

**IMPLEMENTACIÓN Y EVALUACIÓN DE *PLANE MIXING LAYER* Y *LID DRIVEN CAVITY* CON SOFTWARE OASIS DE FENICS**



**JORGE LUIS MAIDANA MONTIEL**

**TESIS**

Presentada a la Universidad Nacional de Asunción  
como requisito para la obtención del grado de  
**LICENCIADO EN CIENCIAS INFORMÁTICAS.**

San Lorenzo-Paraguay

28 de diciembre de 2015

**IMPLEMENTACIÓN Y EVALUACIÓN DE *PLANE MIXING LAYER* Y *LID DRIVEN CAVITY* CON SOFTWARE OASIS DE FENICS**

**JORGE LUIS MAIDANA MONTIEL**

Orientadores:

- Prof. **HYUN HO SHIN**
- Prof. **CHRISTIAN SCHAEERER**

Tesis presentada a la Universidad Nacional de Asunción  
como requisito para la obtención del grado de  
**LICENCIADO EN CIENCIAS INFORMÁTICAS.**

San Lorenzo-Paraguay

28 de diciembre de 2015

Maidana Montiel, Jorge Luis  
Implementación y evaluación de *Plane Mixing Layer* y  
*Lid Driven Cavity*  
con software Oasis de FEniCS  
/ Jorge Luis Maidana Montiel, orientadores Hyun Ho Shin,  
Christian Schaerer–San Lorenzo: FPUNA, 2015.  
x, 51 h.:il.; 30 cm  
Tesis de Grado (Licenciatura en Ciencias Informáticas  
con Énfasis en Programación de Computadoras) –  
Facultad Politécnica, UNA, 2015.  
1-Simulación por computadoras digitales.  
2. Ecuaciones de Navier-Stokes. I. Shin, Hyun Ho.  
II. Schaerer, Christian. III-Título

SCDD 511.8  
M28i

**IMPLEMENTACIÓN Y EVALUACIÓN DE *PLANE MIXING LAYER* Y *LID DRIVEN CAVITY* CON SOFTWARE OASIS DE FENICS**

**JORGE LUIS MAIDANA MONTIEL**

APROBADO EL 28 DE DICIEMBRE DE 2015

Orientadores:

.....  
Prof. **HYUN HO SHIN**

.....  
Prof. **CHRISTIAN SCHAERER**

*Dedicado a mi madre y padre*

# AGRADECIMIENTOS

*A Hyun Ho Shin*, por su extensa colaboración durante todo el proceso de elaboración de este trabajo,

*A Christian Schaerer* por su colaboración y sus consejos.

*A Waldemar Villamayor-Venialbo*, quien ayudó a mi iniciación científica,

*A Christian Cappelletti*, por facilitarme las instalaciones del clúster de computadoras del Laboratorio de Computación Científica y Aplicada.

## IMPLEMENTACIÓN Y EVALUACIÓN DE *PLANE MIXING LAYER* Y *LID DRIVEN CAVITY* CON SOFTWARE OASIS DE FENICS

Autor : Jorge Luis Maidana Montiel

Orientadores :

Prof. HYUN HO SHIN

Prof. CHRISTIAN SCHAEERER

**RESUMEN** En este trabajo se presenta la simulación computacional de dos fenómenos de interés de la dinámica de fluidos. *Plane Mixing Layer* que implica la mezcla y transporte de un escalar pasivo en capa de mezcla plana y *Lid Driven Cavity*. Las ecuaciones que modelan al flujo son las ecuaciones de continuidad y Navier-Stokes para flujos de fluidos incompresibles en ambos casos, y en particular una ecuación de conservación de transporte escalar pasivo con la aplicación de perturbaciones dependientes del tiempo en el caso de *plane mixing layer*. El test de independencia de malla es practicado en *Lid Driven Cavity* y los resultados se comparan con datos disponibles en la literatura. En *Plane Mixing Layer* se realiza un análisis cualitativo del paso del régimen laminar a turbulento de la mezcla de las dos capas. Las simulaciones son hechas con el software Oasis que es una aplicación de la librería FEniCS, escrita en lenguaje *python*. Se aprecia coincidencia en los resultados obtenidos en *Lid Driven Cavity* con los de la literatura, y se afirma que la solución es independiente de la malla. Se observa la inestabilidad de *Kelvin-Helmholtz* en *Plane Mixing Layer*, característica de este fenómeno. Se desencadena una perturbación artificial dependiente del tiempo, con una función extraída de la literatura, y se establece la necesidad de estudiar el fenómeno en el régimen turbulento.

*Palabras clave : Simulación computacional- Navier-Stokes-Plane mixing layer-Lid Driven Cavity-FEniCS Project-OASIS*

**IMPLEMENTING AND EVALUATING PLANE MIXING LAYER AND LID  
DRIVEN CAVITY PHENOMENA WITH OASIS SOFTWARE FROM  
FENICS**

Author : Jorge Luis Maidana Montiel

Advisers :

Prof. HYUN HO SHIN

Prof. CHRISTIAN SCHAERER

**SUMMARY**

In this work, the computational simulation of two phenomena most studied in fluid dynamics is performed : the Plane Mixing Layer which involves the transport and mixing of a passive scalar and Lid Driven Cavity. The fluid flow is modeled using the continuity and Navier-Stokes equations for both cases, and additional passive scalar transport equation for transport of a scalar in the plane mixing layer. The grid independence test is performed in lid driven cavity and the results obtained are compared with data available in the literature. Time-dependent perturbation is applied to the plane mixing layer, and a qualitative analysis of the transition from laminar to turbulent mixing layer is done. The simulations are performed using Oasis software which is an application of the FEniCS library, written in python. The solutions of the lid driven cavity is grid independent and good agreement in the comparison with the results from the literature is observed. In the plane mixing layer simulation, the instability of Kelvin-Helmholtz is observed using artificial time-dependent perturbation.

*Key words : Computational simulation- Navier-Stokes-Plane mixing layer-Lid Driven Cavity-FEniCS Project-OASIS*

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Objetivos . . . . .	4
1.1.1. Objetivo General . . . . .	4
1.1.2. Objetivos Específicos . . . . .	4
1.2. Estructura del Trabajo . . . . .	4
<b>2. Análisis de los Fenómenos Físicos</b>	<b>7</b>
2.1. Ecuaciones de Gobierno . . . . .	7
2.1.1. Ecuaciones de Navier-Stokes . . . . .	8
2.1.2. Ecuación de Transporte Escalar . . . . .	9
2.2. Condiciones de Frontera . . . . .	10
2.3. <i>Lid Driven Cavity</i> . . . . .	12
2.4. Flujos Libres . . . . .	13
2.5. Plane Mixing Layer . . . . .	15
2.5.1. Inestabilidad de Kelvin-Helmholtz . . . . .	16
2.5.2. Inestabilidad de <i>Kelvin-Helmholtz</i> en la Naturaleza . . . . .	17
2.5.3. Condiciones de la simulación de <i>Mixing Layer</i> temporal e inestable . . . . .	20
<b>3. Software Computacional</b>	<b>23</b>
3.1. Finite Elements Computational Software-FEniCS . . . . .	23

3.2.	Algoritmo de Pasos Fraccionados . . . . .	27
3.3.	Oasis . . . . .	28
<b>4.</b>	<b>Resultados y Discusión</b>	<b>30</b>
4.1.	Resultados de Lid Driven Cavity . . . . .	30
4.1.1.	Conclusiones . . . . .	31
4.2.	Casos estudiados en <i>Plane Mixing Layer</i> . . . . .	32
4.2.1.	Caso A . . . . .	32
4.2.2.	Caso B . . . . .	34
<b>5.</b>	<b>Recomendaciones y Trabajos Futuros</b>	<b>37</b>
5.1.	Conclusiones . . . . .	37
5.2.	Trabajos Futuros . . . . .	38

# Capítulo 1

## Introducción

Los diversos problemas de ingeniería que envuelven flujos de fluidos pueden ser analizados de forma analítica, experimental o numérica. Últimamente, se han estudiado extensamente modelos computacionales (numérica) para analizar los diferentes problemas de ingeniería [1, 2, 3, 4], debido a los grandes avances tecnológicos y en contrapartida no es posible tener soluciones analíticas [5], y los costos de montar los experimentos en general, son muy elevados [6].

