UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN

Facultad de Ingeniería Ingeniería Electromecánica Ingeniería Electrónica



SIMULACIÓN 3D DEL TRANSITORIO TÉRMICO DE CIRCUITOS ELECTRÓNICOS Y CONTROL NO LINEAL DE TEMPERATURA POR MEDIO DE MÉTODOS VARIACIONALES

Carlos Antonio Galeano Ríos

Mauricio José Poletti Merlo

San Lorenzo, marzo del 2010

Consejo Directivo de la FIUNA

- Prof. Ing. Carlos Héctor Dellavedova Enrique (Decano)
- Prof. Ing. Isacio Vallejos Aquino (Vice-Decano)
- Prof. Ing. Fátima Bogado de Sarubbi (Docente)
- Prof. Ing. Alejandro Mass Metz (Docente)
- Prof. Ing. Roberto Arturo Nagy (Docente)
- Prof. Ing. Amilcar Troche (Docente)
- Prof. Ing. César Ricardo Sitjar (Docente)
- Prof. Ing. Higinio César Moreira (Docente C.S.U.)
- Ing. Juan González Enciso (No Docente)
- Ing. Pablo Rodríguez (No Docente)
- Est. Mauricio José Poletti Merlo (Estudiante)
- Est. Carlos Antonio Galeano Ríos (Estudiante)
- Est. Christian Eder Krause Fernández (Estudiante)

a nuestros padres, por brindarnos los valores que nos hacen quienes somos

y por el apoyo en esta y todas nuestras luchas

a los innumerables colaboradores que hicieron del día a día una aventura digna de

ser vivida

AGRADECIMIENTOS

a Christian Schaerer, por toda la ayuda y las hazañas convividas

a Horacio Feliciángeli, por su ayuda y su eterna buena predisposición

a Carlos Sauer, por toda la ayuda para salir adelante

a Hyun Ho Shin, por la ayuda con el texto y las enseñanzas compartidas

a Sandra Abegg, por la paciencia y ayuda con los gráficos

a los compañeros y amigos, que estuvieron de acuerdo con nosotros en que vale la pena

luchar por un tiempo mejor

AGRADECIMIENTOS INSTITUCIONALES

a la Facultad de Ingeniería de la UNA,

por el apoyo institucional y financiero para presentar este trabajo a nivel internacional (ver

Anexo)

a la Facultad Politécnica de la UNA,

por el apoyo institucional y por brindarnos la oportunidad de trabajar en el LCCA, así como

de presentar el trabajo allí (ver Anexo)

Abstract

We consider the optimal cooling of an electronic circuit plate, which is subject to internal heating sources. The constitutive equations are obtained by modeling the circuit as a parabolic partial differential equation. The properties of the materials (specific heat, density and conductivity), are constant by part over the space-time domain. Robin boundary conditions (control variable) are used to model the convective electromechanical cooler system. To simulate the transient period, the standard finite element method, and the backward Euler method are used for the spatial and temporal discretizations, respectively. This results in a large linear system (state equations) parameterized by the control variable where the unknown is the temperature of the circuit plate. To design a controller, we define a constrained minimization problem where a quadratic cost functional is associated to the state and control variables, and the restrictions are given by the state equations. This constrained minimization problem yields a large nonlinear system of equations in the state, control and dual variables. This nonlinear equations system is solved using a Newton-Rapson based method. The formulation of the optimality conditions, as well as the computation of the jacobian requieres the use of three-dimensional arrays and their special matrix algebra developed for this work. Comparisons between numerical results and experimental data found in the literature validate the methodology and numerical results show that the temperature in the circuit can be controlled effectively.

Resumen

Consideramos la refrigeración óptima de una placa de circuitos electrónicos que posee fuentes internas de calor. Las ecuaciones constitutivas son obtenidas modelando la conducción de calor por medio de una ecuación diferencial parcial parabólica. Las propiedades de los materiales (calor específico, densidad y conductividad), son constantes por partes en todo el dominio. Condiciones de frontera de Robin son utilizadas para modelar el sistema convectivo de refrigeración electromecánica. Para simular el transitorio térmico, el método estándar de elementos finitos y el método de Euler implícito son utilizados para las discretizaciones espacial y temporal respectivamente. Esto resulta en un sistema lineal de gran porte (ecuaciones de estado), parametrizado por la variable de control, en donde la incógnita es la temperatura de la placa. Para diseñar un controlador definimos un problema de minimización restricta, donde un funcional cuadrático de costo está asociado a las variables de control y de estado, y las restricciones son dadas por las ecuaciones de estado. Este problema de minimización restricta deviene en un sistema de ecuaciones no lineales en las variables de control, de estado y duales. Dicho sistema no lineal es resuelto utilizando un método basado en el de Newton-Rapson. La formulación de las condiciones de optimalidad así como el cómputo del jacobiano requiere el uso de arreglos tridimensionales y su álgebra especial de matrices, la cual fue desarrollada en el presente trabajo. Comparaciones entre los resultados numéricos y los datos experimentales encontrados en la literatura validan la metodología y los resultados numéricos muestran que la temperatura puede ser controlada efectivamente.

