de los más simples de aplicar y su performance es bastante buena.

El Método de Newton-Raphson al ser un método de aproximaciones sucesivas, parte de una aproximación inicial y mediante la aplicación de una ecuación de recurrencia de tal manera que la siguiente aproximación se localiza entre la intersección de la recta tangente y el eje de abscisas.

El método linealiza la búsqueda mediante la recta tangente, y la rapidez de convergencia depende bastante de la naturaleza del sistema o función con la cual se está tratando. Si la recta tangente es bastante pronunciada o si se está en presencia de puntos de inflexión en la cercanía de la solución es muy probable que el método diverja.

Consideremos la siguiente ecuación $f(x) = 0$ la cual es una función de clase C^2 en cierto intervalo $[a, b]$. Supongamos que la ecuación admite solución (x^*) dentro de ese intervalo. Sea un valor $x_0 \in [a, b]$ tal que $x^* = x_0 + h$. Si desarrollamos la serie de Taylor de $f(x^*) = 0$ con respecto a x^* tendremos lo siguiente:

$$0 = f(x^*) = f(x_0 + h) \approx f(x_0) + h \cdot f'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0 + \theta h) \quad \theta \in [0, 1] \quad (2.15)$$

Si la aproximación inicial se toma bastante próximo a una raíz del sistema, entonces h será suficientemente pequeño y el término h^2 será más pequeño aún por lo que podría despreciarse, quedando la ecuación 2.15 como sigue:

$$f(x_0) + h f'(x_0) = 0 \quad \text{con } h = x^* - x_0 \quad (2.16)$$

de la que se obtiene la siguiente expresión:

$$x^* = x_0 - [f'(x_0)]^{-1} \cdot f(x_0) \quad (2.17)$$

Intuitivamente podemos definir la ecuación de iteración a partir de las expresión de arriba partiendo de la lógica que el resultado de iterar una vez producirá un valor x_1 que podría no ser igual a x^* pero sería un valor más próximo. Entonces bajo esa base lógica

podemos definir la ecuación de iteración del método de Newton-Raphson como sigue:

$$x_{k+1} = x_k - [f'(x_k)]^{-1} \cdot f(x_k) \quad \text{tal que } f'(x_k) \neq 0 \quad (2.18)$$

donde a partir del punto x_k produciremos un valor x_{k+1} más próximo a x^* donde la parada de las sucesivas iteraciones depende de un parámetro tal que distancia entre los puntos próximos sea lo suficientemente cerca, i.e.

$$h = \epsilon = \|x_{k+1} - x_k\| > 0$$

A dicho valor ϵ denominamos **Tolerancia de parada**.

Controlando el valor de ϵ y a medida que la aproximación inicial x_0 se encuentra dentro de una vecindad apropiada, i.e. cerca de x^* , es posible mejorar la rapidez de convergencia del método.

Al hablar de un sistema de ecuaciones $F(x) = 0$ donde $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, la filosofía del método no cambia, realizando pequeñas sustituciones como ser que x^* ahora se trata de un vector de dimensión n , i.e. $x \in \mathbb{R}^n$ y ahora $f'(x) = J(x)$ representa el Jacobiano del sistema. La ecuación de iteración queda como sigue:

$$[x_{k+1}] = [x_k] - [J(x_k)]^{-1} \cdot [F(x_k)] \quad \text{para } J(x_k) \neq 0 \quad (2.19)$$

y la tolerancia $\epsilon = \|x_{k+1} - x_k\| > 0$ será la norma del vector diferencia.

Resumiendo, tanto la función de una variable $f(x)$ como el sistema de ecuaciones $F(x)$ deben de ser al menos de la clase C^1 , y para asegurar la convergencia del método uno debe escoger aproximaciones iniciales tal que la tolerancia ϵ presente una reducción en su valor a medida que se realizan las iteraciones.

Existen restricciones que es necesario evitar como ser puntos de inflexión y puntos extremos donde la derivada o el jacobiano se anulan, haciendo que el método no con-

verja.

Para un tratamiento más riguroso del método, uno puede consultar [47] y [37], libros especializados en métodos numéricos y de los cuales se tomaron en cuenta para redactar este apartado.

CAPÍTULO 3

MÉTODOS DE CONTINUACIÓN

3.1. Introducción

Una gran variedad de problemas físicos y de ingeniería pueden ser modelados como un sistema de ecuaciones paramétricas no lineales de la forma:

$$\begin{aligned} F(u, \lambda) = 0 & \quad \text{donde} \quad F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \\ u \in \mathbb{R}^n; \quad \lambda \in \mathbb{R}; \quad d = m - n > 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde u representa la *solución* (i.e, campo de flujos, desplazamientos, etc) y λ es el *parámetro físico real* (i.e., número de Reynold's, carga, etc). Usualmente se halla un conjunto solución a dicho problema, es decir, un conjunto de $[u(\lambda), \lambda]$ para un intervalo de λ [29] [48].

Los métodos de continuación son técnicas numéricas que nos permiten llegar a soluciones del sistema (3.1), donde la idea detrás es bastante sencilla, se basan en calcular una nueva solución del sistema en la vecindad de una solución conocida y así ir progresivamente calculando nuevas soluciones a partir de las ya calculadas previamente [34].

Básicamente son 3 tópicos que cuidar:

1. El cómo calcular un nuevo punto solución u_{i+1} del sistema (3.1) , a partir de un una solución conocida u_i .
2. Como seleccionar ese nuevo punto.
3. Como evitar recalcular un punto ya previamente obtenido.

Para obtener una nueva solución u_{i+1} , primero hay que realizar un **paso de predicción**, consistente en un proceso simple de integración numérica para problemas de valor inicial, como un predictor Euler, donde la dependencia del tamaño de paso puede llevarnos a un punto en la cercanía de una nueva solución u_{i+1} .

Seguidamente se realiza un **paso de corrección**, donde a partir del resultado del paso de predicción, va buscándose la solución real al sistema. Procesos como el método de Newton son utilizados en este paso, donde la rapidez de convergencia depende de la cercanía del punto inicial al punto solución.

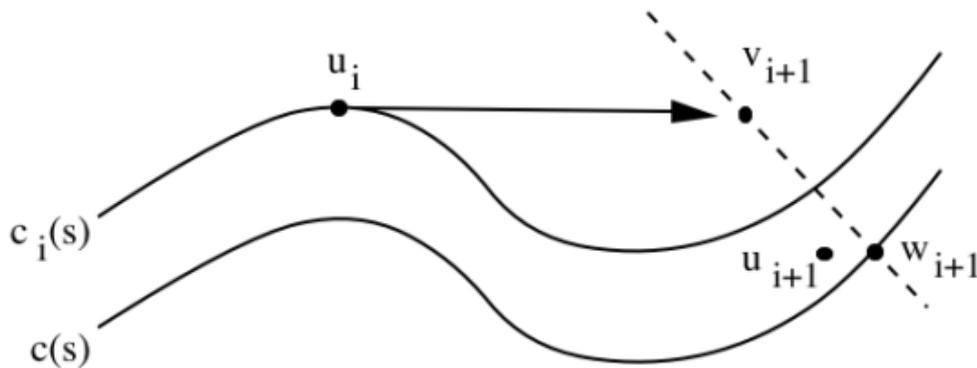


Figura 3.1: Esquema Predictor-Corrector. **Fuente:** [34]

Considerando la Figura 3.1, partiendo del punto u_i se calcula por medio del proceso predictor un nuevo punto v_{i+1} , que luego con el proceso corrector se buscará la convergencia al punto u_{i+1} , que dependiendo de las tolerancias de parada y la cercanía de v_{i+1} estará más cerca del punto w_{i+1} que es punto solución del sistema.

Durante el desarrollo de este capítulo consideraremos a λ como un escalar y denotaremos a $\frac{\partial F}{\partial \lambda}$ como F_λ . El jacobiano de la matriz F con respecto a u denotaremos como F_u .

3.2. Método de Newton y técnicas de Continuación

Cuando el objetivo es resolver un sistema de ecuaciones no lineales dependientes de un parámetro, el método de Newton es una de las técnicas numéricas más indicadas para ello.

Resolviendo el sistema dentro de un intervalo dado del parámetro " λ ", el resultado es una curva $u(\lambda)$ formada por puntos que son solución del sistema para cada valor del parámetro.

3.2.1. Método de Newton

Dado un valor inicial del parámetro λ^0 y una posible solución inicial u^0 para la solución de $u(\lambda)$, resolvemos el sistema por el algoritmo de Newton e iteramos repetidamente entre los siguientes pasos hasta satisfacer una condición de parada, i.e. $\|\delta u^i\| < \epsilon$

El ϵ viene asociado como un error de tolerancia o error de truncamiento ¹ para el cual el sistema iterativo, teniendo en cuenta ese valor, toma un valor umbral de parada.

$$F_u^i \delta u^i = -F(u^i, \lambda) \quad (3.2)$$

$$u^{i+1} = u^i + \delta u^i \quad (3.3)$$

Al tratarse del algoritmo de Newton la solución converge cuadráticamente salvo ocasiones en que la suposición inicial u^0 no se encuentre cerca de la solución real.

Definición 3.1. Una solución u_0 de un sistema $F(u) = 0$ es **regular** si la matriz $F_u^0 \equiv F_u(u_0)$ (con n filas y $n + 1$ columnas), posee rango maximal, i.e., si:

$$Rango(F_u^0) = n$$

En la formulación paramétrica $F(u, \lambda) = 0$, tenemos que:

$$Rango(F) = Rango(F_u^0 | F_\lambda^0) \iff \begin{cases} 1- F_u^0 \text{ es no singular} \\ 0 \\ 2- \dim \mathcal{N}(F_u^0) = 1 \quad \& \quad F_\lambda^0 \notin \mathcal{R}(F_u^0) \end{cases}$$

donde $\mathcal{N}(F_u^0)$ es el núcleo de F_u^0 y $\mathcal{R}(F_u^0)$ es el rango de F_u^0 , i.e., el espacio lineal abarcado por la n columnas de F_u^0 [30].

¹Error de truncamiento son aquellos que resultan al usar una aproximación en lugar de usar un procedimiento matemático exacto [37]

3.2.2. Continuación Natural

Una de las maneras de trazar una curva solución del sistema dentro de un intervalo paramétrico dado es comenzar con un valor inicial del parámetro λ_0 y una solución inicial conocida u_0 para utilizarlos como condiciones iniciales para el método de Newton. Es una técnica de aproximación simple, bastante buena y fiable, denominado *path following method* o método de seguimiento de trayectoria, que permite sobreponer las posibles fallas de convergencia y a la par determina la dependencia de u con respecto a λ . Iterando el método de Newton es posible encontrar otra solución del sistema y así trazar una curva solución que será el lugar geométrico de los puntos que son solución del sistema en cuestión. Este procedimiento es llamado **Continuación Natural** [48], debido a que parametrizamos con respecto a λ . La idea es a partir de soluciones conocidas (u_0, λ_0) , incrementamos el valor de λ en un valor pequeño $d\lambda$ e iteramos para hallar una nueva solución u [29].

$$(u_0, \lambda_0) \rightarrow (u_1, \lambda_1) \quad (3.4)$$

$$F(u_1, \lambda_1) = F(u_1, \lambda_0 + \Delta\lambda) = 0 \quad (3.5)$$

3.2.3. Algoritmo de Euler-Newton

Dado una solución conocida (u_0, λ_0) , calculamos las soluciones para valores cercanos de λ como sigue:

1. Calculamos la derivada de u_λ en (u_0, λ_0) de:

$$F_u u_\lambda = -F_\lambda \quad (3.6)$$

2. Realizamos un paso de predicción bajo el algoritmo de Euler

$$u^0 = u_0 + u_\lambda(\lambda - \lambda_0) \quad (3.7)$$

3. Usamos u^0 como tanteo inicial dentro del método de Newton, hasta la convergen-

cia.

$$F_u^i(u^{i+1} - u^i) = -F(u^i, \lambda) \quad (3.8)$$

4. Usamos $(u(\lambda), \lambda)$ como nuevo tanteo inicial (u_0, λ_0) y volvemos al paso 1.

Utilizando un esquema corrector-predictor como este nos permitirá usualmente realizar un tamaño de paso mayor, en referencia a λ , y así reducir los sobre-costos computacionales en determinar la dependencia de u con respecto a λ . Para mayores detalles ver [48]

Es necesario realizar modificaciones a este método cuando estamos en presencia de puntos singulares, debido a que viola la ley de unicidad de soluciones. En estos puntos el Jacobiano F_u del sistema es singular. En la Figura 3.2 pueden verse ejemplos de puntos de bifurcación. Puntos como “A” son llamados **puntos límites o Turning points**² y los del tipo “B” son llamados **puntos de bifurcación**. Estos puntos singulares son caracterizados por condiciones tales como $F_\lambda \notin \text{Rango}(F_u)$ cuando nos referimos a puntos límites y en caso de puntos de bifurcación la condición es $F_\lambda \in \text{Rango}(F_u)$.

Puntos singulares son un problema para el método de continuación natural, como primer inconveniente el Jacobiano F_u en dicho punto es singular y en las cercanías del punto singular el método de Newton o no es capaz de proveer solución debido a la singularidad del Jacobiano o no es capaz de proveer una solución debido a problemas de convergencia, por ende es necesario un mecanismo adicional para sobrellevar este problema.

3.3. Teorema de la Función Implícita

Al tratar inicialmente los métodos de continuación aplicados a $F(u, \lambda)$, aplicar los métodos de Newton y las demás técnicas asumimos que la solución existe, que el jacobiano F_u es una función Lipschitz continua³, que F_u es no singular.

²Debido a que aún es poco estudiado, podemos encontrar referencias de este punto particular con distintos nombres, además de lo mencionado arriba también son llamados Bifurcación tipo Fold, o bifurcación tipo saddle-node, entre otras.[24]

³Toda función con primera derivada acotada es denominada Función Lipschitz continua [11]

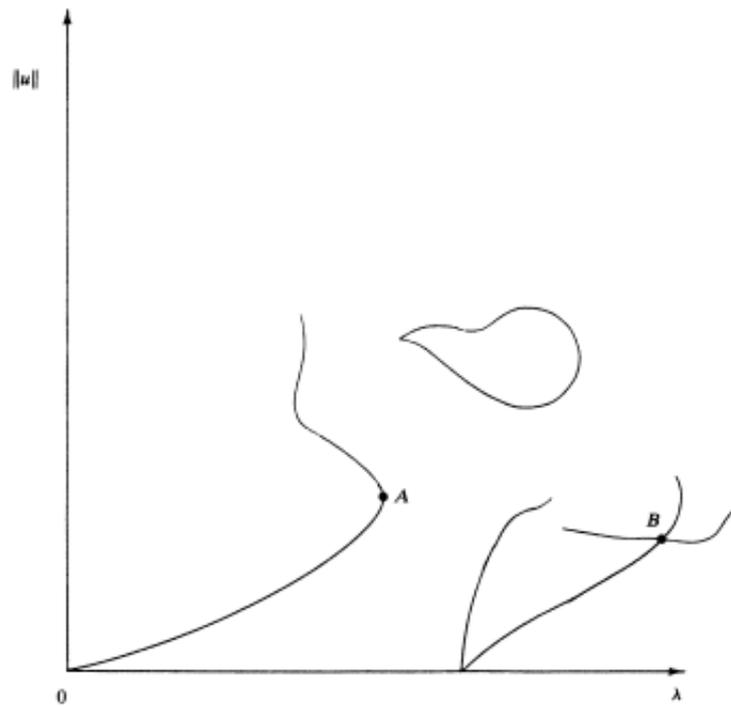


Figura 3.2: Ejemplos de Bifurcación. **Fuente:** [48]

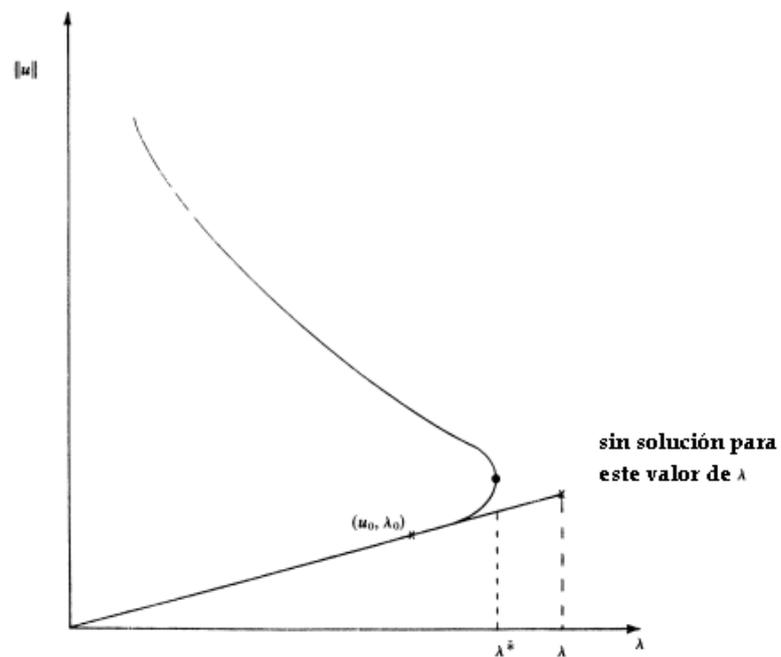


Figura 3.3: Problemas con los puntos singulares. **Fuente:** [48]

El teorema de la función implícita establece que la existencia de la solución en el punto λ_0 , junto con la diferenciabilidad de F y la no singularidad de F_u , implicará que la solución (u, λ) existirá para un valor λ cercano a λ_0 a lo que también implica que la función será una función suave con respecto a λ [29].