La Dinámica de Fluidos Computacional (DFC) es el campo de estudio dedicado a solucionar ecuaciones del flujo de fluidos con una computadora. La simulación computacional tiene como principal ventaja la reducción del tiempo de desarrollo de proyectos que envuelven fenómenos físicos de la mecánica de fluidos, y en determinadas situaciones se lleva a cabo en conjunto con análisis experimentales, para obtener la idea completa del problema de ingeniería. Se podría, por ejemplo, optimizar el número de experimentos practicados, probando diferentes configuraciones de un modelo físico en el computador [6].

Dos problemas de interés en la DFC son, el llamado *Lid Driven Cavity* y el conocido como *Plane Mixing Layer* o Capa de Mezcla Plana.

El problema de *Lid Driven Cavity* supone una cavidad cuadrada llena de fluido sometida al deslizamiento de una tapa a velocidad constante en el borde superior

que constituye una interfaz líquido-sólido del problema.

Dicho fenómeno es ampliamente estudiado en la DFC, por la razón de que es reproducible con una geometría sencilla, y las condiciones de frontera aplicadas son fáciles de implementar en una computadora. Se establece como problema *benchmark*, base de comparaciones de la validez numérica del modelo computacional [7].

*Plane Mixing Layer* consiste en la interacción de dos flujos paralelos que se encuentran a diferentes velocidades. En *Plane Mixing Layer*, las inestabilidades en la interface entre los flujos paralelos con diferentes velocidades producen estructuras denominadas inestabilidad de Kelvin-Helmholtz, aumentando el transporte y mezcla de la cantidad de movimiento, calor y otros compuestos presentes en el flujo [8] que en este trabajo es representado por un escalar pasivo. Con ésta situación física es posible representar el proceso de mezcla y transporte de sustancias químicas entre dos flujos.

Se desea observar el proceso de transición del régimen laminar a turbulento mediante la aplicación de perturbaciones al flujo que son dependientes del tiempo [9], de manera a emular las inestabilidades inherentes de los flujos reales. La aplicación de perturbaciones, que en cierto modo son artificiales, es necesaria debido a que la simulación computacional carece de inestabilidades, que sin embargo sí se presentan en flujos reales.

Las ecuaciones que describen el flujo son las ecuaciones de Navier-Stokes y continuidad. En *Plane Mixing Layer* se tiene además la ecuación de conservación de un escalar pasivo, la cual representa la sustancia química transportada.

Existen varias herramientas de software que permiten la simulación numérica de flujos de fluidos. Entre ellas, algunos paquetes comerciales son ANSYS FLUENT [10] y Comsol [11], y las de software libre, como OpenFOAM [12] y FEniCS. [13].

FEniCS es un conjunto de librerías de software libre capaz de resolver automatizadamente problemas que involucren Ecuaciones Diferenciales Parciales

(EDP) y Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) . Constituye una herramienta científica capaz de trabajar con mallas computacionales, formulaciones variacionales de elementos finitos de EDO y PDE, y facilidades de álgebra lineal numérica [14].

Con FEniCS es posible la computación de geometrías complejas e irregulares lo que hace accesible la adaptación del código escrito a problemas más complejos, sin grandes cambios en el código [14].

Oasis (*Optimized And Stripped Solver*) es una librería escrita en lenguaje *python* que ofrece una interfaz a FEniCS con el fin de construir modelos de evaluación de flujos de fluidos que involucren las ecuaciones de Navier-Stokes.

Éste trabajo utilizará el simulador de flujo de fluidos Oasis para estudiar el *Lid Driven Cavity* y *Plane Mixing Layer*.

Por medio del Test de Independencia de Malla aplicado al problema de *Lid Driven Cavity* se comprueba la convergencia del método numérico utilizado en la librería Oasis.

Ésta prueba consiste en el refinamiento de las mallas hasta verificar la convergencia del resultado de la simulación. Además se comparan las soluciones con una solución experimental de la literatura. Omari [10] y Erturk [7] discuten soluciones al problema de Lid Driven Cavity en 2D, en moderados y altos números de Reynolds respectivamente.

En *Plane Mixing Layer* se analiza el paso del flujo del régimen laminar al turbulento y el transporte y mezcla de un escalar pasivo entre dos flujos. También un análisis cualitativo del resultado obtenido, de forma a compararlo con datos disponibles en el estado del arte. González [15] realizó la evaluación de la transición laminar-turbulento en Capa de Mezcla Plana mediante CBC.PDEsys de FEniCS.

## 1.1. Objetivos

### 1.1.1. Objetivo General

Realizar la simulación numérica de *Lid Driven Cavity* y *Plane Mixing Layer* en dos dimensiones, mediante el software Oasis del proyecto FEniCS.

### 1.1.2. Objetivos Específicos

#### **Lid Driven Cavity**

- Verificar la validez física de los resultados obtenidos mediante un análisis de independencia de malla.

#### **Plane Mixing Layer**

- Generar computacionalmente una inestabilidad para inducir artificialmente la transición del régimen laminar al turbulento del flujo de fluido y analizar el comportamiento de dicha transición con resultados disponibles en la literatura.
- Comparar la solución numérica con soluciones presentes en el estado del arte.

## 1.2. Estructura del Trabajo

Esta sección del escrito presenta en términos generales los problemas a ser abordados, introduce la terminología esencial de los fenómenos físicos a ser simulados, y establece las fundamentaciones para llevar a cabo el trabajo.

En el segundo capítulo se presenta el desarrollo del análisis de las situaciones físicas y se determina un esquema físico-matemático de los problemas, sus parámetros y condiciones, inteligible a la computadora.

En el tercer capítulo es desarrollado el concepto computacional necesario para implementar los problemas físicos, incluyendo el detalle del software utilizado y la metodología empleada por el mismo para solucionar las ecuaciones.

Los resultados, el análisis y la discusión del comportamiento de los fenómenos serán presentados en el Capítulo 4.

Finalmente en el último capítulo son establecidas las conclusiones y sugerencias de continuidad del trabajo.



# Capítulo 2

## Análisis de los Fenómenos Físicos

El primer paso con el fin de estudiar un problema físico de la Dinámica de Fluidos Computacional (DFC) es realizar un análisis de los tipos de flujo de fluidos a ser evaluados, con el fin de establecer un esquema físico-matemático que modele el fenómeno de interés.

El presente capítulo se enfoca en mostrar los modelos matemáticos que representan los fenómenos físicos a ser estudiados numéricamente, así como también sus parámetros y condiciones de frontera e iniciales.

Se especificarán en las secciones siguientes las condiciones físicas de *Plane Mixing Layer* y *Lid Driven Cavity*.

### 2.1. Ecuaciones de Gobierno

Para describir los flujos de fluidos matemáticamente, se consideran los siguientes principios de la física [16]:

- Conservación de Masa (Ecuación de Continuidad).
- Conservación de Momento (Segunda Ley de Newton).
- Conservación de Energía.

Una amplia variedad de flujos de fluidos cuyo comportamiento se desea predecir está representada por un conjunto de Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP) denominadas ecuaciones de Navier-Stokes [17].

Las ecuaciones de Navier-Stokes representan el balance de la cantidad de movimiento en el flujo de fluido. Las mismas, en conjunto con las ecuaciones de conservación de masa y de energía, brindan una predicción de las variables macroscópicas de interés, en aplicaciones de la física e ingeniería.

Las variables macroscópicas obtenidas con la solución numérica son las componentes del campo de velocidades y presión.

### 2.1.1. Ecuaciones de Navier-Stokes

Las ecuaciones de continuidad y de Navier-Stokes para flujo incompresible y bidimensional son :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \quad (2.2)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \quad (2.3)$$

donde, para fluido newtoniano, se cumple

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.4)$$

$$\tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.5)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.6)$$

Los términos envueltos son:  $p$  para la presión,  $\rho$  es la densidad,  $\mu$  representa la viscosidad dinámica,  $u$  es la componente del campo de la velocidades en el eje  $x$ ,  $v$  simboliza la componente del campo de velocidades en el eje  $y$ .

### 2.1.2. Ecuación de Transporte Escalar

En este trabajo es considerada una cantidad escalar pasiva denotada por  $\phi(x, y, t)$  que representa la concentración de una sustancia química o contaminante que es transportado en el flujo de fluido. La ecuación de Conservación del Escalar en 2D es [18]:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} = \Gamma \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) \quad (2.7)$$

En la ecuación (2.7) no existe término de generación ni de consumo por lo que se dice que el escalar se conserva. Además, se lo llama pasivo porque su valor no afecta a otras variables inherentes del flujo como la velocidad y la presión.