ÍNDICE DE CONTENIDO

Intro	oducción	7
1.1.	Un problema abierto en la ingeniería	8
1.2.	El futuro de las placas electrónicas	10
1.3.	Necesidades de simulación térmica	11
1.4.	El presente trabajo	11
	1.4.1. Metodología	12
	1.4.2. Simulación	14
	1.4.3. Control óptimo	15
	1.4.4. Originalidad y aportes	16
Mod	elado v Discretización del Sistema Térmico	19
21	Modelo físico del sistema térmico	20
22	Simplificaciones al modelo	22
23	Condiciones de frontera y formulación fuerte	22
2.0.	Formulación variacional	23
<u>د</u> . ד.		20
	Intro 1.1. 1.2. 1.3. 1.4. Mod 2.1. 2.2. 2.3. 2.4.	Introducción 1.1. Un problema abierto en la ingeniería 1.2. El futuro de las placas electrónicas 1.3. Necesidades de simulación térmica 1.4. El presente trabajo 1.4.1. Metodología 1.4.2. Simulación 1.4.3. Control óptimo 1.4.4. Originalidad y aportes 1.4.5. Simulación del Sistema Térmico 2.1. Modelo físico del sistema térmico 2.2. Simplificaciones al modelo 2.3. Condiciones de frontera y formulación fuerte 2.4. Formulación variacional

Universidad Nacional de Asunción Facultad de Ingenie Trabajo Final de Grado Ingeniería Electrónica y Electromecán SIMULACIÓN 3D DEL TRANSITORIO TÉRMICO DE CIRCUITOS ELECTRÓNICOS Y CONTROL NO LINEAL DE TEMPERATURA POR MEDIO DE MÉTODOS VARIACIONALE		geniería Iecánica IS Y NALES	
		2.4.2. Simplificación de la integral de superficie	26
	2.5.	Método de Galerkin	31
	2.6.	El método de Euler implícito	35
3.	Con	trol óptimo	41
	3.1.	El problema de control óptimo	42
	3.2.	El problema continuo	42
	3.3.	El problema discreto	43
	3.4.	Optimalidad	49
	3.5.	La matriz $\frac{\partial E}{\partial \hat{\mathbf{h}}}$	58
	3.6.	Método de resolución	60
4.	Imp	lementación	63
	4.1.	Método de los elementos finitos	64
		4.1.1. Elementos lineales	64
	4.2.	Matrices locales y globales	66
5.	Ехр	erimentación y resultados	68
	5.1.	Simulación a malla abierta	69
		5.1.1. Algoritmo de simulación	69
	5.2.	El modelo y sus simplificaciones	69
	5.3.	Discretización	72
	5.4.	El problema de control óptimo con frontera de Neumann	74
		5.4.1. Modelamiento con frontera de Neumann	74
		5.4.2. El problema de control óptimo	80

Un Tra	iversidad Nacional de Asunción Facultad de Ing abajo Final de Grado Ingeniería Electrónica y Electrom SIMULACIÓN 3D DEL TRANSITORIO TÉRMICO DE CIRCUITOS ELECTRÓNICO CONTROL NO LINEAL DE TEMPERATURA POR MEDIO DE MÉTODOS VARIACION	geniería ecánica S Y IALES
	5.4.3. Resultados numéricos	84 87
6.	Conclusiones y Trabajos Futuros	92
	6.1. Conclusiones	92
	6.2. Futuros desarrollos	92
Α.	Presentaciones de desarrollos parciales en congresos, seminarios y works- hops	94