Teorema 3.1 (Teorema de la función implícita). *Sea Ω un sub-conjunto abierto de \mathbb{R}^{N+1} y sea $F \in \mathbb{C}^k(\Omega)$ para un entero $k > 0$. Se asume que F_u y F_λ son Lipschitz continuos en $\bar{\Omega}$, conjunto cerrado de Ω . Entonces sí:*

- $(u_0, \lambda_0) \in \Omega$
- $F(u_0, \lambda_0) = 0$
- $F_u(u_0, \lambda_0)$ es no singular

entonces existe un ρ y un ϵ tal que existe una única solución

$$u(\lambda) \in B_p(u_0) = \{u \mid \|u - u_0\| < \rho\}$$

de

$$F(u, \lambda) = 0$$

para todo $\lambda \in (\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)$. Más aún $u \in \mathbb{C}^k(\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)$.

Las pruebas de este teorema quedan fuera del alcance del trabajo, para mayores detalles es recomendable remitirse a [29] y a [48].

3.4. Continuación por pseudo-longitud de arco

En la aproximación por el método de continuación de *pseudo-arclength* o pseudo-longitud de arco, las dificultades antes mencionadas son superadas con éxito al no parametrizar la solución u con respecto a λ , sino, parametrizamos la solución a través un nuevo parámetro de longitud de arco “ s ” y especificamos cuán lejos queremos avanzar [48].

Denotamos a “ s ” como el nuevo parámetro pseudo-arco, y re-parametrizamos a $u(s)$ y a $\lambda(s)$ como funciones de s . Entonces ahora el sistema pasa a ser un sistema dependiente de s .

Definición 3.2. *Un punto $(\lambda_0, u_0) = (\lambda(s_0), u(s_0))$ dentro de la trayectoria de puntos regulares es llamado **Punto límite simple** o **Pliegue simple** si las condiciones del punto 2 de la definición 3,1 se cumplen.*

Considerando el parámetro “ s ” la ecuación (3.1) pasa a ser:

$$F[u(s), \lambda(s)] = 0 \quad (3.9)$$

Diferenciando la ecuación (3.9) con respecto a s obtenemos lo siguiente:

$$F_u \dot{u}(s_0) + F_\lambda \dot{\lambda}(s_0) = 0 \quad (3.10)$$

Calculamos la tangente $T = [\dot{u}(s_0), \dot{\lambda}(s_0)]$. Imponiendo la condición de pseudo-longitud de arco de la siguiente manera:

$$\|T\| = \|\dot{u}\|^2 + \|\dot{\lambda}\|^2 = 1 \quad (3.11)$$

Teóricamente es posible obtener la curva solución integrando el problema de valor inicial resolviendo las ecuaciones (3.10) y (3.11) para $\dot{u}(s)$ y $\dot{\lambda}(s)$. Sin embargo, está sujeto a inestabilidades usuales inherentes a la resolución de este tipo de problemas de valor inicial por aproximación. De hecho, la añadidura del método de pseudo-longitud de arco puede ser visto como un método para la estabilización de la integración de Euler de las ecuaciones (3.10) y (3.11), para detalles consultar [48].

En el método de Continuación por pseudo-longitud de arco, avanzamos de s_0 hasta s a través de la tangente a la curva solución en el punto (u_0, λ_0) y requiere que la nueva solución pueda satisfacer la condición:

$$N[u(s), \lambda(s)] \equiv \dot{u}_0^T [u(s) - u(s_0)] + \dot{\lambda}_0^T [\lambda(s) - \lambda(s_0)] - (s - s_0) = 0 \quad (3.12)$$

También necesitamos que se cumpla la ecuación (3.9). La ecuación (3.12) es una

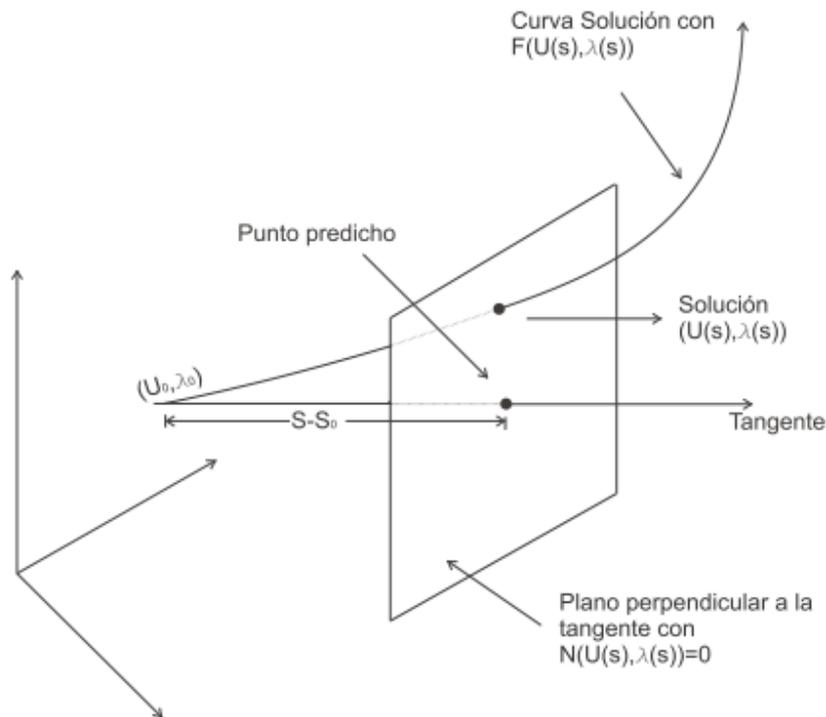


Figura 3.4: Método de Continuación por pseudo-longitud de arco (*Pseudo arclength*). **Fuente:** Elaboración Propia.

linearización de (3.11) y como es indicado, fuerza a la nueva solución a que se encuentre en un hiperplano perpendicular al vector tangente a la curva solución en s_0 y que permanezca a una distancia $s - s_0$ de ella.

Resolviendo el sistema en conjunto (ecuaciones (3.9) y (3.12)) para $u(s)$ y $\lambda(s)$ y un valor dado de tamaño de paso ($s - s_0$), utilizando el método de Newton y un método añadido de elección del tamaño de paso es posible hallar la curva solución del sistema ampliado.

$$A \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_u & F_\lambda \\ N_u^T & N_\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta \lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} F \\ N \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

En una linearización del método de Newton como es ilustrado por la ecuación (3.13) puede notarse que cuando se trata de puntos límites, donde F_u es singular y $F_\lambda \notin \text{Rango}(F_u)$ el sistema es no singular, para mayor detalle consulte el apéndice A. Así el método de Newton es bien definido y los puntos límites no representan problemas e incluso se puede observar una convergencia cuadrática del algoritmo [48].

3.5. Bifurcación - Diagramas y puntos de bifurcación

Un sistema dinámico del tipo $\dot{x} = f(x, \alpha)$ continuo en el tiempo, con un vector de estados $x \in \mathbb{R}^n$ y un parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$ puede tener asociado un cierto comportamiento en estado estacionario. Típicamente, a pequeños cambios de α , produce pequeños cambios en sus conjuntos límites incluso pudiendo llegar a cambiar la forma o el tamaño del mismo. Pueden darse casos en que estas perturbaciones del parámetro pueden llevar al sistema a tener un cambio cualitativo de su conjunto límite. A estos cambios cualitativos se los denomina **Bifurcación** y al valor del parámetro en donde ocurre se lo denomina **valor de bifurcación** [25].

Ejemplos de bifurcación son la aparición o desaparición de conjuntos límites y el cambio de estabilidad de los mismos. Los diagramas de bifurcación son gráficas donde están ploteadas las posiciones de los puntos de equilibrio versus los valores del parámetro de bifurcación α [25].

Para el cálculo de los diagramas de bifurcación es necesario calcular el estado estacionario para un determinado parámetro. Existen dos tipos de algoritmos, el método de fuerza bruta ⁴ y el método de continuación.

El método de fuerza bruta encara el problema de forma directa, simula el sistema de manera dinámica, y lo hace en forma ineficiente. El método de continuación lo hace de manera más elegante, más eficiente, pero no es posible cuando el caos está presente [25].

El diagrama de bifurcación estaría compuesto por ramificaciones, las cuales son curvas simples dentro del diagrama con:

1. no se intersecta con otra curva
2. no puede extenderse en otra dirección sin violar el punto anterior.

⁴Realizado en [4]

3.6. Puntos límites (Turning Points)

Los puntos límites son puntos de bifurcación del sistema, son puntos de ramificación donde la dirección de la misma cambia respecto a la variación del parámetro.

En un punto límite el Jacobiano del sistema $F_u(x, \alpha)$ es necesariamente singular con un rango menor al maximal. El determinante de esta matriz es 0 y dado que el determinante de la matriz es el producto de los autovalores de la misma, entonces uno de los autovalores del Jacobiano es 0.

Entonces, en un caso genérico, indica que en la vecindad de un punto límite un autovalor pasa, a través del origen, tanto para un lado como para el otro dentro del plano complejo. Y esta migración dentro del plano complejo, implica que se trata de un punto de bifurcación y que siempre trae asociado un cambio de estabilidad del sistema consigo [25].

CAPÍTULO 4

APLICACIÓN A LA FERRORESONANCIA

4.1. Introducción

Como habíamos enunciado anteriormente, la Ferroresonancia es un fenómeno eléctrico del tipo oscilatorio, manifestándose en un circuito con al menos un elemento con características no lineales (la inductancia no lineal de un transformador ferromagnético saturable), una parte lineal compuesta por componentes capacitivos y resistivos, una fuente de poder con una o más fuentes de tensiones sinusoidales. La característica principal que se puede ver en el fenómeno es la aparición de al menos dos tipos de comportamientos para una misma excitación, dependiendo de las condiciones iniciales o condiciones transitorias [13].

Al ser un fenómeno no lineal una de sus principales características es que es difícilmente predecible, a la par es bastante sensible a las condiciones iniciales y capaz de presentar comportamientos caóticos, por lo que es altamente peligroso para el sistema eléctrico de potencia afectando principalmente a las redes de transmisión y distribución [14].

El problema principal es la generación de una alta tasa de sobretensión (como ferroresonancia fundamental) o sobrecorriente (como ferroresonancia sub-armónica) [9], representa una alarmante fuente de riesgo no solo para el personal operativo sino para el sistema eléctrico en sí, ya que el fenómeno a pesar de manifestar un transitorio sostenido, es en régimen permanente donde mayoritariamente se sienten sus efectos.

A modo de ejemplo, si des-energizamos un transformador de tensión conectado a barras de conducción a través de disyuntores e interruptores, la tensión en el transformador puede caer a valores cercanos a cero, o puede observarse una oscilación de amplitud muy elevada, que puede ser mantenida en el tiempo, dependiendo de las condiciones en el momento de intercambio. El transformador continúa energizado debido a la capacitancia formada por el disyuntor [13]. Este es sólo uno de los escenarios en los

que puede ocurrir la ferrosresonancia [4].

El modelamiento de este problema, resulta en un sistema de ecuaciones diferenciales en el tiempo (dentro del ámbito de los sistemas dinámicos), no lineales, dependiendo de varios parámetros.

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t, \lambda), \quad (4.1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^m$ es el vector de variables de estado (flujo, corriente y tensión) dentro de la red del sistema, $\lambda \in \mathbb{R}^p$ es el vector de variables paramétricas físicas del sistema (capacitancias, resistencias, inductancias, etc).

La simulación temporal es usualmente usada para estudiar este fenómeno, sin embargo los resultados solo pueden ser establecidos para casos particulares y no pueden ser generalizados para aplicaciones con otros tipos de parámetros o diferentes condiciones iniciales. De hecho, los parámetros son vagamente conocidos, en vista a la infinidad de variables a considerar, lo cual complica aún más el modelado del sistema.

La teoría de bifurcación es el marco adecuado para el estudio de estos fenómenos complejos y cuyas características dependen de la particularidad del sistema en el cual se presentan [9]. Dentro de ese marco de estudio, ciertos métodos de cálculo como los métodos de Galerkin y la utilización de Fasores para el modelado de sistemas demostraron buena precisión e idoneidad para casos en los que el sistema es modelado por medio de ecuaciones diferenciales cuyas soluciones analíticas no han podido determinarse.

Una de las mayores ventajas del método de Galerkin es que provee las soluciones de estado estacionario directamente evitando así el largo transitorio que presenta la ferrosresonancia. De esta manera se agilizan los tiempos de cómputos en el trazado de los distintos diagramas de bifurcación para los distintos parámetros.

El método de continuación “pseudo-longitud de arco” junto con el método de Galerkin

nos permiten calcular los distintos puntos de bifurcación del sistema, validados con el algoritmo de borde apéndice A, así, donde la continuación natural y el método de Galerkin presentaba problemas ahora es posible tener una visión global del comportamiento del sistema, predecir comportamientos y límites de estabilidad del sistema [2].

4.2. El método de Galerkin y su aplicación al estudio de la ferroresonancia

4.2.1. Principio

El método de Galerkin es un método analítico consistente en hallar la solución aproximada a una ecuación por medio de la descomposición de las incógnitas en bases idénticas. A menudo es aplicado para resolver ecuaciones diferenciales e integrales numéricamente. Básicamente consiste en buscar una solución a estas ecuaciones en términos de una serie de funciones características que satisfagan las condiciones de contorno impuestas, lo que da lugar a un sistema de ecuaciones algebraicas a fin de satisfacer los coeficientes de la serie [22].

Como estamos interesados en soluciones periódicas, es conveniente aproximar la solución de la ecuación diferencial que modela el sistema por medio de series de Fourier. Introduciendo esta aproximación, nos lleva a un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales donde las incógnitas del sistema son los coeficientes de Fourier [13].

La aproximación buscada será más precisa si el error asociado es mínimo, lo cual se lleva a cabo aplicando el algoritmo de los mínimos cuadrados.

Para resolver la ecuación (4.1), elegimos como funciones características:

$$\left\{ 1, \operatorname{sen} \left(\frac{n\omega t}{p} \right), \operatorname{cos} \left(\frac{n\omega t}{p} \right) \right\}, \quad p \geq 1, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.2)$$

donde ω es la frecuencia asociada a la fuente de periodo T . De esta manera elegimos a una solución aproximada de orden m , para una solución periódica de dicha ecuación, la

siguiente expresión:

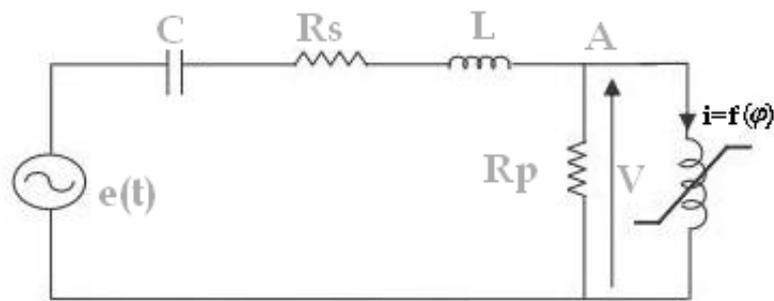
$$X_m(t) = a_0 + \sum_{n=1}^m \left[a_n \cos\left(\frac{nwt}{p}\right) + b_n \sin\left(\frac{nwt}{p}\right) \right] \quad (4.3)$$

donde p indica el orden de sub-armónico por el que se comienza la aproximación y el vector $\vec{X} = (a_0, a_n, b_n)$ representa el conjunto de coeficientes a determinar [22].

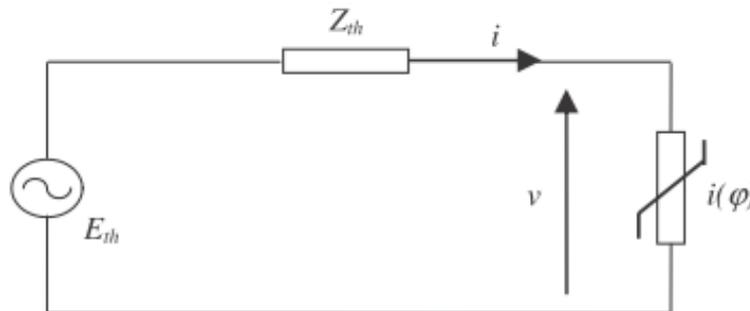
4.2.2. Aplicación del método de Galerkin al estudio de la ferresonancia

El circuito ferresonante se compone básicamente de dos sistemas, uno lineal y otro no lineal, interconectados entre sí. Cuando un solo elemento no lineal es preponderante en el sistema en estudio, o bien todos los elementos no lineales pueden ser reemplazados por uno equivalente, entonces es posible reducir el circuito ferresonante por su equivalente Thevenin, lo cual se ilustra en la Figura 4.1.