La cantidad  $\Gamma$  puede representar diversas propiedades del fluido dependiendo del escalar adoptado, y también puede relacionarse con la viscosidad cinemática ( $\nu/\rho$ ) para introducir parámetros adimensionales que modelan los flujos:

- Si el escalar considerado es temperatura,  $\Gamma$  representa la difusividad térmica denotada por  $\alpha$  y la relación  $\nu/\alpha$  es la razón entre la difusividad (viscosidad cinemática del fluido) de momentum y la térmica conocida por el nombre de número de Prandtl denotado por Pr.
- Si el escalar representa la concentración de una especie química,  $\Gamma$  es la difusividad de masa y la relación  $\nu/\Gamma$  es la razón entre la difusividad de momentum y de masa conocida por el nombre de número de Schmidt denotado por Sc.

La definición de las EDP no está completa sin las condiciones de frontera e iniciales, ni los parámetros.

Un parámetro muy utilizado en la Dinámica de Fluidos, es el número de Reynolds.

A continuación se hace una introducción a la terminología de las condiciones de frontera del flujo estudiado.

## 2.2. Condiciones de Frontera

En dos cálculos de la DFC diferentes, con las mismas ecuaciones diferenciales de movimiento, el mismo dominio computacional y la misma malla [17], el tipo de flujo se determina por las condiciones de frontera impuestas.

Las condiciones de frontera deben aplicarse con cuidado en *todas* las fronteras del dominio computacional. Son necesarias condiciones apropiadas para lograr una solución correcta de la DFC[17].

En la imagen 2.1 se puede apreciar un dominio computacional con las condiciones de frontera. Las condiciones de fronteras implementadas en el trabajo son

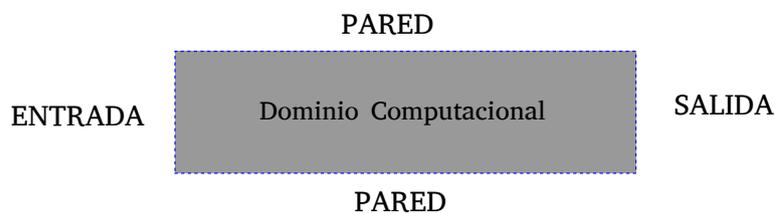


Figura 2.1: Esquema de las Condiciones de Frontera en un dominio computacional. Y. Cengel, 2006 [17].

las siguientes:

- **No-slip condition** o Condición de No Deslizamiento.

Se da en las fronteras sólidas o paredes. Puesto que el fluido no puede atravesar las paredes sólidas y considerando que no haya deslizamiento entre el fluido y la pared sólida la velocidad normal a la superficie  $U_n$  y la velocidad tangencial  $U_t$  con respecto a la pared es cero:

$$U_n = U_t = U_{wall}$$

- **Free Surface** o Simetría

En flujos libres a la atmósfera se da esta condición de frontera. Determina que la velocidad normal a la frontera sea cero y que el gradiente de la velocidad tangencial en dirección normal a la frontera y el de la concentración son nulos, es decir:

$$U_n = 0, \quad \frac{\partial U_t}{\partial x_n} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x_n} = 0$$

- **Inflow Boundaries** o Condición de Entrada.

Es la condición de frontera que corresponde a la entrada del dominio computacional. En la figura 2.1, se puede apreciar la entrada en la cara izquierda.

Se especifican los valores de frontera del dominio computacional:

$$U_i = U_{in}, \quad \phi = \phi_{in}$$

donde  $U_{in}$  y  $\phi_{in}$  son valores especificados.

- **Outflow Boundaries** o Condición de Salida

Se coloca el valor de la presión igual a cero en esta frontera:

$$P_{out} = 0$$

- **Condiciones Periódicas**

Se utilizan cuando la geometría del flujo es constante y el comportamiento del flujo se repite en la naturaleza. De esta manera se logra simular un fenómeno natural de geometría infinita en un dominio computacional finito, es decir:

$$U_{in} = U_{out}$$

$$\phi_{in} = \phi_{out}$$

### 2.3. Lid Driven Cavity

El *Lid Driven Cavity* consiste en una cavidad llena de líquido, cerrada en la cara superior por una tapa que es deslizada con velocidad constante. La geometría adoptada aquí es una cavidad cuadrada.

En la figura 2.11 se aprecian las condiciones de frontera del fenómeno de estudio, la cara superior con la velocidad  $u = 1, v = 0$ , las caras laterales y la inferior cuentan con valores  $u = 0, v = 0$  cada una. La flecha indica la dirección del movimiento de la tapa deslizante.

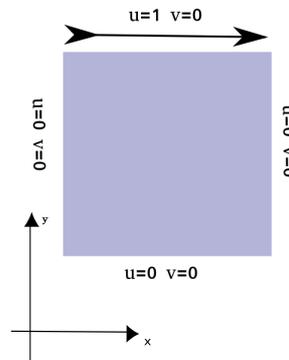


Figura 2.2: Cavidad de Tapa Deslizante (Lid Driven Cavity)

La razón que define el número de Reynolds para este caso de estudio, se puede expresar así:

$$Re = \frac{LU}{\nu}$$

El valor de Reynolds utilizado en este trabajo es  $Re = 1000$ , debido a que el valor del cuadrado de la geometría de la cavidad es unitario  $L = 1m$  (longitud característica), la velocidad característica posee el valor  $u = 1m/s$ , y la viscosidad cinemática  $\nu$  es igual a  $0,001m^2/s$

La presión es configurada a cero en la esquina superior derecha, para dar una referencia a la presión.

El elemento utilizado es el triangular de Taylor Hood (Q2 Q1) para la velocidad y la presión, con un polinomio de Lagrange de segundo orden para la velocidad y de primer orden para la presión, éste elemento satisface la condición de LBB, que garantiza la estabilidad de elementos mixtos. [19]

## 2.4. Flujos Libres

En la Dinámica de Fluidos existen los denominados flujos cortantes libres, o flujos libres de pared, en donde el flujo de fluido se encuentra lejos de la influencia de paredes sólidas.

Las representaciones más estudiadas incluyen a los chorros (jets), olas (waves) y capa de mezcla plana (plane mixing layer) [18], apreciadas en la figura 2.2.

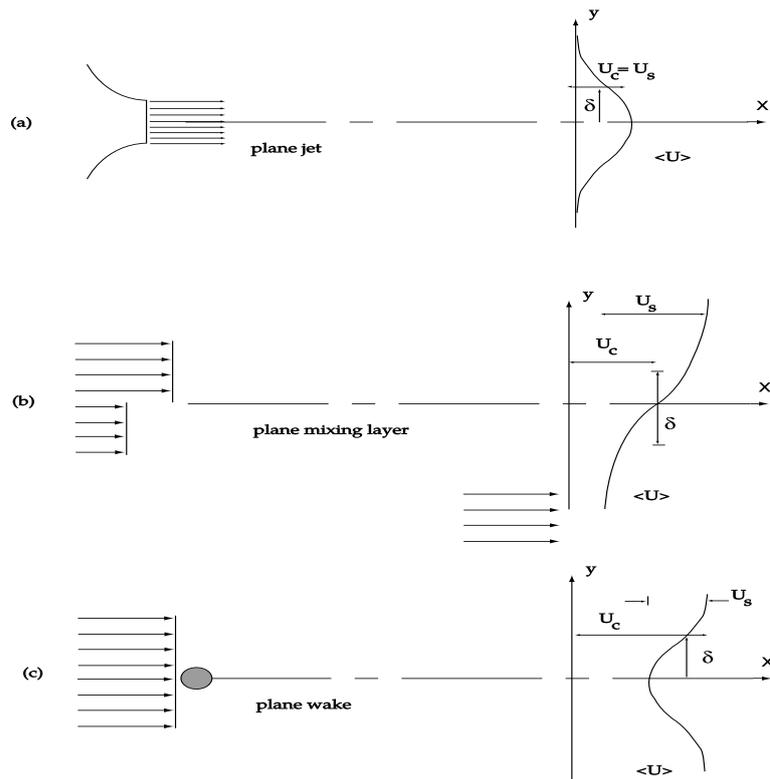


Figura 2.3: a) Chorros, b) Capa de Mezcla Plana, c) Oloros. Flujos Libres. S. Pope, 2000[18].