B. Glosario

111

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1.	Causas de las fallas en circuitos electrónicos. Figura extraída de [3]	8
1.2.	Tiristores utilizados en tecnología HVDC en Nueva Zelanda (compañía Trans-	
	power). Figura extraída de [21] y [22].	9
1.3.	SCR para un rectificador trifásico de 500 MW y 500 KV (Inga-Shaba, ZAIRE).	
	Figura extraída de [23].	17
1.4.	Obleas utilizadas en la actualidad. Figura extraída de [2].	18
1.5.	SiP (System in Package). Figura extraída de [2].	18
2.1.	Problema de transmisión de calor. Figura de elaboración propia.	20
2.2.	Cuerpo Ω y subcuerpos Ω_k . Figura de elaboración propia	26
2.3.	Cuerpos Ω_k . Figura de elaboración propia.	27
2.4.	Cuerpos Ω_k y fronteras $\partial \Omega_1 \cap \partial \Omega_2$. Figura de elaboración propia	28
2.5.	Cuerpos Ω_k y fronteras $\partial \Omega_1 \cap \partial \Omega_2$. Figura de elaboración propia	28
2.6.	Cuerpo Ω y frontera $\partial \Omega$. Figura de elaboración propia	29
3.1.	Diagrama de bloques del controlador diseñado. Figura de elaboración propia.	42
3.2.	Matriz de la ecuación (3.51). Figura de elaboración propia.	53
3.3.	Producto de la ecuación (3.50). Figura de elaboración propia	54
3.4.	Producto de la ecuación (3.52). Figura de elaboración propia	55

3.5. Producto de la ecuación (3.53). Figura de elaboración propia.	56
3.6. Producto de la ecuación (3.52). Figura de elaboración propia	57
3.7. Producto de la ecuación (3.59). Figura de elaboración propia	60
4.1. Ejemplo de función sombrero restricta a un elemento. Figura de elaboración	
propia	65
4.2. Función sombrero restricta a dos elementos. Figura de elaboración propia.	65
5.1. Capas del circuito. Figura extraída de [1].	70
5.2. Capas del circuito simplificado. Figura extraída de [1].	71
5.3. Modelo del circuito. Figura de elaboración propia	72
5.4. Simulación (estado estable). Figura de elaboración propia.	73
5.5. Comparación con resultados de laboratorio. Figura de elaboración propia, a	
partir de figura extraída de [1].	74
5.6. Evolución temporal de los distintos puntos de la placa. Figura de elaboración	
propia	75
5.7. Resultados para distintos valores de r . Figura de elaboración propia	85
5.8. Temperatura en los distintos puntos de la placa. Figura de elaboración propia.	86
5.9. Flujo en las distintas caras de la placa. Figura de elaboración propia	86
5.10. Temperatura para distintos valores de $rac{r}{q}$. Figura de elaboración propia	89
5.11. Coeficiente de convección para $\frac{r}{q}$. Figura de elaboración propia	90
5.12. Valor del funcional en las iteraciones de Newton-Raphson. Figura de elabo-	
ración propia	91
A.1. Resumen sometido al SESEP.	96

Universidad Nacional de Asunción Trabajo Final de Grado SIMULACIÓN 3D DEL TRANSITORIO TÉRMICO DE CIRCUITOS ELECTRÓNICOS CONTROL NO LINEAL DE TEMPERATURA POR MEDIO DE MÉTODOS VARIACION.	geniería ecánica S Y ALES
A.2. Trabajo presentado en el SESEP	97
A.3. Trabajo presentado en el SESEP	98
A.4. Trabajo presentado en el SESEP	99
A.5. Trabajo presentado en el SESEP	00
A.6. Trabajo presentado en el SESEP	101
A.7. Trabajo presentado en el SESEP	102
A.8. Trabajo presentado en el SESEP	03
A.9. Trabajo presentado en el SESEP	104
A.10.Resumen sometido al Workshop de Energía y Medio Ambiente.	105
A.11.Póster presentado en el Workshop de Energía y Medio Ambiente 1	106
A.12.Resumen sometido al CNMAC 2009	107
A.13.Póster presentado en el CNMAC 2009.	108
A.14.Handout repartido en el CNMAC 2009	09
A.15.Handout repartido en el CNMAC 2009	110

CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN

Avances tecnológicos recientes permiten una mayor miniaturización de los equipos electrónicos y un incremento en la frecuencia de operación de los mismos. Desafortunadamente ambos factores han aumentado la densidad de potencia disipada. En consecuencia, problemas de refrigeración aparecen ahora incluso en las que aparentan ser aplicaciones de baja potencia. Por esta razón, cada vez más productos atraviesan en su proceso de diseño una simulación térmica. Esto a su vez induce la necesidad de tener modelos térmicos confiables y herramientas de simulación capaces de realizar análisis térmicos rápidos y precisos^a.