El sistema lineal está compuesto por pérdidas e inductancias propias del sistema de transmisión en conjunto con la fuente de tensión, las pérdidas de la línea están modeladas como una resistencia en serie R_s , y la inductancia de la línea como un inductor L . Esta parte lineal es la que es reemplazada por su equivalente Thevenin.



(a) Circuito en estudio, donde se resalta el elemento no lineal



(b) Esquema Thevenin del circuito anterior

Figura 4.1: Circuitos en estudio y su simplificación de Thevenin. **Fuente:** [2]

La parte no lineal corresponde al núcleo del transformador, formado por capas de hierro ferromagnéticos con un comportamiento de flujo (ϕ) vs Corriente (I) no lineal, ecuación (B.2), cuya explicación se debe a la saturación magnética que se evidencia a partir de un cierto umbral de corriente y flujo. La característica magnética $i(\phi)$ de una inductancia no lineal es descrita por una relación unívoca entre la corriente $i(t)$ y el flujo $\phi(t)$ [2]:

$$i(\phi) = a\phi + b\phi^{2q+1} \quad (\text{con } (a, b) \in \mathbb{R}^+ \text{ y } q \in \mathbb{N}) \quad (4.4)$$

De acuerdo a esta relación, es posible notar que la corriente posee más armónicas que el flujo, es por ello que se ha escogido al flujo como variable desconocida del problema [2].

Una de las ventajas principales del modelado del sistema a partir de la simplificación

de Thevenin es que es fácilmente adaptable para el estudio de cualquier tipo de configuración inicial de circuitos, tanto para una configuración simple como para una configuración bastante compleja con una cantidad inmensa de parámetros. Dicho de otro modo, esta simplificación nos permite estandarizar a partir de este punto todos los estudios correspondientes a hallar los puntos de bifurcación de cualquier circuito en estudio.

Como se había mencionado, estamos interesados en soluciones periódicas del sistema por ello expresamos $\phi(t)$ como una serie de Fourier en el dominio complejo. Basta con solo tomar un número limitado de armónicas (n) de modo que al sumar armónicas a la serie, la solución no muestre un cambio apreciable, tanto así que el error asociado sea considerado despreciable [2].

$$\phi(t) = \phi_0 + \sum_{k=1}^n \phi_{kc} \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^n \phi_{ks} \sin(k\omega t) \quad (4.5)$$

Como notamos, las incógnitas del sistema algebraico son ϕ_0 , ϕ_{kc} y ϕ_{ks} . Este sistema está determinado por dos ecuaciones:

- Primero, al considerar la simplificación por Thevenin a la parte lineal del circuito y aplicando la ley de mallas de Kirchoff al circuito equivalente obtenemos la siguiente ecuación:

$$E_{th}(t) = Z_{th}i(t) + V_l, \text{ donde...} \quad (4.6)$$

$V_l = \frac{d\phi}{dt}$: es la tensión que cae en la inductancia no lineal

translando al dominio de la frecuencia, para cada armónica k , se transforma en una ecuación compleja de la forma:

$$jk\omega\phi_k = E_k - Z_k \cdot I_k \quad (4.7)$$

donde ϕ_k , I_k , E_k y Z_k son componentes complejos del flujo, corriente, tensión e impedancia a la frecuencia armónica $\omega_k = k\omega$ respectivamente.

- Segundo, la relación entre la corriente $i(t)$ y el flujo $\phi(t)$ es una función no lineal,

que puede ser escrito como:

$$i(t) = f(\phi(t)) \quad (4.8)$$

Se adoptan las siguientes notaciones complejas:

$$\phi_k = \phi_{kc} - j\phi_{ks} \quad :k\text{-ésima componente compleja del flujo}$$

$$I_k = I_{kc} - jI_{ks} \quad :k\text{-ésima componente compleja de la corriente}$$

$$E_k = E_{kc} + jE_{ks} \quad :k\text{-ésima componente compleja de la fuente.}$$

$$Z_k = R_k + jX_k \quad :k\text{-ésima componente compleja de la impedancia Thevenin}$$

La ecuación (4.7) es transformada en un sistema de $2n + 1$ ecuaciones algebraicas no lineales como se muestra a continuación:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_0 I_0 = \xi_0 = 0 \\ \omega \phi_{1s} + R_1 I_{1c} + X_1 I_{1s} - E_{1c} = \xi_{1c} = 0 \\ \omega \phi_{1c} + X_1 I_{1c} - R_1 I_{1s} + E_{1s} = \xi_{1s} = 0 \\ \vdots \\ k\omega \phi_{ks} + R_k I_{kc} + X_k I_{ks} - E_{kc} = \xi_{kc} = 0 \\ k\omega \phi_{kc} + X_k I_{kc} - R_k I_{ks} + E_{ks} = \xi_{ks} = 0 \end{array} \right. \quad (4.9)$$

donde w es la frecuencia angular considerada más baja (puede ser menor que la frecuencia de la fuente) y ξ_k representa la ecuación de error debido al truncamiento introducido al limitar la serie de Fourier en n armónicos [2].

La aproximación $\phi(t)$ es cada vez más precisa a medida que los errores ξ_k son más pequeños. Para ello, para determinar los coeficientes ϕ_0 , ϕ_{kc} y ϕ_{ks} de la serie $\phi(t)$ se minimiza la suma cuadrática de errores $|\xi^2| = \sum \xi_i^2$ por medio del algoritmo de los mínimos cuadrados.

Las tensiones equivalentes E_{kc} y E_{ks} son nulos excepto para los valores de la frecuencia de excitación de la fuente. De hecho, para expresar la ecuación $i(\phi)$ en función

de las incógnitas ϕ_{kc} y ϕ_{ks} , necesitamos expresar las componentes de Fourier de las corrientes para cada armónica del flujo $\phi(t)$. Esto nos lleva a deducir las componentes de Fourier de las corrientes I_{kc} e I_{ks} usando la transformada de Fourier de $f(\phi(t))$. Por ejemplo, para hallar I_{kc} e I_{ks} se realiza:

$$I_{kc} = \frac{2}{T} \int_0^T f(\phi(t)) \cos(k\omega t) dt \quad (4.10)$$

$$I_{ks} = \frac{2}{T} \int_0^T f(\phi(t)) \sin(k\omega t) dt \quad (4.11)$$

donde las integraciones pueden ser realizadas utilizando el algoritmo de integración de Simpsons [2]. Las $N = 2n + 1$ componentes de Fourier del flujo deben satisfacer las ecuaciones algebraicas no lineales del sistema presentadas en (4.9), donde la ecuación $R_0 I_0 = 0$ representa la componente DC (I_0 es hallado igual que (4.10) pero con $k = 0$). Una forma generalizada de (4.9) puede ser formulada como sigue:

$$\xi(\Phi, P) = 0 \quad (4.12)$$

donde $\Phi = [\phi_0 \ \phi_{kc} \ \phi_{ks}]$ representa el vector incógnita formado por las componentes armónicas del flujo, y P es el vector paramétrico formado por las componentes armónicas de la impedancia Z_k y las componentes armónicas de la fuente E_k .

Para valores fijados de los parámetros, el sistema (4.9) puede ser resuelto por el método de Newton-Raphson. Esto implica el cálculo de la matriz jacobiana J , una matriz cuadrada de $2n + 1$ componentes, formulada como sigue [2]:

$$J = \left[\frac{\partial \xi}{\partial \Phi} \right] \quad (4.13)$$

donde cada elemento es expresado de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \xi(\Phi, I)}{\partial \Phi} = \frac{\partial \xi}{\partial \Phi} + \frac{\partial \xi}{\partial I} \cdot \frac{\partial I}{\partial \Phi} \quad (4.14)$$

En el capítulo anterior habíamos explicado las bondades del método de Newton y su uso en conjunto con el método de continuación, donde a la par hemos evidenciado

los posibles problemas que pueden presentarse, pero nos encontramos con un nuevo problema aun no previsto: la inicialización [9].

4.2.3. Soluciones en función a un parámetro. Métodos de continuación

Sabiendo la solución Φ_0 del sistema para un valor dado P_0 del parámetro, la solución para $P_0 + \delta P$ es obtenida de Φ_0 mediante un proceso iterativo en el cual Φ_0 es usado como tentativa inicial (continuación natural). Así, trabajando de esta manera con pequeños pasos δP , podemos ir de una solución a la siguiente, podemos construir una ramificación entera que representa una solución del sistema dentro del intervalo escogido.

Con la técnica de continuación natural y si el Jacobiano del sistema es no singular, el método de Newton-Raphson convergerá a una nueva solución.

Debido a la naturaleza del sistema, existen casos en donde el Jacobiano es singular, i.e. el determinante es nulo, estos puntos particulares son denominados “puntos límites” y es en donde el método de continuación natural no converge. En tales casos, si asumimos que las condiciones de derivabilidad son satisfechas, la diferenciación del sistema (4.9) generalizado en la ecuación (4.12) toma la forma:

$$\frac{\partial \xi}{\partial \Phi} d\Phi + \frac{\partial \xi}{\partial P} dP = 0 \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \Phi} \frac{d\Phi}{dP} = - \frac{\partial \xi}{\partial P} \quad (4.16)$$

Cuando la matriz $\frac{\partial \xi}{\partial \Phi}$ se convierte en singular, la pendiente $\frac{\partial \xi}{\partial P}$ de la tangente a la curva $\Phi(P)$ es infinita. La solución para la ecuación (4.15) corresponde a dP igual a cero, mientras que $d\Phi$ no lo es. Una ilustración de lo descrito se ve en la Figura 4.2 obtenido de [52] donde muestra la variación del módulo de la solución $\|\Phi\|$ (*Flux*) versus la magnitud de la tensión de la fuente (*Source Voltage*) para un caso típico, donde:

$$\|\Phi\| = \sqrt{\phi_{1c}^2 + \phi_{1s}^2} \quad (4.17)$$

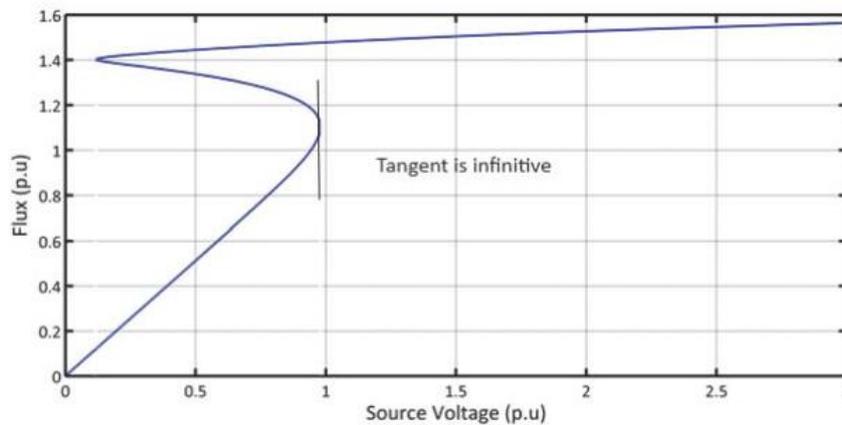


Figura 4.2: Tangente infinito a la curva en el punto límite. **Fuente:** [52]

Conforme a la Figura 4.2, el parámetro P es la amplitud de la fuente E y cuando el valor de la amplitud E se acerca a algún punto límite, en dicho punto la tangente es vertical. Estos puntos singulares delimitan intervalos denominados ramificaciones, estas ramificaciones son curvas conformadas por puntos que son soluciones del sistema para distintos valores del parámetro considerado. El comportamiento del sistema es similar dentro la misma ramificación hasta llegar a los puntos límites donde de acuerdo a la teoría de bifurcación estos puntos son límites de estabilidad del sistema.

El método de Galerkin no determina dichas soluciones en la vecindad del punto límite, ya que el jacobiano es singular. Para superar este problema usamos el método de continuación por pseudo-longitud de arco el cual no solo permite obtener los puntos regulares de la solución del sistema $\xi(\Phi, P) = 0$, sino también determina los límites de estabilidad de las diferentes soluciones correspondientes a $\det(J) = 0$ con suficiente precisión, y permite la caracterización de diferentes tipos de bifurcaciones (puntos límites, bifurcaciones pitchfork, etc).

4.3. Método de pseudo longitud de arco

4.3.1. Principio

Habiendo mencionado las características de los puntos límites, el propósito del método de continuación por la pseudo-longitud del arco es evitar que esa singularidad del jacobiano del sistema dificulte el cálculo de la solución. De forma a superar la singulari-

dad del jacobiano J formulado en (4.13), se añade una ecuación más al sistema, así se obtiene un nuevo sistema ampliado con un nuevo jacobiano el cual es invertible y con la posibilidad de converger a una solución en el punto límite. Esto implica que ambos Φ y P son ahora las nuevas variables incógnitas y un nuevo parámetro s (el pseudo-longitud de arco) es introducido. El nuevo método implementado es un predictor-corrector y sus diferentes etapas son presentadas a continuación:

- Se asume que una solución (Φ_0, P_0) de la ecuación (4.9) es conocida. A partir de este punto, calculamos las coordenadas del punto (Φ_c, P_c) localizado a un valor determinado del nuevo parámetro. Ambos (Φ_0, P_0) y (Φ_c, P_c) son puntos de la curva representando la solución del sistema $\xi(\Phi, P) = 0$.
- El sistema $\xi(\Phi_c, P_c) = 0$ define $N + 1$ ecuaciones (recordando que $N = 2n + 1$, donde n es la cantidad de armónicas consideradas), expresando que el punto que buscamos a una distancia s de (Φ_0, P_0) genera la ecuación suplementaria. El número de ecuaciones e incógnitas ahora son iguales.
- En realidad, en vez de expresar la longitud s del arco entre (Φ_c, P_c) y (Φ_0, P_0) , aproximamos por la longitud de la proyección s sobre la tangente \vec{t} en el punto (Φ_0, P_0) . Es por esto que es llamado “método de pseudo-longitud de arco”.

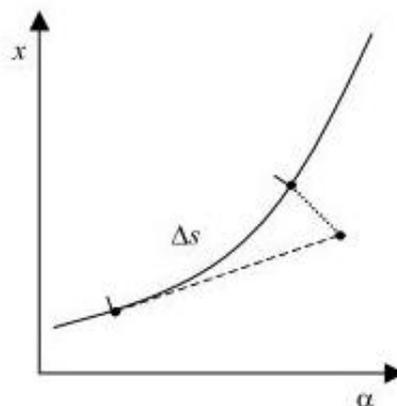


Figura 4.3: Pseudo-longitud de arco para un sistema $F(x, \alpha)$, donde x es la variable vectorial y α es el parámetro. **Fuente:**[50]

4.3.2. Determinación de la ecuación suplementaria

Tomando como base el apartado descrito en [13], donde describe que para determinar la ecuación suplementaria, podemos expresar la longitud de la proyección de la cuerda C sobre la tangente. Esto es dado por el producto escalar de \vec{t} y \vec{d} :

$$s = \vec{t} \cdot \vec{d} \quad \text{con} \quad \|\vec{t}\| = 1, \quad (4.18)$$

donde \vec{d} tiene $N + 1$ componentes $(\Phi_c - \Phi_0, P_c - P_0)$ y $\vec{t} = [U, V]$ es la tangente, donde U viene a ser la componente N -dimensional y V un escalar.

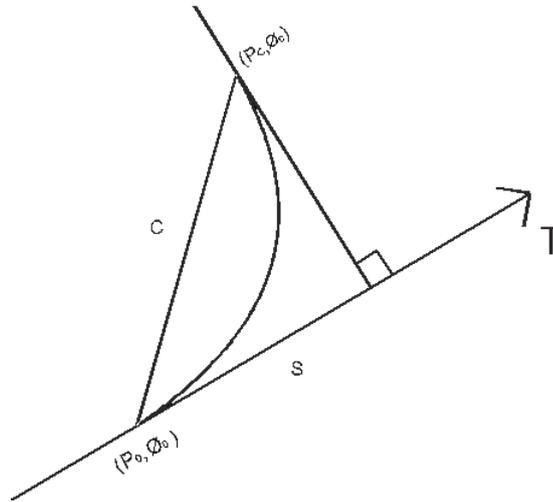


Figura 4.4: Determinación de la ecuación suplementaria. **Fuente:**Elaboración Propia

Estas componentes (U, V) en el punto (Φ_0, P_0) son obtenidos por diferenciación de $\xi(\Phi, P) = 0$, como en la ecuación (4.15):

$$\left. \frac{\partial \xi}{\partial \Phi} \right|_{(\Phi_0, P_0)} \cdot U + \left. \frac{\partial \xi}{\partial P} \right|_{(\Phi_0, P_0)} \cdot V = 0, \quad (4.19)$$

o

$$D_\Phi \cdot U + D_P \cdot V = 0, \quad (4.20)$$

donde $D_\Phi = \frac{\partial \xi}{\partial \Phi}$ es una matriz $N \times N$ y $D_P = \frac{\partial \xi}{\partial P}$ es un vector $N \times 1$.