## 2.5. Plane Mixing Layer

El resultado de la interacción entre dos capas de flujo paralelas sometidas a diferentes velocidades o densidades es lo que se conoce como *plane mixing layer*, en la figura 2.3 se cumple,  $U_h$  y  $U_l$ , con  $U_h > U_l \geq 0$

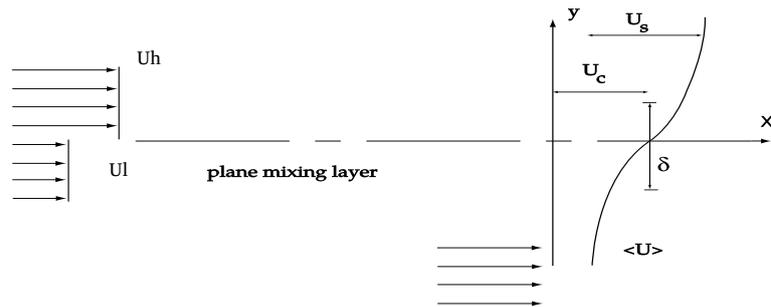


Figura 2.4: Representación esquemática de la Capa de Mezcla Plana. S. Pope, 2000[18].

La dirección dominante del flujo es en el eje  $x$ , y la coordenada del flujo transversal es el eje de las ordenadas. Las cantidades como la velocidad y la presión son independientes del eje  $z$  [18].

Debido a que existen dos capas de flujo con velocidades diferentes, el flujo depende del parámetro adimensional  $U_l/U_h$  y se puede definir una velocidad convectiva [18]:

$$U_c = \frac{1}{2}(U_h + U_l)$$

$$U_s = U_h - U_l$$

Todas las velocidades mencionadas ( $U_h, U_l, U_c$  y  $U_s$ ) son independientes del eje  $x$  [18].

### 2.5.1. Inestabilidad de Kelvin-Helmholtz

La inestabilidad es una característica esencial de los flujos turbulentos, no obstante flujos laminares con un número de Reynolds inferior a un  $Re_{cr}$  (Reynolds Crítico) son estables al ser sometidos a ciertas perturbaciones.

Si el flujo es susceptible a perturbaciones se pueden presentar variaciones en el comportamiento del mismo, esto puede ocurrir por un tiempo indefinido o un periodo finito, en este caso se dice que el flujo alcanza un nuevo estado de equilibrio [8].

La inestabilidad en la interfase entre dos flujos paralelos con diferentes velocidades se denomina inestabilidad de *Kelvin-Helmholtz* [8]. Dicha inestabilidad

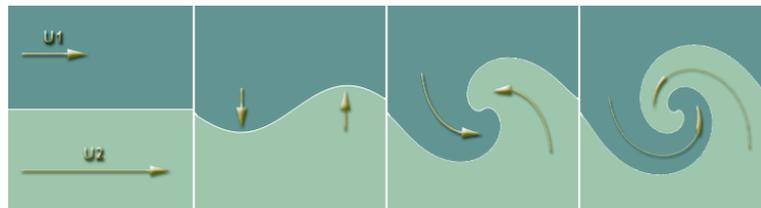


Figura 2.5: Representación esquemática de la inestabilidad de *Kelvin-Helmholtz*, Paperin, Cloud Structures, 2010.

está caracterizada por estructuras en forma de vórtices enrollados (roll-up) como se observa en la figura 2.4

El principal motivo para el estudio de flujos inestables es poder analizar el comportamiento de los mismos en transición de un estado laminar a turbulento, y consecuentemente poder determinar el momento en el cual transcurre este cambio. Para este efecto se aclara que la pérdida de estabilidad en un flujo no representa estrictamente el paso del estado laminar a turbulento, en el mejor de los casos esto es visto como el inicio del estado de transición [8].

La segunda motivación se debe a la importancia de la inestabilidad de *Kelvin-Helmholtz*, ya que esto mejora los procesos de transferencia de momento, calor y materia en el ambiente. Además, es utilizada en una variedad de geometrías para

problemas que implican la mezcla de sustancias en aplicaciones de ingeniería [8].

### 2.5.2. Inestabilidad de *Kelvin-Helmholtz* en la Naturaleza

La inestabilidad de *Kelvin-Helmholtz* posee un patrón característico presente en muchas regiones de la Tierra y el Sistema Solar. La siguiente galería de imágenes son estructuras nubosas en Océanos de la Tierra y en la Gran Mancha Roja de Júpiter:



Figura 2.6: El tamaño de la tormenta es de 3.5 veces el diámetro de la Tierra. Composición de fotografías tomadas entre enero y febrero de 1979, por la sonda Voyager 1. Goddard Space Flight Center, NASA



Figura 2.7: Inestabilidad de *Kelvin-Helmholtz*, Bureau of Ocean Energy Management, Dominio Público



Figura 2.8: Inestabilidad en el Océano Pacífico, Colección KHICS. Paperin, Cloud Structures, 2010.

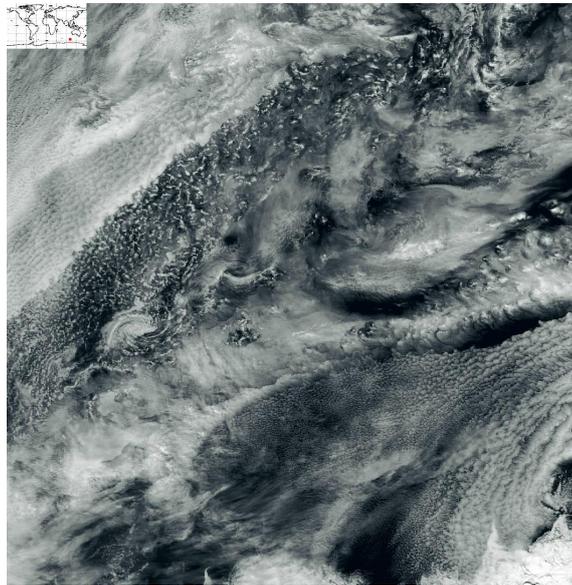


Figura 2.9: Inestabilidad en el Océano Índico, Colección KHICS. Paperin, Cloud Structures, 2010.

### 2.5.3. Condiciones de la simulación de *Mixing Layer* temporal e inestable

La situación considerada es la de mezcla de dos flujos laminares y paralelos en dos dimensiones. El problema se puede apreciar en la figura 2.9.

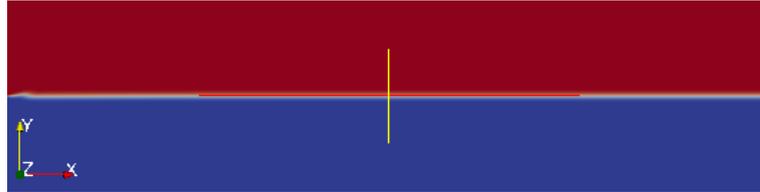


Figura 2.10: Estado Inicial de las Capas Paralelas de Flujo. Elaborado con Paraview

El dominio definido en el eje  $x$  es de  $0 \leq x \leq 100$  y en el eje  $y$  es  $-12,5 \leq y \leq 12,5$ . La malla en la figura 2.10, muestra la disposición de los elementos utilizados, un total de  $800 \times 200$  puntos.

El número de Reynolds utilizado es  $Re = 50$  el mínimo necesario para desenvolver una perturbación computacional como la aplicada en este trabajo.

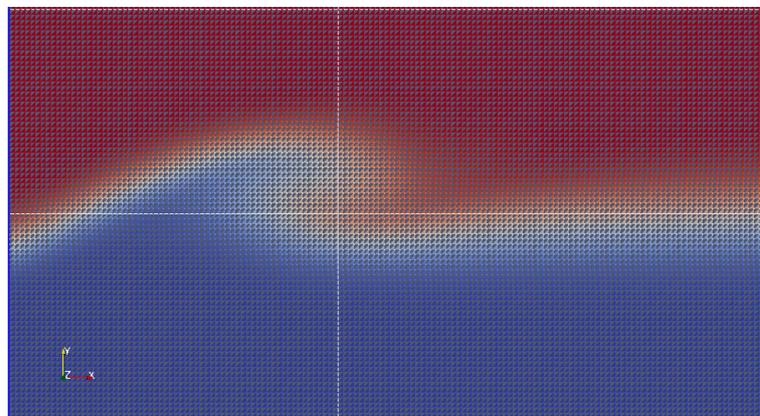


Figura 2.11: Acercamiento a una región de la malla de  $800 \times 200$  puntos. Elaborado con Paraview

Las velocidades  $U_h = 1,5$  y  $U_l = 0,5$  determinan el número de Reynolds,

dada la diferencia  $\Delta U = U_h - U_l$ .

El paso del tiempo utilizado en la simulación es de 0,025.