^aM. Janicki [1]

1.1. Un problema abierto en la ingeniería

El problema de la disipación de calor en circuitos continúa creciendo, y debido a las necesidades de compactación se espera que su importancia aumente considerablemente. Se prevé que las placas sean reemplazadas por elementos volumétricos [2]; este reemplazo conllevará la necesidad de una mejor medición del comportamiento térmico de acuerdo con la distribución tridimensional de los elementos volumétricos.

Mismo en la actualidad, en la época de las placas, ya podemos notar que el análisis térmico para el diseño de placas circuitales y la simulación del comportamiento térmico son de una importancia radical debido a la gran cantidad de fallas térmicas que ocurren. La abrumadora preponderancia de las fallas térmicas por sobre los otros tipos de fallas puede apreciarse en la Figura 1.1 (extraída de [3]).



Figura 1.1: Causas de las fallas en circuitos electrónicos. Figura extraída de [3].

Las herramientas de análisis y simulación son necesarias en las etapas de diseño de las placas y componentes, de manera a prevenir la ubicación poco favorable de componentes que puedan acarrear posteriores problemas en desempeño e incluso fallas.

La necesidad de simuladores que puedan probar el comportamiento térmico de los arre-

glos circuitales es debida a la imperatividad de la experimentación con las disposiciones que permitan reducir las regiones calientes. Para este fin, el uso de simuladores adecuados permite ahorrar tiempo y dinero que se emplearía en la construcción de prototipos de laboratorio.



Figura 1.2: Tiristores utilizados en tecnología HVDC en Nueva Zelanda (compañía Transpower). Figura extraída de [21] y [22].

Por otro lado, el comportamiento de los componentes electrónicos es obtenido de tablas y curvas trazadas para valores de temperaturas de trabajo, y la precisión que podamos esperar, con relación a las previsiones que hayamos hecho sobre el comportamiento eléctrico del cirucito, está supeditada a que el trabajo se realize en el rango de temperatura previsto para el uso del equipo. Esto es además de que el propio circuito se puede quemar y que el sobrecalentamiento degrada a los semiconductores. En pocas palabras, necesitamos que los equipos no se sobrecalienten, y además es deseable, por una cuestión de la precisión del comportamiento de los componentes, que los elementos circuitales trabajen cerca de la temperatura para la que fueron diseñados.

Otro aspecto a destacar es el hecho de que la energía consumida para refrigerar estos equipos puede ser importante, principalmente cuando hablamos de electrónica de potencia. Las Figuras 1.2 y 1.3 muestran el tamaño que estos equipos pueden alcanzar.

Resulta de interés entonces, optimizar la energía consumida en dicho proceso de refrigeración, y de cierta forma encontrar una solución de compromiso que pueda satisfacer las necesidades tanto de precisión del rango térmico de trabajo como de economía energética.

1.2. El futuro de las placas electrónicas

El ITRS (International Technology Roadmap for Semiconductors) es un documento elaborado por expertos de la industria de los semiconductores, con la intención de asesorar el desarrollo tecnológico de semiconductores.

El ITRS representa una opinión calificada para definir las direcciones de interés del avance de la investigación en el área de semiconductores; al menos, en lo que se estima para los 15 años siguientes a su publicación.

El ITRS se divide en temas que son tratados por grupos de expertos distintos. Entre los temas existentes, dos puntos de particular interés para el presente trabajo, son *"Assembly & Packaging"* (que trata la compactación de componentes y su disposición en equipos) y *"Modeling & Simulation"* (que menciona las necesidades de desarrollo de modelos y simulaciones para el futuro).

En relación al tema de "Assembly & Packaging" del ITRS 2007, se presenta lo que se

espera sea el futuro de las placas; pues, con la creciente miniaturización de los equipos, las pilas de placas que actualmente se utilizan (ver Figura 1.4, extraída de [2]), en donde las conexiones entre niveles se dan por conductores externos serán reemplazadas por elementos que integraran varios componentes conectados por caminos circuitales que recorreran el volumen, como se muestra en la Figura 1.5.

Los elementos que hemos mencionado, son llamados SiP (System in Package) y presentan ventajas con relación a los arreglos tipo oblea (Figura 1.4) pues permiten la integración rápida de diferentes funciones [2].

1.3. Necesidades de simulación térmica

Se requieren de modelos matemáticos y simulaciones que permitan obtener un mapa térmico completo para identificar los puntos calientes. Además se necesitan modelos tridimensionales que permitan reubicar las fuentes de calor de forma a optimizar termicamente el sistema. Estas características son deseadas con miras a un diseño que optimize la disposición de los componentes [4].