Para determinar las componentes (U, V) del vector tangente, de la ecuación (4.20),

uno puede definir el escalar V igual a uno, y deducir la componente U . Por desgracia, en algunos casos la única solución del sistema es obtenido para valores de V iguales a cero. Un modo más general es usado para calcular las componentes, este método consiste en resolver el sistema (4.20), que puede ser re-escrito es su forma matricial como sigue;

$$\begin{pmatrix} D_{\Phi} & D_p \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

$$[D] \cdot [t] = [B] \quad (4.22)$$

Este sistema es resuelto por triangularización de la matriz D usando pivoteo completo (intercambio de filas y columnas). Sin embargo, notará que en este sistema, la ecuación (4.22) tiene un número infinito de soluciones. Para hallar una solución y que no sea la trivial $(0, 0)$, se puede establecer el último elemento de la matriz incógnita D , ya triangularizada, igual a uno así como también el último elemento de la matriz B igual a uno. De esta manera el vector tangente \vec{t} queda totalmente determinado, aunque, como se puede notar, $-\vec{t}$ también es solución del sistema. Para resolver este problema, el signo del último elemento de T (matriz triangularizada) que hemos introducido debe ser elegido tal que el determinante sea siempre positivo. La matriz T es como sigue:

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{22} & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \pm 1 \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

Con los valores de U y V extraídos de la ecuación (4.21) (o su equivalente en (4.22)) y con la ecuación (4.18) finalmente obtenemos:

$$U \cdot (\Phi_c - \Phi_0) + V \cdot (P_c - P_0) - S = 0, \quad (4.24)$$

que es la ecuación suplementaria.

Así, la solución del sistema de ecuaciones no lineales son aquellas que satisfacen las ecuaciones (4.9) y (4.24).

$$\begin{cases} \xi(\Phi, P) = 0 \\ U \cdot (\Phi_c - \Phi_0) + V \cdot (P_c - P_0) - S = 0 \end{cases} \quad (4.25)$$

El nuevo sistema (4.25) puede ser resuelto usando el método de Newton-Raphson. El jacobiano del sistema (4.25) está dado por:

$$J' = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial \Phi} & \frac{\partial \xi}{\partial P} \\ U & V \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Note que si el $\frac{\partial \xi}{\partial \Phi} = 0$, el método de Galerkin donde utilizamos a P como parámetro no converge, pero el método de continuación de pseudo-longitud de arco si, desde que el nuevo jacobiano J' es siempre invertible. Este resultado es conocido como el algoritmo de borde o *bordering algorithm*, probado en [31] y en mayor detalle en el apéndice A.

4.3.3. Detectando puntos límites. Cambios en nuevas ramificaciones

Como uno de los objetivos del trabajo es detectar los puntos de bifurcación, más precisamente hablando de los puntos singulares o *turning points*. Si se trabaja dentro de un esquema *path following*, como los que proporcionan los métodos de continuación. En estos puntos existen una serie de características, previamente mencionadas, como ser que el jacobiano del sistema es singular, lo que a su vez implica que la tangente a la curva presente una pendiente infinita, entre otras características.

Es posible determinar de manera única a la tangente utilizando la ecuación (4.20), donde pertenecen al núcleo de la matriz D de la ecuación (4.22) que posee dimensión unitaria. En esos casos la matriz J' es invertible.

Teniendo en cuenta que la teoría de la bifurcación nos menciona que la estabilidad del sistema dinámico modelado cambia en un punto singular. Es por ello que estamos particularmente interesados en estos puntos.

Conforme el método de continuación va desarrollándose tomamos en cuenta al determinante de J , cotejamos los puntos donde el determinante son próximamente cero y vemos los cambios de signos que presenta, esto implica que uno de los autovalores de la matriz realizó un cambio de plano, esto trae como consecuencia un cambio en la estabilidad del sistema evidenciando que en un paso anterior se encuentra la presencia de un punto de bifurcación. Es importante denotar que la longitud del nuevo parámetro s es importante debido a que un tamaño grande hace que las soluciones cercanas a los puntos límites puedan converger en ramificaciones distintas a las que realmente se buscan y para tamaños pequeños puede que la solución converja al mismo punto de origen. Es importante a la par monitorear las soluciones que se van obteniendo.[9]

CAPÍTULO 5

SIMULACIONES Y RESULTADOS

5.1. Análisis previo

Cuando la capacitancia principal está en paralelo con el elemento no lineal y el elemento que conecta a la fuente de tensión con el elemento no lineal es inductivo hablamos de una ferresonancia paralela pero cuando la capacitancia principal está en serie con el elemento no lineal y el elemento que conecta a la fuente de tensión con el elemento no lineal es capacitivo, hablamos de una serie [19].

El escenario bajo investigación es la presencia de la ferresonancia serie monofásica, bajo uno de los casos clásicos de ocurrencia de Ferresonancia, que se da cuando se des-energiza un transformador electromagnético de tensión conectado a una barra de conducción operando el circuito interruptor, existen otros métodos de ocurrencia del fenómeno que se encuentran detallados en [4] y en [7]. El modelado matemático con su respectiva simplificación, representado en la Figura 4.1, explicado en el capítulo anterior, es uno de los variados ejemplos que se utiliza en la literatura para estudiar los efectos de la ferresonancia.

Los parámetros a tener en cuenta por este modelo son la resistencia serie (R_s), la resistencia paralelo (R_p), la inductancia (L) y la capacitancia (C), todos elementos lineales por lo tanto es posible hallar el equivalente Thevenin del circuito, el resultado se detalla en las siguiente línea.

$$Z_{th}(kw) = \frac{R_p R_s (R_p + R_s) + R_p (kwL - 1/kwC)^2}{(R_p + R_s)^2 + (kwL - 1/kwC)^2} + j \frac{R_p^2 (kwL - 1/kwC)}{(R_p + R_s)^2 + (kwL - 1/kwC)^2} \quad (5.1)$$

$$E_{th}(kw) = \frac{ER_p (R_p + R_s)}{(R_p + R_s)^2 + (wL - 1/wC)^2} + j \frac{ER_p (wL - 1/wC)}{(R_p + R_s)^2 + (wL - 1/wC)^2} \quad (5.2)$$

El modelo es el mismo que el dado en [2]. La resistencia serie (R_s) modela las pérdidas en la línea de transmisión así (L) modela la inductancia en la línea. La capacitancia serie se visualiza gracias a los *grading capacitors* en interruptores, *stray capacitances*

en las barras de conducción, o posibles bancos de capacitores de compensación de potencia reactiva[18].

El transformador esta modelado por una resistencia en paralelo (R_p) que representa las pérdidas del núcleo y una inductancia no lineal saturable. Las pérdidas en el núcleo se deben a dos causas: *a)* la tendencia del material a conservar su imanación o a oponerse a una variación de imanación, que ocasiona las llamadas *pérdidas por histéresis*, y *b)* el calentamiento por efecto Joule que aparece en el material a consecuencia de las corrientes de Foucault que se inducen en él al ser variable el flujo con el tiempo, esto constituye las *pérdidas por corrientes de Foucault* [39].

Las pérdidas por histéresis se deben a la tendencia de la característica $B(H)$ del material de recorrer un lazo cuando se aplica a dicho material un campo magnético cíclico. Es importante distinguir entre histéresis y pérdidas por histéresis, donde histéresis es el fenómeno que se da como resultado de la propiedad del material de conservar su imanación o de oponerse a una variación del estado magnético. Las pérdidas por histéresis es la energía convertida en calor a causa del fenómeno de histéresis, y según suele interpretarse, está asociada solamente a una variación cíclica de fuerza magnetomotriz [39].

Las pérdidas por corrientes de Foucault están originadas por corrientes en el material magnético, y estas corrientes están producidas por fuerzas electromotrices inducidas por los flujos variables [39].

Resaltando de vuelta que la ferresonancia es más un fenómeno de régimen permanente que un fenómeno transitorio, es por ello que en este trabajo se encara desde un punto tal que los valores obtenidos nos llevan directamente a los valores de estado estacionario sin calcular previamente el transitorio del sistema. El esquema algebraico prevalece por encima del sistema dinámico ya que permite lo anteriormente mencionado y además se abstrae de la dinámica física del sistema.

5.2. Bifurcación respecto a la amplitud de la fuente de tensión E

El trabajo realizado tiene como marco general la utilización de herramientas numéricas dentro de la síntesis de armónicas balanceadas y a los distintos métodos de análisis utilizados (Galerkin, transformada de Fourier, Newton-Raphson, *pseudo-arclength continuation method*), los resultados coinciden con gran exactitud con los valores encontrados en la literatura, y las simplificaciones propuestas en [9] y explicadas en [4].

Dado un conjunto particular de parámetros (R_s , R_p , L , C) y un modelado específico de uno los lazos del ciclo de histéresis de un transformador de potencial, el método analítico-numérico nos permite graficar las curvas de bifurcación del sistema. Los algoritmos fueron efectuados en Matlab y validados con el método analítico presentado [9].

Los parámetros físicos del circuito de la Figura 4.1, extraídos de [2] y de [9] son:

- E: Amplitud de la fuente de tensión $e(t) = E \cos(100\pi t + \alpha)$
- α : fase inicial de $e(t)$.
- C: Capacitancia equivalente del circuito constituido por todas las capacitancias de los interruptores, el transformador y la sección de bus.
- L: inductancia lineal del circuito.
- R_s : Resistencia serie del circuito.
- R_p : Resistencia paralela del circuito.

La característica magnética de la inductancia no lineal es definida por la siguiente ecuación $i(\phi) = 10^{-8}\phi + 2,34 \times 10^{-34}\phi^9$ el cual corresponde a un transformador real de tensión, fase simple, con tensión nominal primaria de $V_{nom} = 230 \text{ KV} = 1 \text{ P.U.}$ y con un flujo nominal $\phi_{nom} = 735 \text{ Wb} = 1 \text{ P.U.}$ [13]

Adoptando los siguientes valores de

$$R_s = 32 \text{ K}\Omega, \quad R_p = 714 \text{ M}\Omega, \quad C = 0,4 \text{ nF}, \quad L = 0 \text{ H}, \quad \alpha = \pi/2;$$

es posible realizar un modelado matemático del sistema y simularlo para obtener la curva de bifurcación.

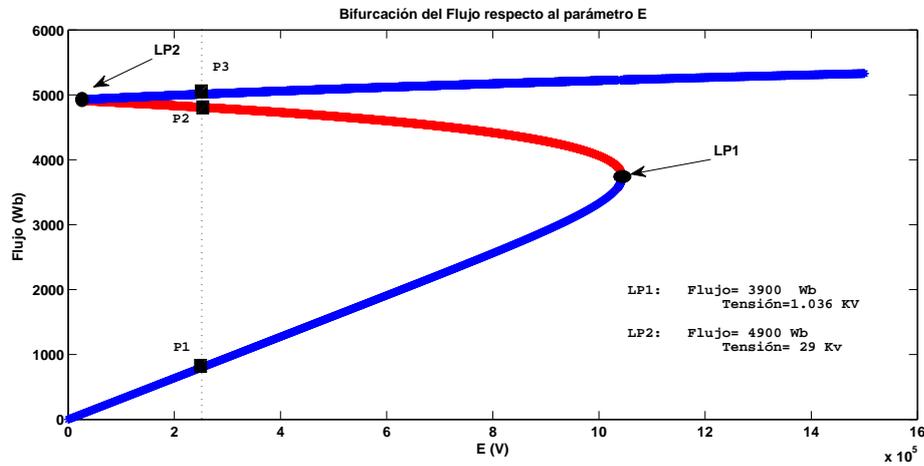


Figura 5.1: Bifurcación del Flujo respecto al parámetro E

Fuente:Elaboración Propia

Como puede notarse en la Figura 5.1, la curva está compuesta por una ramificación estable, desde $E = 0$ hasta un primer punto límite (LP1), luego cambia la estabilidad el sistema y se vuelve inestable, hasta llegar a un nuevo punto límite (LP2). Posteriormente vuelve a cambiar de comportamiento para volverse ferresonante y estable.

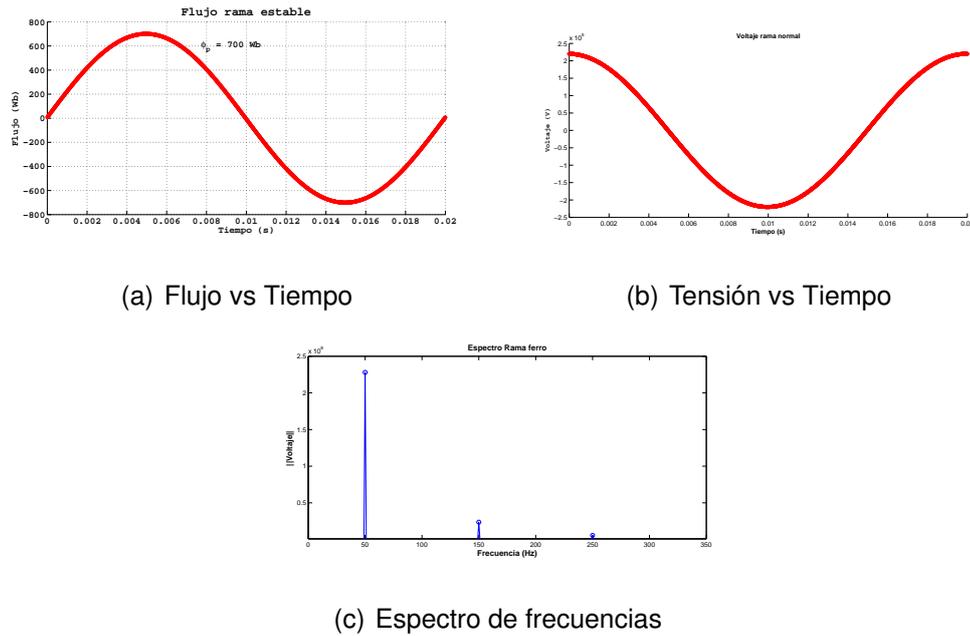


Figura 5.2: Gráfica correspondiente al punto de operación P1 (ver Figura 5.1), perteneciente a la ramificación estable. Se visualiza en las gráficas correspondientes al flujo y la tensión respecto al tiempo que el valor pico es de 1 P.U. **Fuente:** Elaboración propia.

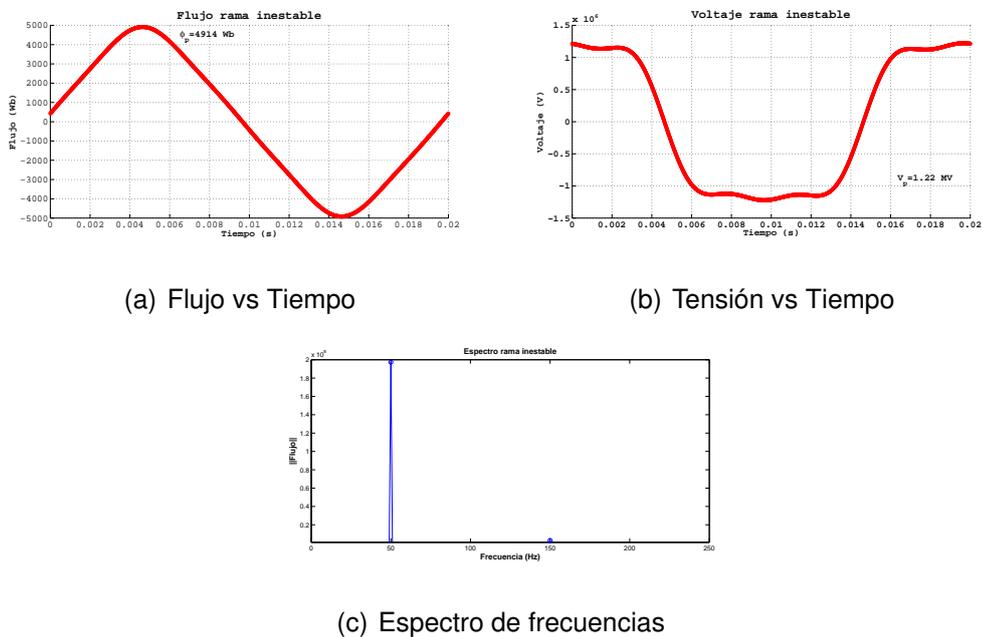
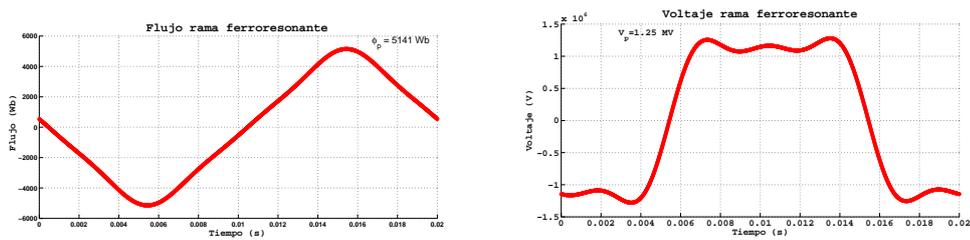
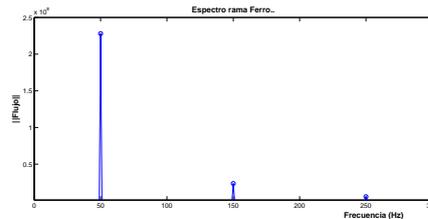


Figura 5.3: Gráfica correspondiente al punto de operación P2 (ver Figura 5.1), perteneciente a la ramificación inestable. Se visualiza en las gráficas correspondientes al flujo y la tensión respecto al tiempo que el valor pico es mayor que 1 P.U. con ($\phi_p = 6,68$ P.U.) y ($V_p = 5,31$ P.U.) respectivamente. **Fuente:** Elaboración propia.