Como condición de entrada, la velocidad instantánea en la dirección  $x$  se descompone en una velocidad base con un perfil de tangente hiperbólico[20]:

$$U_{in} = 1 + 0,5 \tanh(y/0,15) \quad (2.8)$$

La fluctuación dada por una perturbación en forma de onda que varía con el tiempo, es [9]:

$$U_{in,p} = A_0 \sin(2\pi f_0 t) + A_1 \sin(2\pi f_1 t + \beta_1) + A_2 \sin(2\pi f_2 t + \beta_2) \quad (2.9)$$

La velocidad en la dirección  $y$  está definida exclusivamente por la perturbación (2.9). La condición inicial se determina con el tangente hiperbólico sin perturbación.

Los parámetros prescritos a la perturbación se detallan en la tabla 2.1,

Cuadro 2.1: Parámetros de función de perturbación

Amplitud Inicial	$0,5 U_c$
Relación de Amplitudes	$\alpha_1 = A_1/A_0; \alpha_2 = A_2/A_0$
Ángulos de Fase	$\beta_1, \beta_2 = 0 - \pi$
Frecuencias	$f_0 = F; f_1 = F/n; f_2 = F/n$
$F$	0,32
$n$	1,2,3...9

Además se define una función inicial para la cantidad escalar, como condición inicial y de frontera de entrada,

$$\phi_{in} = 0,5 \operatorname{erf}(y/0,0001) + 0,5 \quad (2.10)$$

La función coloca el valor 1 de concentración escalar, en la mitad superior del dominio, y 0 en la mitad inferior.

Las condiciones restantes son simetría para la velocidad y outlet o salida para la presión.

El elemento utilizado es el triangular de Taylor Hood (Q2 Q1) para la velocidad y la presión, con un polinomio de Lagrange de segundo orden para la velocidad y de primer orden para la presión, éste elemento satisface la condición de LBB, que garantiza la estabilidad de elementos mixtos[19].

## Capítulo 3

# Software Computacional

Debido a que el tipo de Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP) que modelan los fenómenos físicos de los problemas de ingeniería presentes en este trabajo carecen de solución analítica, se busca soluciones numéricas aproximadas. Para que dichas ecuaciones sean procesadas por una computadora, se necesita una forma que ésta entienda esas ecuaciones. Tal forma la constituyen los llamados métodos de discretización, que son implementados por cualquier software de la DFC.

El software OASIS a través de FEniCS obtiene facilidades que discretizan las ecuaciones del flujo de fluidos modelados con el denominado método de elementos finitos.

En el presente capítulo será detallada la estructura de operación de Oasis y FEniCS.

### 3.1. Finite Elements Computational Software-FEniCS

El proyecto FEniCS es un conjunto de librerías que se basa en el método de elementos finitos para automatizar la solución de ecuaciones diferenciales aplicadas a modelos matemáticos. El proyecto fue iniciado en la Universidad de Chicago

y el Instituto Tecnológico de Chalmers[14].

La principal interfaz de FEniCS es la librería DOLFIN que administra la comunicación entre los diferentes componentes de FEniCS y software externo. Además ofrece estructuras de datos y algoritmos para el cómputo de mallas y ensamblado de elementos finitos[14].

DOLFIN provee dos interfases de usuario. Una es implementada en una librería de C++ tradicional, y la otra es implementada en un módulo de Python. En la figura 3.1 se aprecia una aplicación implementada por encima de la interfaz de usuario de Dolfin, tanto en C++ como en Python. Las aplicaciones de usuario también pueden ser desarrolladas usando FEniCS Apps, una colección de solvers implementados por encima de FEniCS/DOLFIN[14].

La lista siguiente presenta a los principales componentes de FEniCS:

- **FIAT** (*FInite element Automatic Tabulator*) : es un módulo de python para la generación de funciones base para elementos finitos de orden arbitrario[21].
- **FFC** (*FEniCS Form Compiler*) : traduce las formulaciones variacionales de ecuaciones diferenciales parciales a códigos eficientes[22].
- **UFC** (*Unified Form-Assembly Code*) : interfaz de funciones para evaluar y ensamblar formas variacionales de elementos finitos.[23].
- **UFL** (*Unified Form Language*) : es una interfaz flexible para seleccionar espacios de elementos finitos y definir expresiones para las formulaciones variacionales en notación muy parecida a la matemática.[24].
- **Viper** : Componente de FEniCS destinado a la visualización instantánea de las mallas de elementos finitos y soluciones[14].

DOLFIN se encarga del manejo del conjunto de las librerías. En particular, las formas variacionales expresadas en lenguaje UFL son pasadas al compilador

FFC, o SFC para generar código UFC, cuyo resultado es posteriormente, usado por DOLFIN para ensamblar sistemas lineales [24, 22, 25, 23].

En el caso de FFC, la generación de éste código depende del componente *backend* de elementos finitos, FIAT, o de la utilidad de compilación *just in time Instant* y del optimizador opcional FErari[21].

La resolución de los sistemas lineales es hecha mediante la interfaz con una librería externa, como PETSc o Trinilos[14].

Finalmente, las capacidades de graficación provistas por DOLFIN son implementadas por Viper.

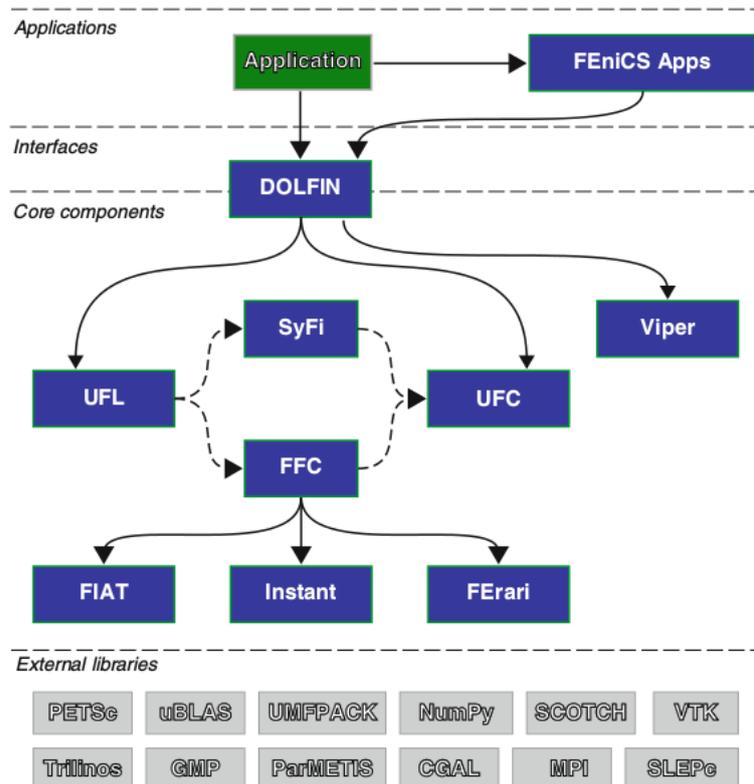


Figura 3.1: Esquema del Funcionamiento de FEniCS, A. Logg et al., Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method, Lecture Notes in Computational Science and Engineering 84[14]

## 3.2. Algoritmo de Pasos Fraccionados

La solución de las ecuaciones de Navier-Stokes se vuelve complicada por la falta de una ecuación independiente para la presión, cuyo gradiente contribuye a las ecuaciones de momento.

En flujos de fluidos compresibles, la presión es determinada por la ecuación de estado, y la ecuación de continuidad permite obtener la densidad.

Cuando el flujo de fluido es incompresible, la presión  $p$  no es una función de la densidad, que es constante, y la ecuación de estado no puede ser utilizada. Por lo tanto, en este tipo de fluidos,  $p$  no es función de las propiedades termodinámicas del fluido[6].

La única funcionalidad de la presión en un flujo de fluido incompresible es asegurar que el campo de velocidades satisfaga la ecuación de continuidad[6], y en cierto sentido es, una variable matemática antes que física del problema[26].

Un tipo de algoritmo que plantea resolver las ecuaciones de Navier-Stokes y obtener valores para la presión, son los algoritmos de *Pressure Correction* y el paso en el que esos algoritmos adquieren tales valores, se llama paso predictivo.

La estrategia de tales algoritmos, es resolver una ecuación de Poisson para la presión, que surge de la combinación de la ecuación de continuidad y las ecuaciones de momento, teniendo en cuenta siempre que el gradiente de presión debe garantizar que la divergencia del campo de velocidades sea cero.

Los algoritmos de pasos fraccionados, prescinden del paso predictivo, y dividen en pasos la resolución de la ecuaciones de Navier-Stokes.