1.4. El presente trabajo

El presente trabajo consiste en el desarrollo de un método para realizar simulaciones que incorporen condiciones de frontera que disipen calor por medio de convección. Presentamos una formulación y un algoritmo de simulación que permiten mover las fuentes de calor, tanto en un plano como en dirección vertical, y que nos da como resultado un mapa de la evolución térmica del sistema, lo que permite ubicar los puntos calientes. Además se desarrolla un método de control óptimo para la refrigeración de circuitos que busca resolver el compromiso entre la proximidad a la temperatura óptima y el ahorro de energía.

1.4.1. Metodología

Estado del arte y antecedentes

Los equipos electrónicos y electromecánicos disponibles en la actualidad en la mayor parte de los casos son refrigerados con métodos convectivos. La simulación de los efectos de la ventilación y en general de la convección forzada para estos equipos es hecha por medio de ecuaciones diferenciales con condiciones convectivas de frontera.

En la actualidad, el área de optimización de fenómenos no lineales es un área de mucha investigación, y que requiere de una exploración exhaustiva y desarrollo de métodos de acuerdo a las necesidades de las aplicaciones de optimización.

Un antecedente fundamental para el presente trabajo es dado por el Trabajo Final de Grado del Ing. Carlos E. Sauer A. [5]. En dicha investigación, se presenta un método de simulación y control con modelos bidimensionales. El trabajo del Ing. Sauer propone como desarrollos futuros una serie estudios que son, en su totalidad, encarados en el presente trabajo (ver [5]).

Otro antecedente fundamental, para el presente trabajo es dado por las investigaciones llevadas a cabo por Marcin Janicki, Andrzj Napieralski y otros colaboradores [3], [1], [17], quienes han simulado la evolución térmica de circuitos electrónicos con métodos analíticos, basados en el desarrollo en serie de las soluciones de la ecuación de calor. Además, estos científicos han ensayado en laboratorio los circuitos que simularon, y publicaron sus

resultados. Dichos resultados nos han sido fundamentales para la validación del trabajo.

Objetivos generales

- Efectuar la simulación tridimensional del fenómeno de disipación de calor en circuitos electrónicos.
- Desarrollar un método de control numérico que sea utilizado en el control óptimo de la temperatura del circuito.

Objetivos específicos

- Desarrollar un software de simulación del transitorio térmico de circuitos electrónicos.
- Validar empíricamente el método de simulación del calentamiento de circuitos electrónicos desarrollado por medio de resultados de laboratorio obtenidos de la literatura.
- Desarrollar un método de control óptimo de temperatura con frontera de Neumann.
- Desarrollar un método de control óptimo de temperatura con frontera de Robin.
- Establecer técnicas matemáticas que permitan la resolución de los problemas no lineales asociados a la optimización encarada.

Alcance del trabajo

- Desarrollo de un método teórico-matemático para la simulación y el control óptimo de sistemas térmicos de frontera convectiva.
- Validación de los resultados obtenidos por los métodos teóricos desarrollados, por

medio de la simulación de casos específicos y su contraste con resultados laboratoriales.

 Determinación de las configuraciones óptimas teóricas de las condiciones de frontera para el control de temperatura del circuito.

Desarrollo del trabajo

Como ya se ha explicado, el trabajo consiste en el desarrollo y la validación de una metodología de simulación numérica de sistemas térmicos.

Una vez validada la metodología se plantea utilizar el simulador desarrollado como base para la optención de un optimizador no lineal que implemente control de frontera.

Todo el enfoque del trabajo es hecho desde un punto de vista variacional de los problemas, y se utilizarán elementos finitos en la discretización espacial, y el método de Euler implícito en la discretización temporal.

En las siguientes secciones se detalla mejor los desarrollos propios de cada parte del trabajo.

1.4.2. Simulación

El problema a resolver consiste en la simulación del campo temporal de temperatura de un cuerpo sólido sometido a fuentes de calor en su interior, y que disipa calor por medio de las condiciones convectivas de su frontera. Es decir, el método desarrollado permite llevar a cabo análisis térmicos de muchos sistemas, y en particular puede ser aplicado a equipos electrónicos, como se ha hecho en el presente trabajo.

Se implementan métodos variacionales para obtener soluciones aproximadas de la ecua-

ción diferencial (que modela la conducción de calor en el interior del sólido), tomando en cuenta las condiciones de frontera (que describen la convección de calor del sólido para el extrerior).