(a) Flujo vs Tiempo

(b) Tensión vs Tiempo



(c) Espectro de frecuencias

Figura 5.4: Gráfica correspondiente al punto de operación $P3$ (ver Figura 5.1), perteneciente a la ramificación ferroresonante. Se visualiza en las gráficas correspondientes al flujo y la tensión respecto al tiempo que el valor pico es mayor que 1 P.U con ($\phi_p = 6,99$ P.U.) y ($V_p = 5,56$ P.U.) respectivamente **Fuente:** Elaboración propia.

Las Figuras 5.2, 5.3 y 5.4 corresponden a los respectivos valores de las ramificaciones en los puntos $P1$, $P2$, $P3$ respectivamente. Donde los valores obtenidos de los coeficientes correspondientes a la señal armónica fueron diagramados respecto al tiempo y a la frecuencia.

El punto $P1$ corresponde a un punto de la ramificación estable ($E = 230$ KV) y en el espectro de frecuencias correspondiente es posible observar la presencia de una sola armónica correspondiente a la misma frecuencia (50 Hz) de la fuente de tensión, presentando una onda senoidal, tanto del flujo como la tensión, sin distorsión.

El punto $P2$ corresponde a un punto de la ramificación inestable, la ramificación inestable tiene la particularidad de que no es mantenida en régimen permanente, un punto con valores iniciales dentro de esta ramificación tenderán a estabilizarse en la ramificación estable o en la ramificación ferroresonante.

Destacando que el valor de E es el mismo, en el espectro de frecuencias ya puede observarse no solo la presencia dominante de la frecuencia 50 Hz sino además de una frecuencia armónica impar de la misma, específicamente de la 3^{er} armónica, aunque con un valor mucho más pequeño que la principal. La presencia de esta armónica hace que la forma de onda tanto del flujo como la tensión salga distorsionada y con unos valores picos aumentados, $\phi_p = 4909$ Wb ($\phi_p = 6,68$ P.U.) y $V_p = 1,22$ MV ($V_p = 5,31$ P.U.)

El punto $P3$ corresponde a un punto de la ramificación ferroresonante y en el espectro de frecuencias ya puede observarse no solo la presencia dominante de la frecuencia 50 Hz y de la 3^{er} armónica, sino además de otra armónicas impar (5^{ta}). La tercera ya tomando un mayor protagonismo, con un valor mayor que en la ramificación inestable haciendo aún más deformada la onda senoidal para el flujo y la tensión con valores picos de $\phi_p = 5138$ Wb ($\phi_p = 6,99$ P.U.) y $V_p = 1,27$ MV ($V_p = 5,56$ P.U.)

Teniendo en cuenta las gráficas y valores anteriores, además de saber que la ferroresonancia presenta el fenómeno de salto en resonancia como cualquier otro problema no lineal, podemos concluir que la región de trabajo de $V=230$ KV para este circuito en particular se encuentra en una zona de riesgo potencial de ferroresonancia, debido a que en dicho punto de operación es posible tener una zona de operación normal y también un zona de operación ferroresonante.

5.3. Influencia de las armónicas dentro del diagrama de bifurcación del flujo respecto a E

Habíamos hecho el tratamiento correspondiente tomando al flujo como una sumatoria de armónicas mediante series de Fourier, la contribución de dichas armónicas dentro de la ferroresonancia fundamental es bastante escasa, recién para valores paramétricos grandes es donde adquiere preponderancia [52].

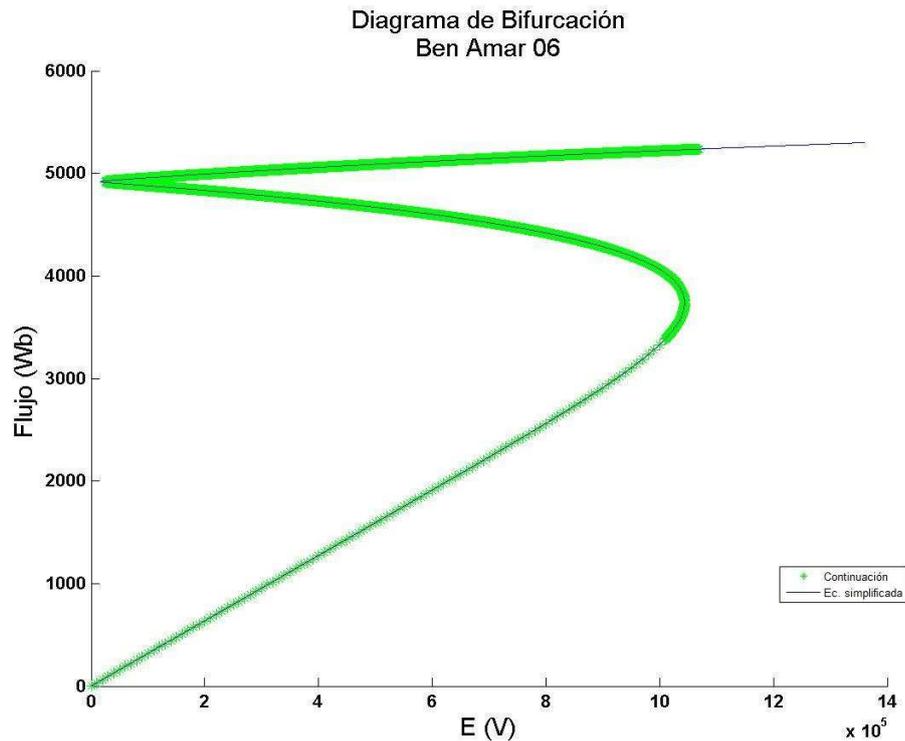


Figura 5.5: Bifurcación del Flujo respecto parámetro amplitud de la fuente (E). Comparando la ecuación simplificada de [9] con respecto a la curva obtenida por el método de continuación. **Fuente:**Elaboración Propia

Podemos notar que en la Figura 5.5 tanto el método de continuación por pseudo-longitud de arco y la ecuación propuesta por Ben Amar en [9] resulta totalmente solapada una con otra. La curva hecha por continuación solo se tomó la fundamental, i.e en la ecuación que modela el flujo por series de Fourier es de la forma $\phi(t) = \phi_0 + \phi_{1c} \cos(\omega t) + \phi_{1s} \sin(\omega t)$, lo cual conlleva a generar un sistema de 3 ecuaciones algebraicas.

Aumentando la cantidad de armónicas dentro del flujo podemos notar, como se muestra en la Figura 5.6, donde se grafica solamente la fundamental, que es pequeña la diferencia con respecto a los puntos límites, y a medida que la cantidad de armónicas aumenta esa diferencia es imperceptible. Cabe destacar que a medida que se toma en consideración más armónicas en la serie que modela el flujo, estas armónicas ganan protagonismo frente a la fundamental, evidenciando una pérdida de energía en la fundamental que se van distribuyendo en las armónicas superiores.

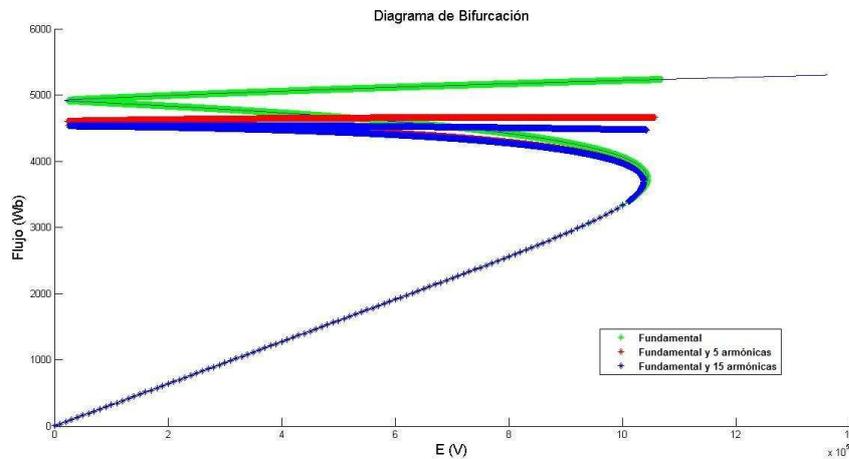


Figura 5.6: Bifurcación del Flujo respecto al parámetro amplitud de la fuente (E). Tomando en cuenta varias armónicas dentro de la serie de Fourier, graficando sólo la fundamental. **Fuente:**Elaboración Propia

5.4. Sensibilidad de la variación de un segundo parámetro dentro del diagrama de bifurcación del flujo respecto a E

Trabajar en una zona de operación antes del $LP2$ (punto límite 2) es lo ideal, así se evita el riesgo de ferresonancia al existir un cambio en el valor de la amplitud de la tensión. Variando otros parámetros podemos hacer que el sistema presente un $LP2$ fuera del margen de trabajo nominal de $V = 230KV$.

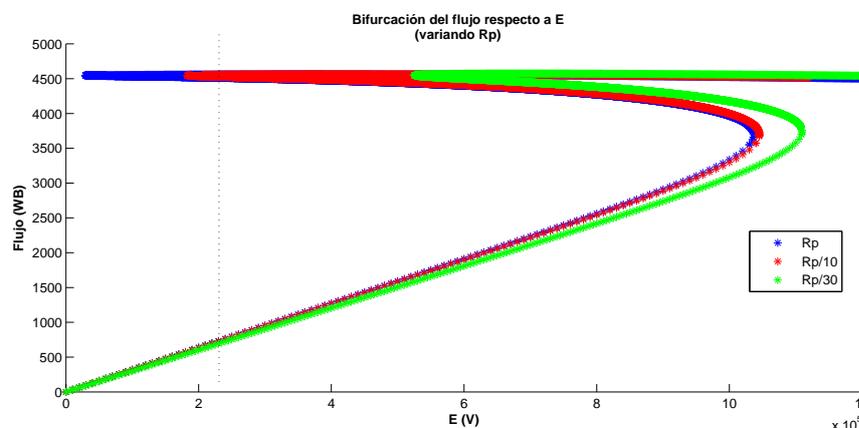


Figura 5.7: Bifurcación del Flujo respecto al parámetro E. Diferentes valores de Rp **Fuente:**Elaboración Propia

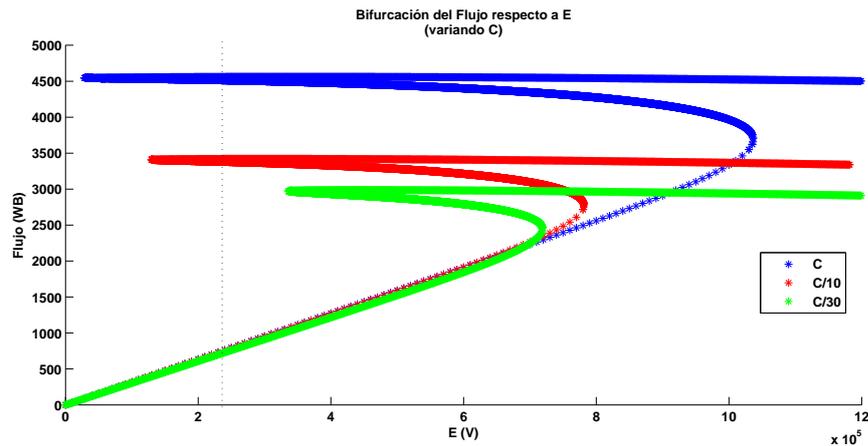


Figura 5.8: Bifurcación del Flujo respecto al parámetro E. Diferentes valores de C. **Fuente:**Elaboración Propia

Las Figuras 5.7 y 5.8 son figuras de bifurcación del flujo ϕ con respecto a E , pero con diferentes valores iniciales de R_p y C respectivamente, esto es, fijando en un valor específico al segundo parámetro se realiza el gráfico de bifurcación respecto a E . En el color azul está graficado para el valor mencionado anteriormente, y en rojo sería para los valores $R_p/10$ ($C/10$) y verde para $R_p/30$ ($C/30$).

En la figura 5.7 se varia R_p disminuyendo su valor respecto al valor inicial ($R_p=714$ $M\Omega$), esta reducción de R_p implica el aumento de las pérdidas en el núcleo del transformador. Por lo tanto, al ir bajando el valor de R_p tendremos un punto $LP2$ más alejado del valor de operación nominal de la fuente ($V = 230$ KV), denotado por la línea de puntos, este alejamiento indica una disminución de la susceptibilidad del sistema a sufrir los efectos de la ferresonancia. A modo de ejemplo, para un valor $R_p = 71,4$ $M\Omega$ (curva en rojo), el punto de bifurcación $LP2$ bifurca a un valor de $E = 182,7$ KV aún dentro del valor nominal de $V = 230$ KV, pero para un valor de $R_p = 23,8$ $M\Omega$ (curva en verde) bifurca en $E = 525,3$ KV, lo cual provee un importante margen de seguridad para dicho valor nominal. Este compromiso de los fabricantes de proveer transformadores con perdidas cada vez más bajas hizo que el fenómeno de la ferresonancia tomará mayor protagonismo en los sistemas eléctricos.

El mismo análisis podemos realizar variando el valor de la capacitancia C al realizar

la curva de bifurcación de E . Disminuyendo el valor de C a 40 pF (curva en rojo), el punto de bifurcación $LP2$ se da en $E = 130$ KV, lo cual aún representa peligro para el valor nominal V, pero a un valor de $C = 13,3$ pF (curva en verde) el valor de bifurcación es de $E = 336,3$ KV, de esta manera situamos al sistema fuera del rango de ferresonancia.

Es importante destacar que a medida que disminuimos los valores de C , los rangos de los valores del Flujo (ϕ), van disminuyendo también.

5.5. Bifurcación del flujo respecto a las pérdidas de la línea (Rs)

Manteniendo el mismo esquema de la Figura 4.1 también podemos estudiar el sistema variando otros parámetros, realizando el mismo procedimiento que habíamos hecho anteriormente, pero variando las derivadas con respecto al parámetro, en este caso será RS (la resistencia en serie).

Si tenemos en cuenta las ecuaciones (5.2) notamos que tanto $E_{th}(kw)$ como $Z_{th}(kw)$ son funciones de R_s , y eso implica que dentro del sistema de ecuaciones (4.9), al derivarlas con respecto a R_s , tendremos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_0}{\partial R_s} &= 0 &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial \xi_{kc}}{\partial R_s} &= \frac{\partial R_k}{\partial R_s} I_{kc} + \frac{\partial X_k}{\partial R_s} I_{ks} + \frac{\partial E_{kc}}{\partial R_s} = 0 &(5.3) \\ &\vdots \\ \frac{\partial \xi_{ks}}{\partial R_s} &= \frac{\partial X_k}{\partial R_s} I_{kc} - \frac{\partial R_k}{\partial R_s} I_{ks} + \frac{\partial E_{ks}}{\partial R_s} = 0 \end{aligned}$$

Teniendo la configuración inicial y luego realizando el equivalente de Thevenin al circuito, las ecuaciones (5.3) son genéricas y nada más varían con respecto a que parámetro se deriva, a excepción de la primera ($\frac{\partial \xi_0}{\partial p}$). Las derivadas van dependiendo de las funciones fructos de las distintas configuraciones que se puedan tener.

Así para este caso particular las derivadas con respecto a R_s son:

$$\frac{\partial R_k}{\partial R_s} = \frac{R_p R_s + R_p(R_p + R_s)}{(R_p + R_s)^2 + (l\omega L - \frac{1}{l\omega C})^2} - \frac{2R_p(R_p + R_s)(l\omega L - \frac{1}{l\omega C})^2 + 2R_p R_s (R_p + R_s)^2}{[(R_p + R_s)^2 + (l\omega L - \frac{1}{l\omega C})^2]^2} \quad (5.4a)$$

$$\frac{\partial X_k}{\partial R_s} = -\frac{2(R_p + R_s)[R_p(R_s + R_p)(l\omega L - \frac{1}{l\omega C}) - R_p R_s(l\omega L - \frac{1}{l\omega C})]}{[(R_p + R_s)^2 + (l\omega L - \frac{1}{l\omega C})^2]^2} \quad (5.4b)$$

$$\frac{\partial E_{kc}}{\partial R_s} = \frac{ER_p}{(R_p + R_s)^2 + (l\omega L - \frac{1}{l\omega C})^2} - \frac{2ER_p(R_p + R_s)^2}{[(R_p + R_s)^2 + (l\omega L - \frac{1}{l\omega C})^2]^2} \quad (5.4c)$$

$$\frac{\partial E_{ks}}{\partial R_s} = -\frac{2ER_p(R_s + R_p)(l\omega L - \frac{1}{l\omega C})}{[(R_p + R_s)^2 + (l\omega L - \frac{1}{l\omega C})^2]^2} \quad (5.4d)$$

Con estas ecuaciones es posible realizar la curva de bifurcación con respecto a la resistencia en Serie (R_s).