En forma genérica, considérese el siguiente esquema simbólico de la ecuación de Navier Stokes, en la forma explícita de Euler:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + (C_i + D_i + P_i)\Delta t$$

donde  $C_i$ ,  $D_i$  y  $P_i$  representan los términos convectivo, difusivos y de presión, respectivamente.

Esta ecuación se puede dividir así:

$$\begin{aligned}u_i^* &= u_i^n + (C_i)\Delta t \\u_i^{**} &= u_i^* + (D_i)\Delta t \\u_i^{n+1} &= u_i^{**} + (P_i)\Delta t\end{aligned}$$

En este tercer paso,  $P_i$  es el gradiente de la cantidad que obedece una ecuación de Poisson. Esta cantidad debe ser elegida tal que la ecuación de continuidad sea satisfecha[26].

### 3.3. Oasis

Oasis (*Optimized And Stripped Solver*) es un solver de alto rendimiento de las ecuaciones de Navier-Stokes, escrito enteramente en la interfaz Python que posee FEniCS. El solver se utiliza con mallas no estructuradas, puede trabajar con la librería MPI, PETSc y Trilinos a través de FEniCS.

Para trabajar con Oasis, un usuario debería poseer habilidades básicas de como resolver Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP) a través de FEniCS y a su vez habilidades en lenguaje Python.

Oasis interactúa con FEniCS utilizando sus facilidades, y está construido por encima del mismo, en el esquema de la figura 3.1, es el equivalente a una aplicación FEniCS (*FEniCSApp*).

Oasis implementa un algoritmo de pasos fraccionados [27].

Los problemas de ingeniería del presente trabajo fueron codificados sobre la estructura de Oasis, que se puede apreciar en la figura 3.2.

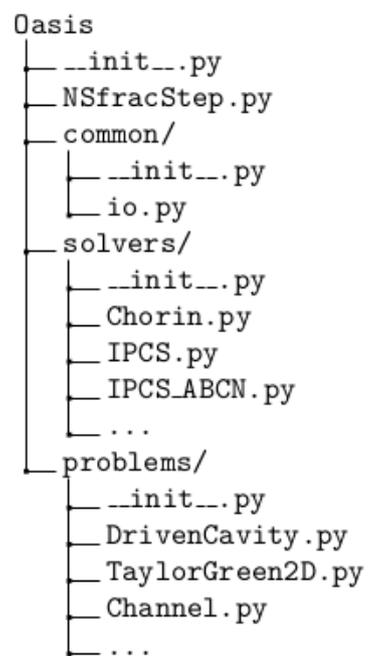


Figura 3.2: Árbol de directorios de Oasis

# Capítulo 4

## Resultados y Discusión

En este capítulo se presentan los resultados del Test de Independencia de Malla de *Lid Driven Cavity* y los casos simulados del *Plane Mixing Layer*. Primeramente es hecho un análisis cuantitativo del desarrollo del perfil de la velocidad del fluido en *Lid Driven Cavity*. Se muestra luego, un análisis cualitativo del desarrollo de vórtices para todos los casos de capa de mezcla plana estudiados. Para ambos casos se realizará una comparación con datos de la literatura.

### 4.1. Resultados de Lid Driven Cavity

Los resultados de la simulación para flujos incompresibles ( $Re=1000$ ) en una cavidad cuadrada, para las mallas  $10 \times 10$ ,  $15 \times 15$ ,  $25 \times 25$  en un tiempo utilizado de referencia ( $t=200$  s, ya en estado estacionario), son comparados con datos de la literatura para verificar la validez de la solución lograda en Oasis. En la figura 4.1 se aprecia el perfil de velocidades trazado desde una línea vertical que pasa por el centro geométrico de la cavidad. Como se puede ver, los datos concuerdan con los experimentos de la literatura, Ghia et al. [28] [10]

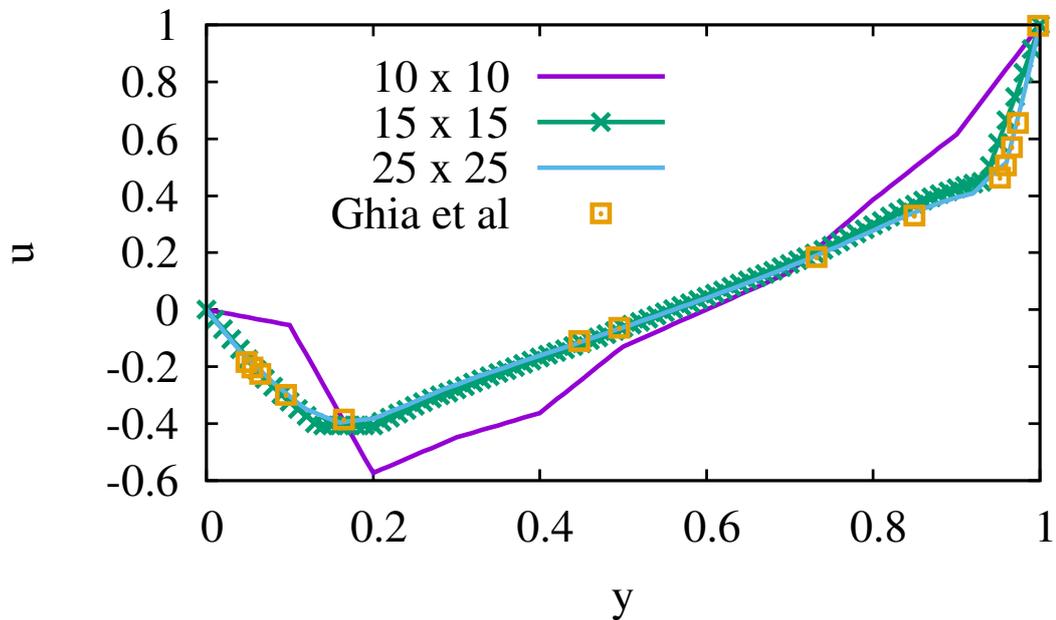


Figura 4.1: Comparación del perfil de velocidades trazado desde una línea vertical que pasa por el centro geométrico de la cavidad ( $x=0.5$ ) en ( $t=200$  s)

#### 4.1.1. Conclusiones

El Test de Independencia de Malla fue llevado a cabo en una cavidad cuadrada llena de líquido, cerrada con una tapa deslizable a velocidad constante. La comparación realizada con el perfil de velocidades trazado sobre una línea vertical, muestra la concordancia con los datos experimentales disponibles en la literatura, y ésto permite verificar la confiabilidad del código implementado en la herramienta Oasis. Además, dada la confiabilidad demostrada por la herramienta Oasis, es posible implementar otros fenómenos físicos como *mixing layer*, turbulencia en canal abierto, etcétera.

## 4.2. Casos estudiados en *Plane Mixing Layer*

Inoue [9] examinó numéricamente el desarrollo de los vórtices en capa de mezcla plana con un dominio espacial de  $0 \leq x \leq 500$  y  $-50 \leq y \leq 50$ , en los ejes  $x$  e  $y$  respectivamente.

Los resultados presentados corresponden a la aplicación de una función de perturbación, diferente en cada caso. Se observará el comportamiento de la cantidad escalar transportada en todos los casos.

### 4.2.1. Caso A

Para el caso presentado en la figura 4.1, la frecuencia y los ángulos de fase utilizados fueron:

$$F = F + F/2 + F/3 \quad \beta_1 = \pi/2, \beta_2 = 0$$

La relación de amplitudes es  $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 4$ . Dichos parámetros coinciden por los utilizados por Inoue[9].