Obtenemos la versión discreta del problema de simulación aplicando el método de Galerkin, y dividiendo el dominio espacial en elementos finitos tetraédricos, a la par que se discretiza el tiempo en intervalos regulares. Las ventajas de la implementación de los métodos seleccionados son explicadas en detalle en [5].

El trabajo presenta comparaciones de los resultados numéricos con resultados de ensayos laboratoriales encontrados en la literatura consultada. Las comparaciones muestran que el modelo utilizado produce resultados que se ajustan a las lecturas laboratoriales.

1.4.3. Control óptimo

El presente trabajo desarrolla una estrategia de control de un sistema térmico por medio de las manipulación del coeficiente de convección h, que regula el intercambio de calor en una frontera de tipo convectiva. Esta condición introduce una alinealidad, pues la variable de control h es multiplicada por la variable de estado T (temperatura).

El control óptimo es implementado a partir de la formulación del problema de simulación, y a través del uso de un funcional cuadrático. Se presenta una estrategia que permite encontrar el mínimo restricto de este funcional, de manera a cumplir con las ecuaciones de estado en su forma discreta.

La imposición de las condiciones de optimalidad restricta son transformadas en condiciones de optimalidad irrestricta por medio de un lagrangiano, y estas últimas devienen en un sistema de ecuaciones no lineales que es resuelto con una modificación mínima del método de Newton-Raphson.

La implementación de las condiciones de optimalidad y del método de Newton-Raphson hacen necesario el uso de una generalización del concepto de jacobiano (generalización que se explica a profundidad en el capítulo 3), de tal suerte que se necesita del uso de arreglos tridimensionales para la resolución de los citados problemas. Los arreglos tridimensionales utilizados son multiplicados por arreglos bidimensionales para llegar a las ecuaciones no lineales, cuya solución finalmente provee el óptimo buscado.

1.4.4. Originalidad y aportes

El trabajo implementa condiciones muy realistas sobre el funcionamiento de los sistemas de refrigeración electromecánicos, y desarrolla métodos para resolver las alinealidades encontradas.

Es decir, el trabajo toma el desafío de implementar condiciones más complicadas de manejar, pero a la vez más realistas, que las más comúnmente usadas en resolución de problemas de control optimo de sistemas térmicos y tiene exito en construir un método válido y original para la implementación de las condiciones en cuestión.

En el proceso de resolver los problemas presentados, se utilizan generalizaciones del concepto de jacobiano y el de producto de matrices que el trabajo presenta para su uso. Se muestra y justifica el álgebra propia de las matrices tridimensionales utilizadas.

También se obtienen resultados positivos en la constrastación de los resultados de las simulaciones con pruebas de laboratorio y se consigue apreciar el funcionamiento del control implementado.

Figura 1.3: SCR para un rectificador trifásico de 500 MW y 500 KV (Inga-Shaba, ZAIRE).

Figura extraída de [23].



Figura 1.4: Obleas utilizadas en la actualidad. Figura extraída de [2].



Figura 1.5: SiP (System in Package). Figura extraída de [2].

CAPÍTULO 2

MODELADO Y DISCRETIZACIÓN DEL SISTEMA TÉRMICO

En este capítulo presentamos el problema térmico, en el mismo, se utilizan los modelos matemáticos (leyes físicas) que gobiernan las interacciones consideradas; y a partir de ellas obtenemos las ecuaciones de estado del sistema en su **formulación fuerte**. Partiendo de esta última, se plantea el problema en su **forma variacional** hasta llegar a la **formulación débil**. El método de Galerkin es implementado sobre la formulación débil, lo cual permite formular un **problema matricial**. Posteriormente, se utiliza el método de Euler implícito para obtener el **problema discretizado en el tiempo**.

El presente capítulo cierra con el sistema de ecuaciones de estado discretas, en forma matricial.

2.1. Modelo físico del sistema térmico

El sistema físico a modelar consiste en una placa sometida a fuentes internas de calor (componentes). Dicho sistema de componentes de estado sólido transmite calor en su interior por medio de la conducción, de acuerdo a la ley de Fourier [3]. Un esquema del problema puede ser apreciado en la Figura 2.1.



Figura 2.1: Problema de transmisión de calor. Figura de elaboración propia.

La citada ley establece que el calor transferido por unidad de área y de tiempo es proporcional al gradiente de temperatura.

$$q = -\lambda \nabla T \tag{2.1}$$

La ecuación (2.1) expresa la ley de Fourier, y en ella, q representa el flujo de calor por unidad de área, λ representa la constante de proporcionalidad (llamada conductividad térmica) y T la temperatura.