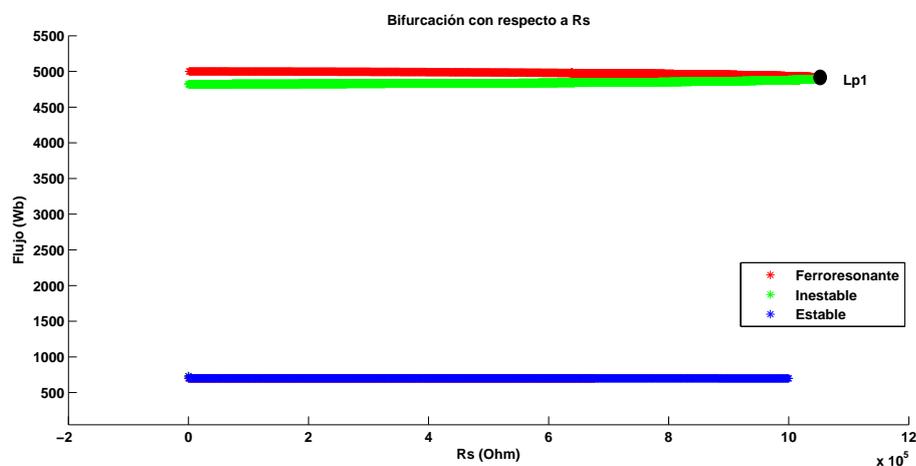


Figura 5.9: Bifurcación del flujo respecto al parámetro R_s usando el método de continuación. **Fuente:**Elaboración Propia

En la Figura 5.10 se realiza una comparación con el diagrama de bifurcación en forma bruta (puntos en azul), puede notarse que la ramificación estable coincide plenamente con la obtenida por el método de continuación y que la ramificación ferroresonante está un poco por encima de la ramificación obtenida por el método de continuación. Esta diferencia está explicada en [4], donde la bifurcación por el método de Fuerza Bruta fue realizada considerando todos los armónicos que posee el flujo mientras que en el método de continuación se realiza un truncamiento de las armónicas a considerar y sólo se grafica la fundamental del flujo.

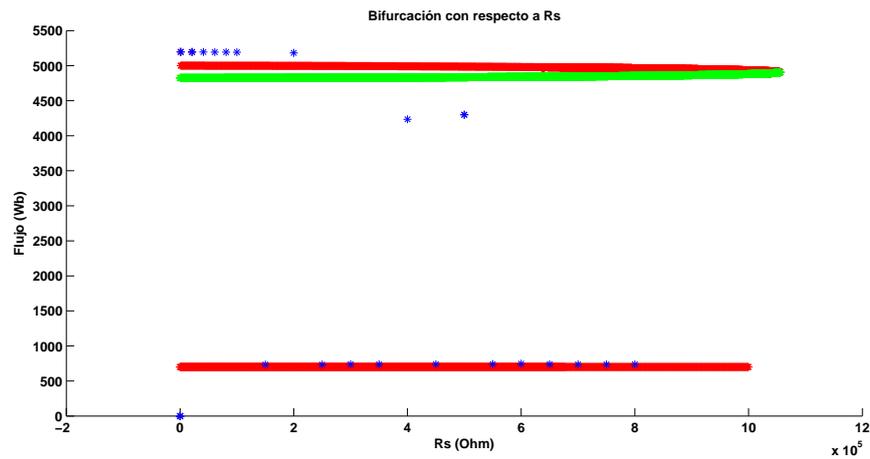


Figura 5.10: Bifurcación del flujo respecto al parámetro R_s por el Método de Continuación y por el Método de Fuerza Bruta. **Fuente:**Elaboración Propia

5.6. Bifurcación del flujo respecto a las pérdidas del núcleo del transformador (R_p)

Siguiendo con la misma línea de trabajo, i.e, graficando los puntos de la ramificación estable en color azul, los puntos de ramificación inestable de color verde y los puntos de ramificación ferroresonante de color rojo. Cabe destacar que a diferencia de la bifurcación de R_s , aquí no se visualiza un Punto Límite 1, sólo se puede ver la presencia de un Punto Límite 2.

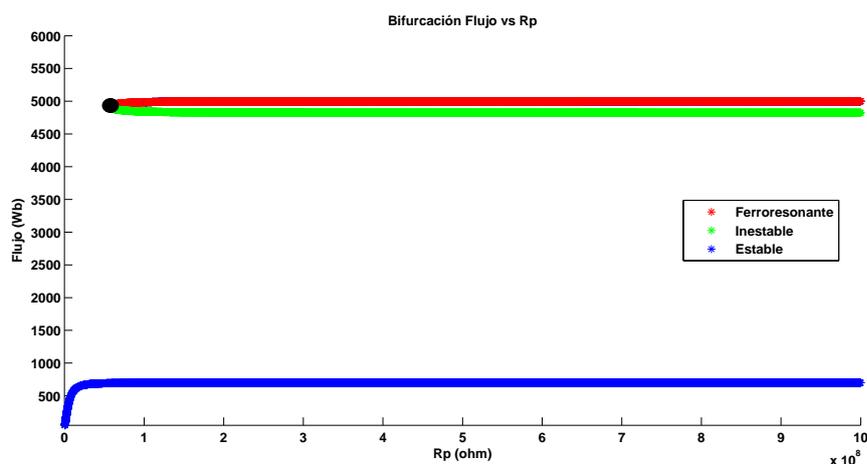


Figura 5.11: Bifurcación del flujo respecto al parámetro R_p . **Fuente:**Elaboración Propia

Manteniendo el mismo esquema de trabajo y modificando ciertas partes del código

como ser la parte de las derivadas con respecto al parámetro es posible graficar también la bifurcación con respecto a R_p (véase Figura 5.11).

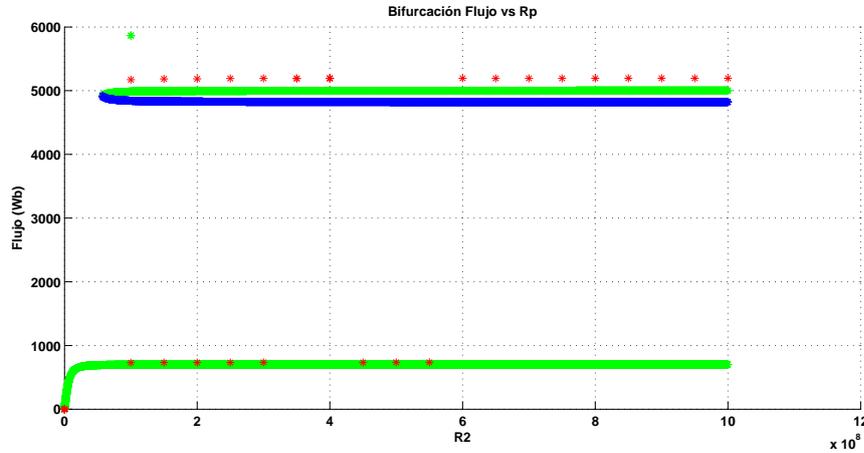


Figura 5.12: Bifurcación del flujo respecto al parámetro R_p por el Método de Continuación y por el Método de Fuerza Bruta. **Fuente:**Elaboración Propia

Se resalta nuevamente la proximidad de los puntos en rojo (Fuerza Bruta) con los verdes (Continuación) y la exactitud de los puntos tanto de fuerza bruta como de continuación en la rama estable (véase Figura 5.12).

Las ecuaciones de la derivada con respecto a R_p son:

$$\frac{\partial R_k}{\partial R_p} = \frac{R_p R_s + R_s(R_p + R_s) + (l\omega L - \frac{1}{l\omega C})^2}{(R_p + R_s)^2 + (l\omega L - \frac{1}{l\omega C})^2} - \frac{2R_p(R_p + R_s)[(l\omega L - \frac{1}{l\omega C})^2 + R_p R_s(R_p + R_s)]}{[(R_p + R_s)^2 + (l\omega L - \frac{1}{l\omega C})^2]^2} \quad (5.5a)$$

$$\frac{\partial X_k}{\partial R_p} = -\frac{2(R_p + R_s)[R_p(R_s + R_p)(l\omega L - \frac{1}{l\omega C}) - R_p R_s(l\omega L - \frac{1}{l\omega C})]}{[(R_p + R_s)^2 + (l\omega L - \frac{1}{l\omega C})^2]^2} + \frac{2R_p(l\omega L - \frac{1}{l\omega C})}{(R_s + R_p)^2 + (l\omega L - \frac{1}{l\omega C})^2} \quad (5.5b)$$

$$\frac{\partial E_{kc}}{\partial R_p} = \frac{E(R_p + R_s)}{(R_p + R_s)^2 + (l\omega L - \frac{1}{l\omega C})^2} + \frac{ER_p}{(R_p + R_s)^2 + (l\omega L - \frac{1}{l\omega C})^2} - \frac{2ER_p(R_p + R_s)^2}{[(R_p + R_s)^2 + (l\omega L - \frac{1}{l\omega C})^2]^2} \quad (5.5c)$$

$$\frac{\partial E_{ks}}{\partial R_p} = -\frac{2ER_p(R_s + R_p)(l\omega L - \frac{1}{l\omega C})}{[(R_p + R_s)^2 + (l\omega L - \frac{1}{l\omega C})^2]^2} + \frac{E(l\omega L - \frac{1}{l\omega C})}{(R_s + R_p)^2 + (l\omega L - \frac{1}{l\omega C})^2} \quad (5.5d)$$

5.7. Bifurcación respecto a la inductancia de la línea de transmisión (L)

Al realizar la bifurcación del flujo ϕ respecto a L, es muy importante partir de una solución conocida ya sea en la ramificación ferroresonante o inestable y a partir de ahí controlar o monitorear los cambios que pudieran haber como resultado del proceso ya que si no se posee una solución conocida es bastante tedioso encontrar una, generándose una especie de prueba y error.

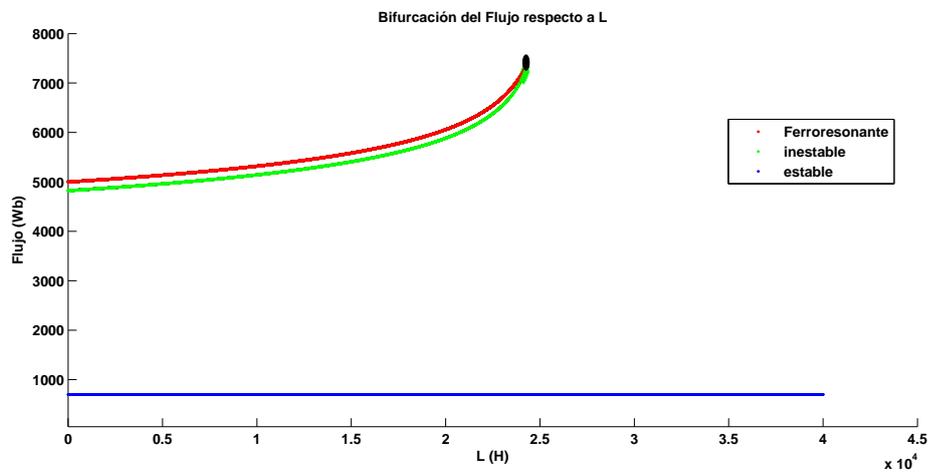


Figura 5.13: Bifurcación del flujo respecto a L. **Fuente:**Elaboración Propia

Las ecuaciones de la derivada con respecto a L son:

$$\frac{\partial R_k}{\partial L} = \frac{2Rp\omega(l\omega L - \frac{1}{l\omega C})}{(Rp + Rs)^2 + (l\omega L - \frac{1}{l\omega C})^2} - \frac{2l\omega Rp(l\omega L - \frac{1}{l\omega C})[(l\omega L - \frac{1}{l\omega C})^2 + Rs(Rp + Rs)]}{[(Rp + Rs)^2 + (l\omega L - \frac{1}{l\omega C})^2]^2} \quad (5.6a)$$

$$\frac{\partial X_k}{\partial L} = -\frac{2l\omega Rp(l\omega L - \frac{1}{l\omega C})[(Rs + Rp)(l\omega L - \frac{1}{l\omega C}) - RpRs(l\omega L - \frac{1}{l\omega C})]}{[(Rp + Rs)^2 + (l\omega L - \frac{1}{l\omega C})^2]^2} + \frac{l\omega Rp(Rp + Rs) - l\omega RpRs}{(Rs + Rp)^2 + (l\omega L - \frac{1}{l\omega C})^2} \quad (5.6b)$$

$$\frac{\partial E_{kc}}{\partial L} = -\frac{2ERp\omega(Rp + Rs)(l\omega L - \frac{1}{l\omega C})}{[(Rp + Rs)^2 + (l\omega L - \frac{1}{l\omega C})^2]^2} \quad (5.6c)$$

$$\frac{\partial E_{ks}}{\partial L} = -\frac{2ERp\omega(l\omega L - \frac{1}{l\omega C})^2}{[(Rp + Rs)^2 + (l\omega L - \frac{1}{l\omega C})^2]^2} + \frac{l\omega ERp}{(Rs + Rp)^2 + (l\omega L - \frac{1}{l\omega C})^2} \quad (5.6d)$$

En la Figura 5.13 se observa la presencia de una ramificación inestable y ferroresonante aislada de la ramificación estable, sólo se observa 1 sólo Punto Límite. Esto implica

que para un valor L mayor al correspondiente al punto donde bifurca el flujo (LP1), no se observará el fenómeno de la ferroresonancia por causa de la variación de este parámetro. Pero el valor L (24KH) donde bifurca el flujo es bastante grande comparado con los valores físicos reales.

5.8. Bifurcación respecto a la capacitancia (C)

Al realizar la bifurcación respecto a C, a la par de partir desde una solución conocida como el caso de L, es muy importante redefinir el sistema utilizando el sistema por unidad, debido a que los valores con los que se trabaja son bastantes pequeños y los errores debido a la precisión de la máquina son muy frecuentes. Normalizando el sistema con respecto a los valores bases de flujo $\phi_B = 735$ Wb, de tensión $V_B = 230$ KV y la potencia base $S_B = 40$ VA es posible determinar el diagrama de bifurcación del mismo.

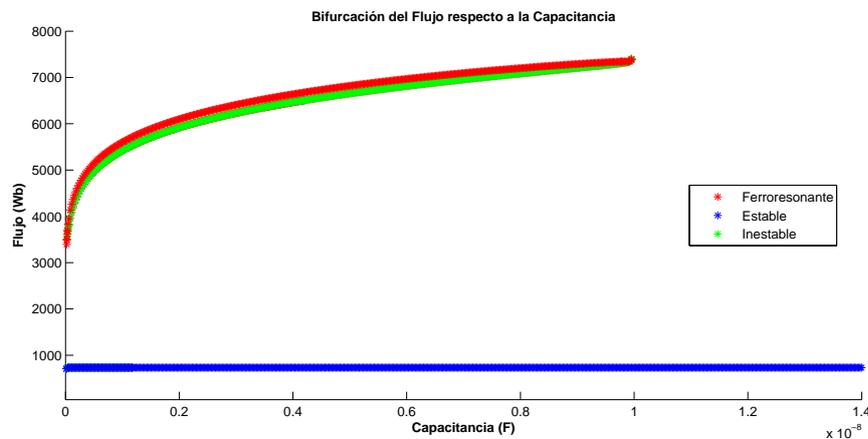


Figura 5.14: Bifurcación del Flujo respecto a C. **Fuente:**Elaboración Propia

Las ecuaciones de la derivada con respecto a C (capacitancia) son:

$$\frac{\partial R_k}{\partial C} = \frac{2Rp(l\omega L - \frac{1}{l\omega C})}{l\omega C^2((Rp + Rs)^2 + (l\omega L - \frac{1}{l\omega C})^2)} - \frac{2Rp(l\omega L - \frac{1}{l\omega C})[(l\omega L - \frac{1}{l\omega C})^2 + Rs(Rp + Rs)]}{[(Rp + Rs)^2 + (l\omega L - \frac{1}{l\omega C})^2]^2} \quad (5.7a)$$

$$\frac{\partial X_k}{\partial C} = \frac{Rp^2}{l\omega C^2((Rp + Rs)^2 + (l\omega L - \frac{1}{l\omega C})^2)} - \frac{2Rp^2(l\omega L - \frac{1}{l\omega C})}{l\omega C^2[(Rs + Rp)^2 + (l\omega L - \frac{1}{l\omega C})^2]^2} \quad (5.7b)$$

$$\frac{\partial E_{kc}}{\partial C} = -\frac{2ERp(Rp + Rs)(l\omega L - \frac{1}{l\omega C})}{l\omega C^2[(Rp + Rs)^2 + (l\omega L - \frac{1}{l\omega C})^2]^2} \quad (5.7c)$$

$$\frac{\partial E_{ks}}{\partial C} = -\frac{2ERp(lwL - \frac{1}{lwC})^2}{lwC^2[(Rp + Rs)^2 + (lwL - \frac{1}{lwC})^2]^2} + \frac{ERp}{lwC^2[(Rs + Rp)^2 + (lwL - \frac{1}{lwC})^2]} \quad (5.7d)$$

En la Figura 5.14 se observa al igual que en la bifurcación del flujo respecto a L , la presencia de una ramificación inestable y ferroresonante aislada de la ramificación estable, pero a diferencia del gráfico de bifurcación anterior (respecto a L) aquí se observa la presencia de una curva cerrada aislada. Se observan la presencia de tanto el $LP1$ como $LP2$. Esto implica que para valores de C dentro de los puntos Límites 1 y 2, es posible que la ferroresonancia se manifieste no así como para valores fuera de estos valores límites.