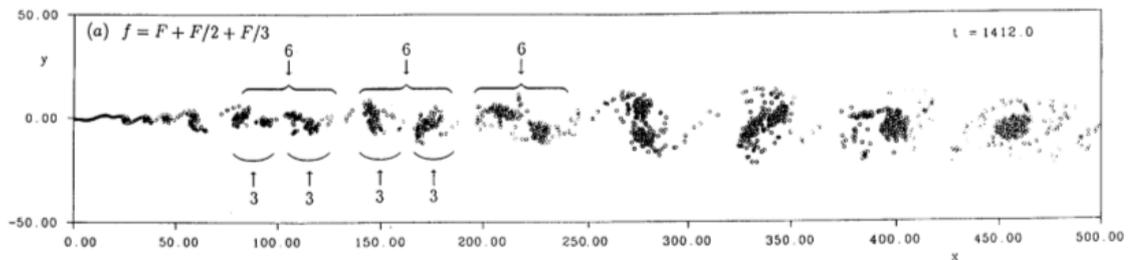


Figura 4.2: Desarrollo de Vórtices de [9] para  $F = F + F/2 + F/3$  y  $\beta_1 = \pi/2, \beta_2 = 0$

Alrededor de  $T = 10$  surge el primer vórtice. En  $T = 15$  aparece el segundo. En  $T = 25$  surge un tercero. En  $T = 35$  un cuarto hace aparición, y se puede observar los precedentes con mayor nitidez. En  $T = 45$  aparece el quinto vórtice,

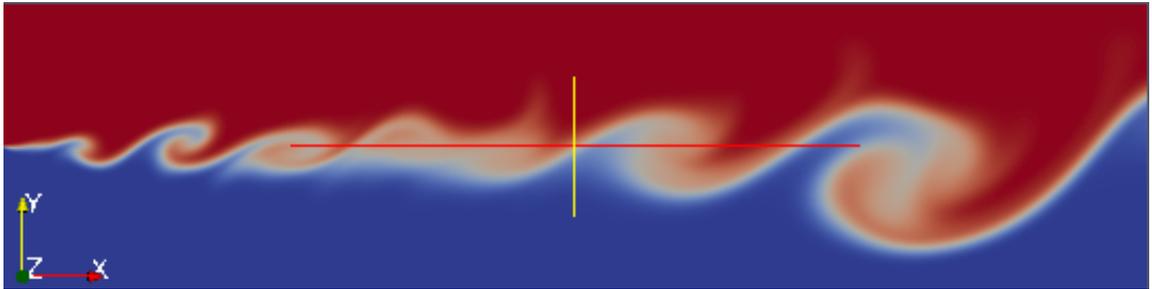


Figura 4.3: Cantidad escalar en forma adimensional en función al ancho del dominio  $\delta$  para  $F = F + F/2 + F/3$  y  $\beta_1 = \pi/2, \beta_2 = 0$ .  $T = 100[s]$ , Paraview.

y empieza a desvanecerse el segundo y el tercero. Cuando se presenta el sexto, en  $T = 55$  se hace más notable la desaparición del segundo y tercero, y en  $T = 62,5$  el segundo completó su transformación, mientras apenas quedan rastros del tercero y crece el primero.

En la aparición del séptimo vórtice, en  $T = 65$ , apenas son notables los rastros del cuarto, y el quinto vórtice en orden de aparición empieza a decrecer.

En  $T = 75$  se inicia la definición de la mezcla del tercer y cuarto vórtice, y forman un nuevo vórtice del tamaño del primero, que sigue creciendo.

El quinto y sexto vórtices en orden de aparición se mezclan e inician la definición de un nuevo vórtice en  $T = 80$ , como se puede apreciar en la figura 4.3. En  $T = 90$ , el nuevo vórtice surgido del quinto y sexto vórtices iniciales se hace más notable y el tercer nuevo vórtice surgido de una mezcla, es el producido por el séptimo y octavo vórtices, en  $T = 97,5$ .

Existe una similitud entre los vórtices obtenidos de la simulación con la estructura de la inestabilidad de *Kelvin-Helmholtz*, representada en la figura 2.5.

Se observa una relación entre el desarrollo de vórtices y el comportamiento de ellos entre este trabajo y el obtenido por Inoue, con éstos parámetros[9], la cantidad de vórtices encontrados y la mezcla de los mismos hasta la distancia de dominio  $x = 100$ .

Es necesario afirmar que el dominio espacial con el que fue realizada la simu-

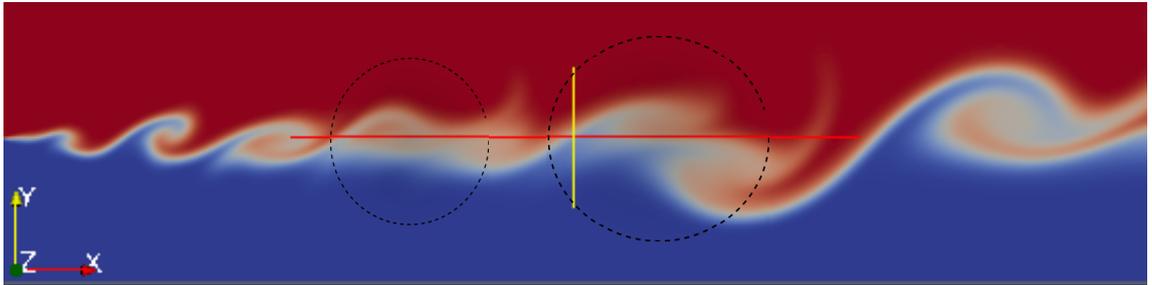


Figura 4.4: *Mezclas*. La marca más grande corresponde a la mezcla del tercer y cuarto vórtice, y la más pequeña del sexto y séptimo vórtices.  $T = 80[s]$ , Paraview.

lación del presente trabajo es inferior al dominio utilizado por Inoue [9]. En ese sentido se requiere mayor poder computacional con el fin de completar el dominio espacial de las simulaciones. Futuros trabajos deben encargarse de aumentar el dominio computacional en la simulación.

#### 4.2.2. Caso B

En el caso presentado en la figura 4.4 , la frecuencia y los ángulos de fase utilizados fueron:

$$F = F + F/2 + F/6 \quad \beta_1 = \pi/2, \beta_2 = 5 * \pi/6$$

La relación de amplitudes es  $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 4$ . Dichos parámetros coinciden por los utilizados por Inoue[9].

Se observa la aparición del primer vórtice pequeño en  $T = 5$ . Cuando  $T = 15$  aparece un segundo vórtice, en  $T = 20$  un tercero, y en  $T = 27,5$  se perfila la mezcla de el segundo y tercer vórtices pequeños, mientras aparece un cuarto vórtice, y en  $T = 35$  un quinto. Un sexto aparece en  $T = 42,5$ , y para  $T = 47,5$ , el cuarto, quinto y sexto forman un tercer vórtice grande, apreciable en la figura 4.5.

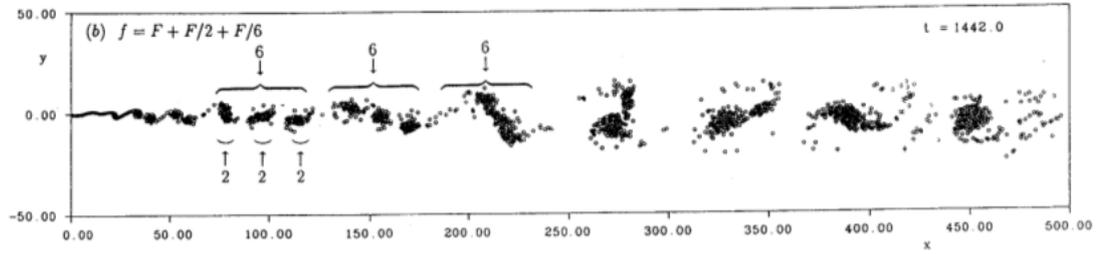


Figura 4.5: Desarrollo de Vórtices de [9] para  $F = F + F/2 + F/6$  y  $\beta_1 = \pi/2, \beta_2 = 5 * \pi/6$

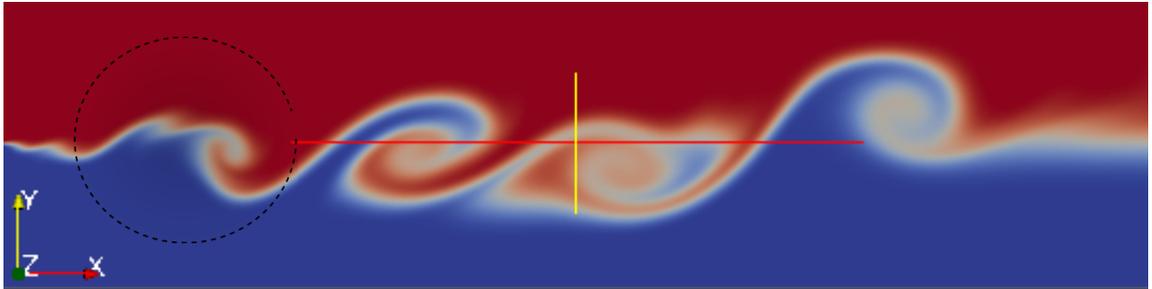


Figura 4.6: Cantidad escalar en forma dimensional en función al ancho del dominio  $\delta$  para  $F = F + F/2 + F/6$  y  $\beta_1 = \pi/2, \beta_2 = 5 * \pi/6$ .  $T = 67,5[s]$ , Paraview.