El modelo de la conducción de calor en sólidos se completa con la consideración del balance de energía para un volumen unitario. El balance es expresado por la ecuación (2.2)

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho e d\Omega = \int_{\partial \Omega} q d\Gamma + \int_{\Omega} f, \qquad (2.2)$$

donde, ρ es la densidad del cuerpo, e es la densidad de energía por unidad de volumen, q es el flujo de calor por unidad de área, Γ es la frontera del volumen considerado y f es el calor generado en el interior por unidad de volumen.

La ecuación de balance de energía establece, en pocas palabras, que el incremento de energía por unidad de volumen es dado por el flujo total de calor que entra al cuerpo, y por el calor total generado en el cuerpo.

La implementación coordinada de esta última condición, junto con la ley de Fourier desembocan en la ecuación

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + f, \qquad (2.3)$$

donde: ρ es la densidad, c_p es el calor específico a presión constante, T es la temperatura, t es el tiempo, λ es la conductividad térmica y f es la generación de calor por unidad de volumen. En este modelo además se desprecia el calor transferido por radiación, pues resulta de mucho menor importancia que las otras formas de transmisión involucradas. La deducción de la ecuación (2.3) puede ser encontrada en [6].

En otras palabras, el sistema térmico es modelado por medio de una ecuación diferencial parcial parabólica, deducida a partir de la ley de Fourier de la conducción de calor en sólidos y la conservación de la energía para una masa de control [6]. Esta ecuación es comúnmente denominada ecuación de calor.

2.2. Simplificaciones al modelo

En el contexto de este trabajo las siguientes consideraciones son tomadas:

- 1 Las propiedades físicas (ρ , c_p y λ) son consideradas constantes por partes tanto en el espacio como en el tiempo.
- 2 El término de fuente *f* también es supuesto constante por partes, o al menos aproximado por funciones constantes por partes.
- 3 Cada uno de los materiales que componen la placa es considerado isótropo, y si bien existe cierta anisotropía en las superficies de contacto entre dos materiales, esta es encarada con una condición de contacto perfecto entre las superficies en cuestión.

2.3. Condiciones de frontera y formulación fuerte

La condición de frontera modela la refrigeración por medio de la convección forzada (condiciones de Robin) de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial T}{\partial \eta} = -\frac{h}{\lambda} \left(T - T_{\infty} \right), \tag{2.4}$$

donde la *h* es el coeficiente de conveción. Esta ecuación representa la llamada ley de Newton de la transmisión de calor por convección [3].

Podemos entonces, formular el problema de la siguiente manera:

Problema 1, formulación fuerte

$$\begin{cases} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} &= \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + f \quad \text{en} \quad \Omega \times [t_0, t_f] \\ T(x, 0) &= T_0 \qquad \qquad \text{en} \quad \Omega \\ \frac{\partial T}{\partial \eta} &= -\frac{h}{\lambda} (T - T_\infty) \quad \text{en} \quad \partial \Omega \times [t_0, t_f]. \end{cases}$$

$$(2.5)$$

En la formulación (2.5) $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es el dominio espacial, y $[t_0, t_f]$ es el intervalo de tiempo de duración del transitorio estudiado.

2.4. Formulación variacional

El modelo presentado en el sistema de ecuaciones (2.5) es llamado formulación fuerte del problema; dicha formulación exige la obtención de soluciones de una suavidad importante, pues la ecuacion (2.5) nos exige que la función T tenga segunda derivada con respecto a la posición.

Una alternativa para la resolución consiste en la llamada formulación variacional del problema. Para ello definimos una transformación que para cada valor de t es un producto interno en L^2 , $\langle \cdot, \cdot \rangle : L^2(t_0, t_f, \Omega) \to L^2(t_0, t_f)$:

$$\langle f,g\rangle = \int_{\Omega} f g \, dx.$$
 (2.6)

Por simplicidad escribiremos $\int_{\Omega} f g$ en lugar de $\int_{\Omega} f g dx$.

La formulación variacional consiste en tomar la imagen por la transformación $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de ambos miembros de la ecuación (2.3) por funciones η llamadas funciones test o de prueba.

$$\langle \eta, \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \rangle = \langle \eta, \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + f \rangle$$
 (2.7)

Mauricio Poletti

Aplicando la transformación definida en (2.6) se obtiene

$$\int_{\Omega} \eta \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \int_{\Omega} \eta \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \int_{\Omega} \eta f.$$
(2.8)

La formulación variacional se basa en que una función T que satisfaga la formulación fuerte (2.5) verificará la ecuación (2.8) para todo $\eta \in L^2(t_0, t_f, \Omega)$. Así también, si existe una T, tal que toda función $\eta \in L^2(t_0, t_f, \Omega)$ satisface la ecuación (2.8) y si tiene suavidad suficiente (posee segunda derivada con respecto a la posición), entonces puede demostrarse que la función T satisface la ecuación (2.3) [6].