En las gráficas de bifurcación de Rs , Rp , L y C se evidencian curvas que no poseen un punto de inicialización trivial, como si lo tiene el el caso de la bifurcación de E ($E=0$). Por lo que los puntos iniciales fueron obtenidos por prueba y error con lo que a partir de allí fue posible graficar las curvas respectivas.

5.9. Resumen de valores críticos

A modo de resumen, en la tabla 5.1, se detallan los valores de los puntos límites para las distintas gráficas de bifurcación.

Parámetro	Punto crítico 1	Punto crítico 2
E	(1,036 MV; 3900 Wb)	(29 KV; 4900 Wb)
C	(1,04 nF; 7178,6 Wb)	(20 pF; 3200 Wb)
L	(24,5 KH; 7278,6 Wb)	–
Rs	(1,0553 MΩ; 4908 Wb)	–
Rp	–	(57,5 MΩ; 4916,3Wb)

Tabla 5.1: Resumen de puntos Críticos. **Fuente:** Elaboración Propia

Explicando mejor la Tabla 5.1, podemos mencionar que la bifurcación respecto a la capacitancia C se visualiza la presencia de una curva cerrada compuesta por las ramificaciones inestables y ferroresonante. Entre los puntos $LP1$ y $LP2$ se encuentran los puntos ferroresonantes, es decir que entre $20\text{pF} \leq C \leq 1,04 \text{ nF}$ es probable que tengamos la presencia de la ferroresonancia fundamental para esos valores de Capacitancia.

De la bifurcación respecto a la inductancia (L), es posible notar que solo se visualiza el punto límite 1. Existen puntos inestables y ferrosesonantes hasta $L \leq 24,5$ KH, un valor muy grande para una inductancia.

Respecto a la bifurcación respecto a la resistencia serie (Rs), se visualiza que existen puntos ferrosesonantes e inestables hasta $1,055$ MΩ, sin embargo, visualizando la bifurcación respecto a las pérdidas del núcleo (Rp) es posible notar que existen puntos ferrosesonantes a partir de $R_p \geq 57,5$ MΩ.

5.10. Estudio de otros sistemas eléctricos

Para el siguiente caso de estudio, tomamos como base el esquema planteado en [14], notamos que la Figura 5.15, es un caso de ferrosesonancia paralela.

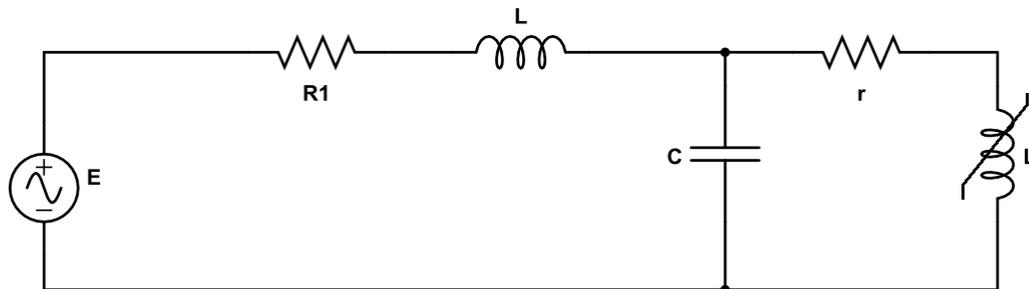


Figura 5.15: Configuración circuital inicial - Ferrosesonancia paralela. **Fuente:**[14]

Los parámetros del circuito son: $R_1 = 0,16\Omega$, $r = 1\Omega$, $L = 0,5$ H, con $i(\phi) = 10^{-4}\phi + 1,2 \times 10^{-44}\phi^{15}$, donde el valor del Capacitor fue tomado inicialmente como $C = 30\mu$ F.

El modelo Thevenin queda de la siguiente manera:

$$Z(k) = \frac{\frac{R(kwL - 1/kwC)}{kwC} + \frac{LR}{kw}}{(R)^2 + (kwL - 1/kwC)^2} + r + j \frac{\frac{R^2}{kwC} - \frac{L(KwL - 1/kwC)}{C}}{(R)^2 + (kwL - 1/kwC)^2} \quad (5.8)$$

$$E(k) = \frac{-E(kwL - 1/kwC)}{wC((R)^2 + (wL - 1/wC)^2)} + j \frac{-ER}{wC((R)^2 + (wL - 1/wC)^2)} \quad (5.9)$$

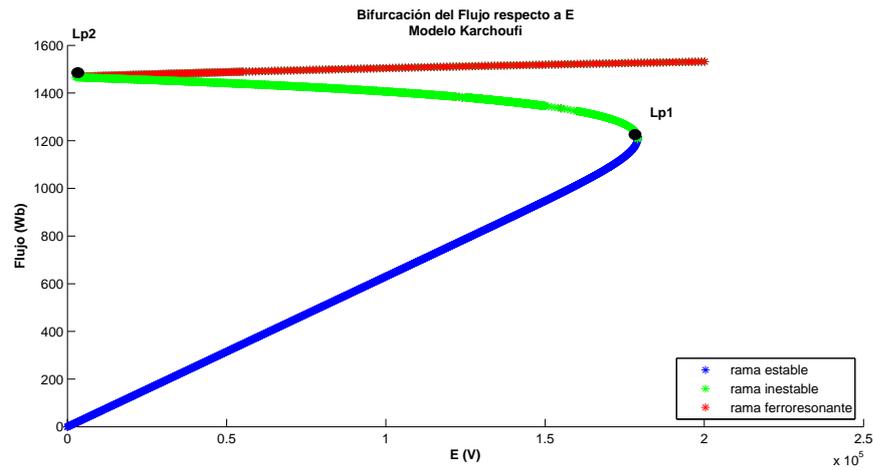


Figura 5.16: Bifurcación del Flujo respecto a E. Modelo Kharchoufi (Ferroresonancia paralela). **Fuente:** Elaboración Propia

En este ejemplo es posible notar que presenta el mismo tipo de curva con la forma “S”, característica de un sistema ferroresonante con presencia de histéresis. Los valores de puntos límites son diferentes debido a los valores del sistema.

El punto límite 1 (LP1) se da en $E = 174$ KV con un flujo de $\phi = 1230$ Wb y el Punto límite 2 (LP2) se da en $E = 2,58$ KV con un flujo de $\phi = 1466$ Wb.

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES FINALES Y TRABAJOS FUTUROS

En el presente trabajo se ha desarrollado una herramienta matemática para el análisis de sistemas eléctricos con riesgo de ferresonancia. Para ello, a partir del circuito equivalente Thevenin del sistema en estudio, es posible generalizar el estudio para cualquier tipo de configuración eléctrica.

Al realizar la gráfica de bifurcación del flujo respecto al parámetro E , se ha observado que tanto para las ramificaciones inestables y ferresonantes, los valores evidencian una diferencia despreciable conforme uno aumenta la cantidad de armónicas consideradas en la serie de Fourier que modelan al flujo. Para un nivel de $n = 15$ armónicas en adelante es posible realizar un diagrama de bifurcación con un buen grado de precisión considerando que al aumentar dicha cantidad sólo se reditúa en un mayor grado de esfuerzo computacional sin mucha influencia en los resultados finales.

Mediante la bifurcación de los distintos parámetros del sistema, se ha detallado la existencia de zonas de riesgo para los distintos parámetros del sistema. Teniendo en cuenta que la ferresonancia es una resonancia no lineal que presenta el fenómeno de salto, el circuito tomado como ejemplo principal se encuentra en riesgo de ferresonancia ya que opera en regiones donde puede desencadenarse.

A partir del diagrama de bifurcación con respecto a la amplitud de la fuente, se ha tomado la variación de otro parámetro del sistema. Se ha observado que la sensibilidad presentada conforme a la variación de la capacitancia y la resistencia en paralelo que modela las pérdidas del núcleo, son mayores que las presentadas por los demás parámetros.

A partir del estudio de sensibilidad, se ha notado que el compromiso de los fabricantes en proveer transformadores con menores pérdidas fue contraproducente en términos de ferresonancia. Bajaron las perdidas por un lado pero aumentaron las chances de

que la ferrosresonancia se presente. Por otro lado, bajando las capacitancias, es posible crear un sistema libre de ferrosresonancia haciendo que el punto de bifurcación se aleje del punto de tensión de operación nominal del sistema.

6.1. Trabajos Futuros

Los resultados obtenidos pueden servir de herramienta para nuevos trabajos de investigación, de forma tal, a mejorar los modelos planteados, la exactitud y dependencia de los datos iniciales. A continuación se mencionan algunas líneas de investigación que podrían acrecentar los conocimientos presentados.

- Estudiar modelos más complejos de circuitos de potencia, debido a que el estudio se generaliza a partir del modelado del circuito equivalente Thevenin, esto no resultaría mayor problema.
- Extender los estudios de sensibilidad paramétrica para sistemas más complejos
- Estudiar las variaciones que existirían considerando el fenómeno de Histéresis.
- Estudiar un esquema de inicialización para hallar los puntos iniciales de las curvas cerradas aisladas observadas en las graficas de bifurcación de R_p , R_s y C y L . Tambien estudiar como se comporta el sistema teniendo en cuenta las sub-armónicas y las armónicas y las gráficas de bifurcación respectivamente.
- Estudiar un esquema de control para un circuito ferrosresonante, o un sistema de inteligencia para aplicar en casos que se amerite.

Bibliografía

- [1] D. Jacobson , P. Lehn, R. Menzies, Stability Domain Calculations of Period-1 Ferroresonance in a Nonlinear Resonant Circuit. *IEEE Transactions on Power Delivery*, VOL. 17, NO. 3, pp. 865-871 July 2002
- [2] D. Jacobson, Examples of ferroresonance in a high voltage power system, *Proc. IEEE Power Eng. Soc. Annual Meeting*, Toronto, ON, Canada, Jul. 2003.
- [3] D. Shoup, J. Paserba, A. Mannarino, Ferroresonance conditions asociated with a 13 Kv voltage regulator during back-feed conditions, disponible en http://www.ipst.org/techpapers/2007/ipst_2007/papers_IPST2007/Session8/62.pdf, consultado en Julio-2012.
- [4] S.Santoso, R. Dugan, P. Nedwick, Modeling Ferroresonance phenomena in an Underground Distribution System , disponible en <http://www.ipst.org/techpapers/2001/ipst01paper034.pdf>, consultado en Julio-2012.
- [5] T. Van Craenenbroeck, W. Michiels, D. Van Dommelen, K. Lust, Bifurcation Analysis of Three-phase ferroresonant oscilations in underground Power Systems, *IEEE transactions on Power Delivery*, Vol 14, No. 2, april 1999.
- [6] C. Bogado, W. Causarano, C. Schaerer. Bifurcación ferroresonante por la saturación magnética, *Congresso de Matemática Aplicada e Computacional - Sudeste*, Uberlandia, Brasil, septiembre 20 - 23, 2011.
- [7] P. Ferracci, Ferroresonance, *Groupe Schneider: Schneider Cahier Technique* Nro 190, March 1998.
- [8] H. Radmanesh, M. Rostami, J. Khalilpour, Studying Effect of Magnetizing Curve Nonlinearity Index on the Occurring Chaotic Ferroresonance Oscillation in Auto-transformers. *Energy and Power Engineering*, 3, pag. 79-86, 2011.
- [9] F. Ben Amar, R. Dhifaoui. Bifurcation Lines Calculations of Period-1 Ferroresonance, *Proceedings of the 6th WSEAS International Conference on Power Systems*, Lisbon, Portugal, September 22-24, 2006.

- [10] F. Ben Amar, R. Dhifaoui. Study of the periodic ferroresonant in the electrical power networks by bifurcation diagrams, *Electrical Power and Energy Systems* 33, 61-85,2011.
- [11] Lecturas sobre funciones Continuas. Disponible en http://exmaticas.files.wordpress.com/2012/08/funciones_continuas.pdf. Consultado en marzo 2013.
- [12] Lecturas sobre corriente alternas. Disponible en <http://wass-inac.blogspot.com/2012/04/2o-ano-corriente-alterna.html>. Consultado en marzo 2013.
- [13] C. Kieny, G. Le Roy, A. Sbai. Ferroresonance study using Galerkin method with pseudo-arclength continuation method, *IEEE Transaction on Power Delivery*, vol. 6, no. 4. October 1991.
- [14] N. Kharchoufi, A. Draou. Application of the continuation method for the study of transient H ferroresonance, *Department of Electrical Technology, Madinah College of Tecnology*, consultado el dia 13 de julio de 2012, disponible en http://ipac.kacst.edu.sa/edoc/2009/173256_1.pdf.
- [15] O. Gonzalez, L. Hernandez, Aislamiento en sistemas de media tensión ante fenómenos por ferroresonancia, Tesis de Grado, Facultad de Ingeniería-Universidad de Carabobo, 2008.
- [16] H. Radmanesh, H. Fathi, H. Hosseinian, Application of Metal Oxide Surge Arrester on the Non-Conventional Chaotic Ferroresonance Oscillation in Voltage Transformers. *Research Journal of Applied Sciences, Engineering and Technology* , 4, pag. 4085-4092, 2012.
- [17] S. Mozaffari, Chaotic Ferroresonance In Power Transformers, *University of British Columbia*, 1996, 141 pags.
- [18] P. Moses, M. Massoum. Modeling Ferroresonance in single-phase transformer cores with hysteresis, in *Proceeding of the 8th WSEAS International Conference on System Science and Simulation in Engineering*, October 2009.

- [19] C. Kieny. Application of the bifurcation theory in studying and understanding the global behavior of a Ferroresonance electric power circuit, *IEEE Transaction on Power Delivery*, vol. 6, no. 2. April 1991
- [20] Van Valkenburg, M.E., *Analisis de Redes*, 2da Ed. Ed. Limusa, Mexico 1995.
- [21] Clases online de Metodo numérico de la Universidad Fullerton. disponible en <http://math.fullerton.edu/mathews/n2003/GalerkinMod.html>. consultado en Octubre-2012.
- [22] J. Millares, P. Jiménez, G. Verdú, J. Muñoz-Cobo. Obtención de las soluciones periódicas de un oscilador no lineal mediante un método rápido de Galerkin, *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*. Vol 13,3,367-381 (1997).
- [23] Devaney, Robert L., *An Introduction to Chaotic Dynamical System*, 2nd ed. Addison-Wesley, 1989.
- [24] Strogatz, S., *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Westview Press 1994.
- [25] Parker, T, Chua, L., *Practical Numerical Algorithms for chaotic systems*. Springer-Verlag New York inc. 1989.
- [26] Zeltkevic, M. Lecture Notes on Differential equation. Introduction of computer method - Massachusetts Institute of Thecnology, disponible en http://web.mit.edu/10.001/Web/Course_Notes/Differential_Equations_Notes/node7.html, consultado en "febrero-2013".
- [27] Keller. H. B., Numerical solution of bifurcation and non-linear engenvalue problems, in application of bifurcation theory,(ed. P. Rabino - Witz) Academic Press, New York,1987,pp 359-384.
- [28] Keller. H. B., The Bordering algorithm and path following near singular points of higher nullity, *SIAM J. Sci. Stat.Comput.*, Vol 4, Nro 4, 1983.