El séptimo y octavo vórtices pequeños, hacen su aparición en  $T = 50$  y  $T = 52,5$ , respectivamente,

Un noveno en  $T = 62,5$ , mientras que en  $T = 65$  se inicia la mezcla del séptimo y octavo, formando el cuarto vórtice grande. Aparece en  $T = 72,5$  el décimo pequeño, cuando en  $T = 80$  entra en escena el undécimo vórtice pequeño, el noveno, décimo y undécimo se unen para formar el quinto vórtice grande, mientras se empieza a desvanecer el segundo vórtice grande.

El numero 12 aparece en 87.5 y el 13 en 92.5 y en 100 ambos inician la formación de un vórtice mayor, pero antes en  $T = 90$  los grandes dos y tres, inician un vórtice aún mayor, que se aprecia en la figura 4.6.

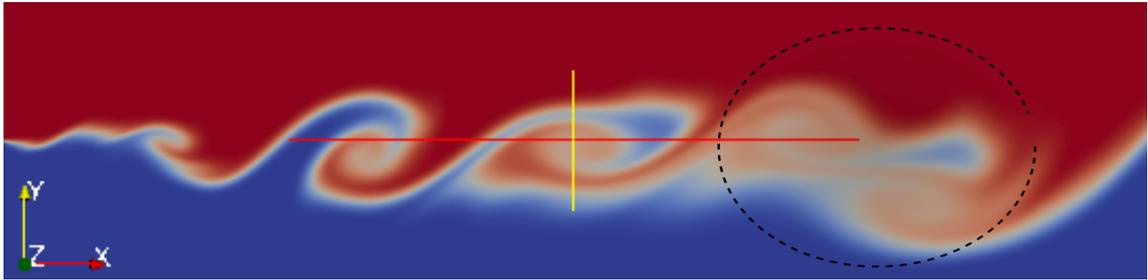


Figura 4.7: *Mezcla* Se observa que el desarrollo de la mezcla del segundo y tercer vórtices mayores formados, se unen para componer uno aún mayor.  $T = 100[s]$ , Paraview.

Nuevamente, se presenta una similitud entre los vórtices obtenidos de la simulación con la estructura de la inestabilidad de *Kelvin-Helmholtz*, representada en la figura 2.5.

También se observa una relación entre el desarrollo de vórtices y el comportamiento de ellos entre este trabajo y el obtenido por Inoue, con éstos parámetros[9], la cantidad de vórtices encontrados y la mezcla de los mismos hasta la distancia de dominio  $x = 100$ .

Se requiere un mayor dominio computacional para evaluar el desarrollo del proceso de mezcla, lo cual implica que la simulación debe ser planteada con mayor capacidad computacional con la disponible.

# Capítulo 5

## Recomendaciones y Trabajos Futuros

### 5.1. Conclusiones

- La comparación realizada con el perfil de velocidades trazado sobre una línea vertical, muestra la concordancia con los datos experimentales disponibles en la literatura, y esto permite verificar la confiabilidad del algoritmo implementado en la herramienta Oasis.
- No existe diferencia entre el Test de Independencia de Malla aplicado al sistema *Lid Driven Cavity* y datos experimentales de la literatura.
- La aplicación de perturbaciones en formas de onda de triple frecuencia permite generar inestabilidades artificiales que están presentes en los experimentos reales de *Plane Mixing Layer*.
- El modelo de *Plane Mixing Layer* permite la visualización de vórtices con estructura enrollada característica de la inestabilidad de *Kelvin-Helmholtz* en la transición del régimen laminar a turbulento, y el comportamiento concuerda con los datos del estado del arte.

## 5.2. Trabajos Futuros

- Implementar un modelo de turbulencia en *Plane Mixing Layer*
- Estudiar el efecto del cambio de fase en *Plane Mixing Layer*.
- Analizar la variación del comportamiento de *Plane Mixing Layer* con el cambio de relaciones de ángulos de fase.
- Aplicar los modelos a geometrías más complejas y utilizar valores de Reynolds más cercanos a los fenómenos reales.

# Bibliografía

- [1] G. Tryggvason, B. Bunner, A. Esmaeeli, D. Juric, N. Al-Rawahi, W. Tauber, J. Han, S. Nas, and Y-J. Jan. A front-tracking method for the computations of multiphase flow. *Journal of Computational Physics*, 169(2):708–759, 2001.
- [2] N. Nowak, P.P. Kakade, and A.V. Annapragada. Computational fluid dynamics simulation of airflow and aerosol deposition in human lungs. *Annals of biomedical engineering*, 31(4):374–390, 2003.
- [3] W. Wu, W. Rodi, and T. Wenka. 3d numerical modeling of flow and sediment transport in open channels. *Journal of Hydraulic Engineering*, 126, 2000.
- [4] M. Dufresne, J. Vazquez, A. Terfous, A. Ghenaïm, and J Poulet. Experimental investigation and cfd modelling of flow, sedimentation, and solids separation in a combined sewer detention tank. *Computers & Fluids*, 38(5):1042–1049, 2009.
- [5] D.F. Young, B.R. Munson, T.H. Okiishi, and W.W. Huebsch. *A Brief Introduction To Fluid Mechanics*. John Wiley & Sons, 2010.
- [6] A. de Oliveira Fortuna. *Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos: conceitos básicos e aplicações*. Edusp, 2000.
- [7] E. Erturk. Discussions on driven cavity flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 60(3):275–294, 2009.

- [8] P.K. Kundu, I.M. Cohen, and D.R. Dowling. *Fluid Mechanics*. Academic Press, 2012.
- [9] Osamu Inoue. Note on multiple-frequency forcing on mixing layers. *Fluid Dynamics Research*, 16(2-3):161, 1995.
- [10] R. Omari. Cfd simulations of lid driven cavity flow at moderate reynolds number. *European Scientific Journal*, 9(15), 2013.
- [11] COMSOL Multiphysics. Comsol inc. *Burlington, MA*, 2005.
- [12] H. Jasak, A. Jemcov, and Z. Tukovic. Openfoam: A c++ library for complex physics simulations. In *International workshop on coupled methods in numerical dynamics*, volume 1000, pages 1–20, 2007.
- [13] FEniCS. Proyecto fenics. <http://fenicsproject.org/about/>.
- [14] A. Logg, K.A. Mardal, and G. Wells. *Automated solution of differential equations by the finite element method: The FEniCS book*, volume 84. Springer Science & Business Media, 2012.
- [15] D. González. Evaluación de modelos de turbulencia en canal abierto y simulación transitoria de capa de mezcla plana con transporte escalar pasivo utilizando librerías fenics. Trabajo de Grado, UNA. 2014.
- [16] J.D. Anderson and J. Wendt. *Computational fluid dynamics*, volume 206. Springer, 2009.
- [17] Y. Cengel and J. Cimbala. *Fluid mechanics fundamentals and applications (in si units)*. 2006.
- [18] S.B. Pope. *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, 2000.
- [19] J. Donea and A. Huerta. *Finite element methods for flow problems*. John Wiley & Sons, 2003.

- [20] S. D. Mason and C. J. Rutland. Turbulent transport in spatially developing reacting shear layers. *Proceedings of the combustion institute*, 28(1):505–513, 2000.
- [21] R. C. Kirby. Algorithm 839: Fiat, a new paradigm for computing finite element basis functions. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 30(4):502–516, 2004.
- [22] A. Logg, B. Ølgaard K., M.E. Rognes, and G.N. Wells. *FFC: the FEniCS Form Compiler*, chapter 11. Springer, 2012.
- [23] M.S. Alnæs, A. Logg, and K.A Mardal. *UFC: a Finite Element Code Generation Interface*, chapter 16. Springer, 2012.
- [24] M. S. Alnæs. *UFL: a Finite Element Form Language*, chapter 17. Springer, 2012.
- [25] M. S. Alnæs and K.A. Mardal. *SyFi and SFC: Symbolic Finite Elements and Form Compilation*, chapter 15. Springer, 2012.
- [26] J.H. Ferziger and M. Peric. *Computational methods for fluid dynamics*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [27] M. Mortensen and K. Valen-Sendstad. Oasis: A high-level/high-performance open source navier-stokes solver. *Computer Physics Communications*, *Accepted not published yet*, 2014.
- [28] U.K.N.G. Ghia, K.N. Ghia, and CT Shin. High-re solutions for incompressible flow using the navier-stokes equations and a multigrid method. *Journal of computational physics*, 48(3):387–411, 1982.