- [29] Kelley, C.T., Arclength continuation and bifurcation. North Caroline State University, disponible en <http://www4.ncsu.edu/~ctk/MA784/continue.pdf>, consultado en "octubre-2012".
- [30] Doedel, E., Lecture Notes on Numerical Analysis of nonlinear equations. Department of computer science and software engineering, Concordia University, disponible en <http://indy.cs.concordia.ca/auto/notes.pdf>, consultado en "septiembre-2012".
- [31] Doedel E., Keller, H. B., Kernevez, J.P, Numerical analysis and control of bifurcation problems (I) Bifurcation in finite dimensiones. *Internation Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol 1, Nro. 3 (1991) 493-520.
- [32] Ragnarsson S. The Pseudo-arclength method for turning points. Final Project, disponible en http://audiophile.tam.cornell.edu/Healey_012607/718proj_ragnarsson.pdf. Consultado en Septiembre-2012.
- [33] Forsyth, B, Providing Usable Force Feedback Information in Time Critical Tasks. Disponible en <http://www.cs.ubc.ca/labs/spin/projects/guide.html>. Consultado en marzo-2013.
- [34] Allgower E., Georg K., Introduction to Numerical Continuation Method. Colorado State University, 1990.
- [35] IEEE slow transients task force report. Modeling and analysis guide-lines for slow transients Part III: The study of ferroresonance, in *IEEE Transportation and Power Delivery*, Jan. 2000, vol. 15, no. 1, pp. 255-265.
- [36] Nelson Fiedler-Ferrara, Carmen P. Cintra do Prado. "Caos. Uma Introdução". Capítulo III de la Parte I. Editora Edgard Blücher LTDA. 1994.
- [37] S. C. Chapra, R. P. Canale. Métodos numéricos para ingenieros, Cuarta Edición. México: McGraw - Hill Interamericana, 2004.
- [38] V. Valverde, A.J. Mazón, I. Zamora, G. Buigues, Ferroresonance in Voltage Transformers: Analysis and Simulations. *International Conference On Renewable Energies*

- And Power Quality (ICREPQ'07)*, Sevilla 28,29 and 30 Mach 2007. Disponible en www.icrepq.com/icrepq07/317-valverde.pdf
- [39] E.E. staff del MIT, Circuitos magnéticos y transformadores, Segunda Edición. España: Ed. Reverté, 2003.
- [40] H. Lamba, M. Grinfeld, S. McKee, and R. Simpson, Subharmonic ferroresonance in an LCR circuit with hysteresis, *IEEE Trans. Magn.*, vol. 33, no. 4, pp. 2495-2500, Jul. 1997.
- [41] A. Rezaei-Zare, M. Sanaye-Pasand, H. Mohseni, S. Farhangi, and R. Iravani. Analysis of Ferroresonance Modes in Power Transformers Using Preisach-Type Hysteretic Magnetizing Inductance, *IEEE Transactions on Power Delivery*, VOL. 22, NO. 2, April 2007
- [42] A. Rezaei-Zare, R. Iravani, M. Sanaye-Pasand, H. Mohseni and S. Farhangi. An Accurate Hysteresis Model for Ferroresonance Analysis of a Transformer, *IEEE Transactions on Power Delivery*, VOL. 23, NO. 3, July 2008.
- [43] J. J. Grainger, W. D. Stevenson Jr., Análisis de Sistemas de Potencia, Primera Edición. México: McGraw-Hill, 2001
- [44] Bethenod, J., Sur le Transformateur à Résonance, *L'Éclairage Électrique*, vol. 53, Nov. 30, 1907, pp. 289-96.
- [45] Boucherot, P., Éxistence de Deux Régimes en Ferrorésonance, *Rev. Gen. de L'Élec.*, vol. 8, no. 24, December 11, 1920, pp. 827-828.
- [46] Karniadakis, G, Sherwin, S. *Spectral/ Hp element method for computational fluid dynamics*. Oxford Science Publications, Second Edition. 2005.
- [47] Burden R., Faires J.D., "Análisis Numérico", 7ma Ed., Thomson Learning, Mexico, 2002.
- [48] Chan, T., Keller, H. B., "Arc-length continuation and multi-grid techniques for nonlinear elliptic eigenvalue problems", *Siam J. Sci. Stat. Comput*, Vol 3, nro 2, June 1982.

- [49] G. Swift, An analytical approach to ferroresonance, *IEEE Trans. Power App. Syst.*, vol. 88, pp. 4246, Jan. 1969.
- [50] Notas de lectura - Proyecto IGB, Universidad Nacional de Colombia. Consultado en Enero-2013. Disponible en <http://www.docentes.unal.edu.co/atovarp/docs/IGB/06-Localizaci%F3n%20de%20puntos%20de%20bifurcaci%F3n.pdf>
- [51] Hirsch, M. W. and Smale, S., *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic Press. New York 1974.
- [52] Erbay A., Parameter study of Ferro-Resonance with harmonic balance method. Degree Project, KTH Electric Engineering, Electric Power system lab, Royal Institute of Technology, Stockholm-Sweden, 2012.

APÉNDICE A

ALGORITMO DE BORDE

A.1. Introducción

En este apéndice daremos un tratamiento más intensivo al algoritmo de borde, el cuál constituye una pieza fundamental dentro del esquema del algoritmo de continuación.

A.2. Algoritmo de borde

Básicamente, el algoritmo de borde es una forma de eliminación de bloques del tipo gaussiano que es utilizado comúnmente es la resolución de sistemas lineales no singulares del tipo $\tilde{A}\tilde{X} = \tilde{B}$ con coeficiente matricial en la forma particionada

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C^* & D \end{pmatrix}$$

donde la dimensión del núcleo de A es mayor que 1, i.e. $\dim \mathcal{N}(A) \geq 1$.

Problemas de este estilo son comunes en procedimiento del tipo path following o seguidor de curva, donde el sistema va resolviendo a medida que los valores de A varían, llegando incluso a resolver para puntos singulares.

Al hablar de coeficiente particionado nos referimos a lo siguiente:

$$\tilde{A}\tilde{X} = \begin{pmatrix} A & B \\ C^T & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ \gamma \end{pmatrix} = \tilde{B} \quad (\text{A.1})$$

La matriz \tilde{A} es del orden $N + v$ con las indicadas sub-matrices A que es de orden N , D que es de orden v , B es del orden $N \times v$ y C que es del orden $v \times N$. Los vectores x , $g \in \mathbb{R}^N$ y $\xi, \gamma \in \mathbb{R}^v$.

De hecho, en familias de sistemas con el tipo de ecuaciones como en (A.1), es donde resolvemos para aplicaciones con $N \gg v$. Es mayor el interés cuando la matriz A se

torna singular o casi singular mientras que aún permanece no singular. Esto se da en sistemas del tipo $Av = b$ donde $v, b \in \mathbb{R}^N$.

A.3. Algoritmo de borde: \tilde{A} y A son no singulares

Supongamos que \tilde{A} y A son no singulares, entonces el sistema (A.1) puede ser resuelto como sigue. Determinar la matriz V de orden $N \times v$ y el vector $w \in \mathbb{R}^N$ de:

$$AV = B \quad (\text{A.2})$$

$$Aw = g \quad (\text{A.3})$$

Una vez obtenido V y w , es posible evaluar $\xi \in \mathbb{R}^v$ resolviendo:

$$(D - C^T V)\xi = \gamma - C^T w \quad (\text{A.4})$$

y luego evaluar $x \in \mathbb{R}^N$ como:

$$x = w - V\xi \quad (\text{A.5})$$

Este procedimiento es una simple forma de eliminación gaussiana por bloques, que resulta de la factorización del sistema de este modo:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C^T & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C^T & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & V \\ 0 & D - C^T V \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Dado que A es no singular, tanto V como w son soluciones únicas. Y dado que además \tilde{A} también es no singular, ξ y x son obtenidos como soluciones únicas.

Aquí la mayor problemática es la factorización de A , que para problemas de grandes dimensiones lleva un elevado costo computacional.

A.4. Algoritmo de borde: A singular y \tilde{A} no singular

Ahora consideraremos el caso en que A posee una nulidad de dimensión v .

$$\dim \mathcal{N}(A) = v \quad (\text{A.7})$$

Lo cual generan sub-espacios de v dimensiones.

$$\mathcal{N}(A) = \text{espacio}\{\phi_1, \dots, \phi_n\} \quad \Phi \equiv (\phi_1, \dots, \phi_n), \quad (\text{A.8})$$

$$\mathcal{N}(A^T) = \text{espacio}\{\psi_1, \dots, \psi_n\} \quad \Psi \equiv (\psi_1, \dots, \psi_n), \quad (\text{A.9})$$

Bajo las condiciones de (A.7) la matriz \tilde{A} del sistema (A.1) es no singular si y solo si:

$$\dim \mathcal{R}(B) = v \quad (\text{A.10})$$

$$\dim \mathcal{R}(C^T) = v \quad (\text{A.11})$$

$$\mathcal{R}(B) \cap \mathcal{R}(A) = 0 \quad (\text{A.12})$$

$$\mathcal{N}(C^T) \cap \mathcal{N}(A) = 0 \quad (\text{A.13})$$

Usando las matrices Ψ y Φ de vectores bases introducidas en (A.8) y (A.9), podemos reformular las ecuaciones (A.10)-(A.12) de esta manera:

$$\Psi^T B \text{ es no singular} \Leftrightarrow (\text{A.11, A.13}) \quad (\text{A.14})$$

$$C^T \Phi \text{ es no singular} \Leftrightarrow (\text{A.10, A.12}) \quad (\text{A.15})$$

Las pruebas referentes se puede consultar en [28], pero como menciona el artículo

son ejercicios básicos de álgebra lineal.

Para resolver el sistema (A.1), en este caso re-escribimos de la siguiente manera:

$$Ax_0 + B\xi_0 = g \quad (\text{A.16})$$

$$C^T x_0 + D\xi_0 = \gamma_0 \quad (\text{A.17})$$

Multiplicando (A.16) por Ψ^T y valiendonos de la no-singularidad dicha en (A.14) es posible obtener:

$$\xi_0 = (\Psi^T B)^{-1}(\Psi^T g) \quad (\text{A.18})$$

Utilizando (A.18) en (A.16) podemos obtener:

$$Ax_0 = g - B(\Psi^T B)^{-1}(\Psi^T g) \quad (\text{A.19})$$

Esta última ecuación tiene solución definida ya que la parte derecha cae dentro del $\mathcal{R}(A)$. La solución general de (A.19) es:

$$x_0 = x^p + \Phi\varsigma_0 \quad (\text{A.20})$$

donde x^p es una solución particular cualquiera y $\varsigma_0 \in \mathbb{R}^v$ es arbitrario. Usando esto en (A.17) obtenemos el único valor de ς_0 , teniendo en cuenta la no-singularidad planteada en (A.15).

$$\varsigma_0 = (C^T \Phi)^{-1}[\gamma - D\xi_0 - C^T x^p] \quad (\text{A.21})$$

Finalmente, la solución única de (A.16) y (A.17) es dado por la ecuación (A.18), (A.20) y (A.21). Para evaluar estas soluciones, necesitamos calcular primero Φ , Ψ , x^p , ξ_0 y ς_0 . De nuevo mencionamos que para sistemas con $N \gg v$, los cálculos asociados a la parte de los componentes v son ligeros comparados a la parte de $2v + 1$ en \mathbb{R}^N .

Para calcular los vectores nulidad a izquierdas y a derechas de A cuando se dan las condiciones mencionadas en (A.10) al (A.13), deben realizarse alguna forma de pivoteo

completo. Al realizar la factorización LU de A , utilizando las matrices triangularizadas tanto L como U es posible hallar los vectores Φ y Ψ que generan los espacios nulos de A . Ambos son obtenidos resolviendo sistemas triangulares. Para mayor detalle referirse a [28], de donde estas notas fueron tomadas.

APÉNDICE B

RESUMEN PARA EL CNMAC-BRASIL 2013

Truncated continuation bifurcation diagram for a ferroresonant electrical system

Ferroresonance is a non-linear phenomenon, highly complex and difficult to predict. Although it has been extensively analyzed for about 90 years, catastrophic failures of equipment continue to occur today due to its destructive effects [1]. We model a circuit electric system after a failure using classical Kirchhoffs voltage law. Since some components are time dependent, this result in a nonlinear ordinary differential system of equations of the form:

$$\dot{x} = f(x, \lambda, t, e), \quad (\text{B.1})$$

where $x \in \mathbb{R}^n$ is the vector of state variables (flux $\phi(t)$, voltage $v(t)$ and current $i(t)$ in the transformer) that appear in the system, $\lambda \in \mathbb{R}^p$ is the vector of physical parameters of the network (line length, line losses, impedance, etc.) and e is the forcing term (amplitude of the tension source) [2]. System (B.1) model an electrical system composed by a resistance, capacitance and inductance (transformer). The nonlinearity in system (B.1) arises of the relationship between the flux and the current intensity in the transformer. The model of this relationship is given by:

$$i(\phi) = a\phi + b\phi^{2q+1} \quad (\text{con } (a, b) \in \mathbb{R}^+ \text{ y } q \in \mathbb{N}) \quad (\text{B.2})$$

In this work, to solve system (B.1) we express the flux ϕ using a truncated Fourier series expansion as follows [2]:

$$\phi(t) = \phi_0 + \sum_{k=1}^n \phi_{kc} \cos(kwt) + \sum_{k=1}^n \phi_{ks} \sin(kwt) \quad (\text{B.3})$$

yielding an algebraic nonlinear system of $2n + 1$ equations $F(\Phi) = b$ with respect to the variables $\Phi = [\phi_0, \phi_{c1}, \phi_{c2}, \dots, \phi_{nc}, \phi_{s1}, \phi_{s2}, \dots, \phi_{ns}]$. This algebraic system is solved numerically using a Newton method. The solution of the $F(\Phi) = b$ corresponds to the steady state solution of system (B.1) which can be stable or unstable depending on the choice of the parameters of the system (B.1) or equivalently the electrical system.

In this work, to obtain the sensibility of the solution Φ (and consequently the state

x) with respect to the amplitude of source e , we implemented a continuation method. The resulting curve (bifurcation diagram) constitutes the family of steady state solutions (stable and unstable equilibrium points) of system (B.1) where the bifurcation points are clearly observed dividing the curve in stable and unstable segments, and ferroresonant and non-ferroresonant regions. Bifurcation curves were obtained considering up to 15 frequencies ($n = 15$) faster than the fundamental reference frequency of the source. The comparison of the obtained bifurcation diagram using a truncated Fourier series contrasted with the curve obtained by a simulation of system (B.1) using direct numerical simulation via Runge-Kutta method [3] - [4] shows that influence of higher frequencies (higher than 15) can be neglected in the sensibility analysis, and with good agreement with respect to other bifurcation curves obtained in the literature. The obtained truncated continuation curve allows characterizing possible critical regions (equilibrium points) in feasible time, giving an a priori knowledge of the secure equilibrium points of system (B.1) and helping to design robust non-ferroresonant equilibrium regions.

Keywords: *Bifurcation, Ferroresonant power system, Galerkin method, Pseudo-arclength continuation method.*

Bibliografía

- [1] D. Jacobson, Examples of ferroresonance in a high voltage power system, in Proc. IEEE Power Eng. Soc. Annual Meeting, Toronto, ON, Canada, Jul. 2003.
- [2] F. Ben Amar, R. Dhifaoui. "Study of the periodic ferroresonant in the electrical power networks by bifurcation diagrams", Electrical Power and Energy Systems 33, 61-85,2011.
- [3] C. Bogado, W. Causarano, C. Schaerer. Bifurcación ferroresonante por la saturación magnética, Congresso de Matemática Aplicada e Computacional - Sudeste, Uberlandia, Brasil, septiembre 20 - 23, 2011.
- [4] C. Bogado, W. Causarano, F. Delgado, C. Schaerer. Modelo y Técnicas de analisis para la ferroresonancia en transformadores,» de Décimo Quinto Encuentro Regional Ibero-americano del Cigré, Foz de Iguazú - Brasil, 2013

APÉNDICE C

RESUMEN PARA EL AUGM 2013

Obtención de los diagramas de bifurcación a través de métodos de continuación

Resumen-En el presente trabajo se presenta un marco matemático de régimen permanente para el estudio de un sistema eléctrico con posibilidad de ferresonancia, tomando como modelo uno de los ejemplos clásicos de contingencia, el cual se presenta cuando se des-energiza un transformador de tensión conectado a la barra a través de los capacitores divisores de tensión de un interruptor abierto. En dicha maniobra de operación del interruptor pueden presentarse tasas anormales de armónicas así como sobre-tensiones o sobre-corrientes en estado estacionario que pueden causar daños severos a los equipamientos eléctricos.

Planteamos el problema desde el punto de vista algebraico, donde las ecuaciones del sistema dinámico las trasladamos al dominio de la frecuencia y los resultados producidos son soluciones de régimen permanente, además es posible calcular las soluciones estables e inestables del sistema.

Aproximando el flujo por medio de una serie de Fourier truncada e implementando numéricamente en Matlab el método de Galerkin junto con el método de continuación por pseudo-longitud de arco fue posible trazar los diagramas de bifurcación para distintos valores paramétricos del sistema a fin de proporcionar márgenes de operación segura para los operarios de redes eléctricas.

Así también fue posible contrastar los resultados obtenidos con los presentados por simulación numérica directa a través de la resolución del sistema dinámico, donde se ha demostrado que la influencia de armónicas mayores a 15 pueden ser despreciadas en el análisis lo cual reditúa en gráficas bastante próximas con un gran ahorro de costo computacional.

Palabras Claves - Ferresonancia, Diagramas de bifurcación, Método de continuación.