Luego, obtenemos la formulación variacional del problema.

Problema 2, formulación variacional

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \eta \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} &= \int_{\Omega} \eta \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \int_{\Omega} \eta f \quad \text{en} \quad \Omega \times [t_0, t_f] \quad \forall \eta \in L^2(t_0, t_f, \Omega) \\ T(x, 0) &= T_0 \qquad \qquad \text{en} \quad \Omega \\ \frac{\partial T}{\partial \eta} &= -\frac{h}{\lambda} \left(T - T_{\infty} \right) \qquad \qquad \text{en} \quad \partial \Omega \times [t_0, t_f] \,, \end{cases}$$

$$(2.9)$$

2.4.1. División del dominio en partes de propiedades físicas constantes

En esta sección demostraremos que la formulación variacional 2.9 es equivalente a

$$\int_{\Omega} \rho c_p \eta \frac{\partial T}{\partial t} = -\int_{\Omega} \lambda \nabla \eta \cdot \nabla T + \sum_k \lambda_k \oint_{\partial \Omega_k} \eta \partial_n T + \int_{\Omega} f \eta.$$
(2.10)

La ecuación (2.8) presenta integraciones espaciales; estas integraciones pueden calcularse por sectores en el dominio y posteriormente ser sumadas. Haciendo uso de nuestra hipótesis de constancia por partes de ρ , c_p , el tensor λ y el término de fuente f; dividimos la

integración en una cantidad finita de \hat{k} subdominios Ω_k ; en donde dichas propiedades físicas son constantes en el espacio. En otras palabras en el subdominio Ω_k las propiedades físicas serán ρ_k , c_{p_k} , el tensor λ_k y el término de fuente f_k constantes. Se obtiene así la ecuación

$$\sum_{k} \int_{\Omega_{k}} \rho_{k} c_{p_{k}} \eta \frac{\partial T}{\partial t} = \sum_{k} \int_{\Omega_{k}} \lambda_{k} \eta \nabla^{2} T + \sum_{k} \int_{\Omega_{k}} f_{k} \eta, \qquad (2.11)$$

y extrayendo los términos constantes de las respectivas integrales se obtiene

$$\sum_{k} \rho_k c_{p_k} \int_{\Omega_k} \eta \frac{\partial T}{\partial t} = \sum_{k} \lambda_k \int_{\Omega_k} \eta \nabla^2 T + \sum_{k} f_k \int_{\Omega_k} \eta, \qquad (2.12)$$

donde, por simplicidad, escribimos \sum_{k} en lugar de $\sum_{k=1}^{k}$, del mismo modo que fue hecho en la ecuación 2.10.

Aquí, recordamos que la primera identidad de Green [7]; es dada por:

$$\int_{\Omega} \phi \nabla^2 \varphi dV = -\int_{\Omega} \left(\nabla \varphi \cdot \nabla \phi \right) dV + \oint_{\partial \Omega} \phi \left(\nabla \varphi \cdot \mathbf{n} \right) dS.$$
(2.13)

Usando la expresión (2.13), (2.12) toma la forma:

$$\sum_{k} \rho_{k} c_{p_{k}} \int_{\Omega_{k}} \eta \frac{\partial T}{\partial t} = -\sum_{k} \lambda_{k} \int_{\Omega_{k}} \nabla \eta \cdot \nabla T + \sum_{k} \lambda_{k} \oint_{\partial \Omega_{k}} \eta \partial_{n} T + \sum_{k} f_{k} \int_{\Omega_{k}} \eta, \qquad (2.14)$$

donde $\partial_n T = \frac{\partial T}{\partial n}$ es la derivada en la dirección del vector normal saliente a la superficie.

Además, tomando en cuenta que

$$\sum_{k} \rho_k c_{p_k} \int_{\Omega_k} \eta_i \eta_j = \int_{\Omega} \rho c_p \eta_i \eta_j, \qquad (2.15)$$

$$\sum_{k} \lambda_k \int_{\Omega_k} \nabla \eta_i \cdot \nabla \eta_j = \int_{\Omega} \lambda \nabla \eta_i \cdot \nabla \eta_j, \qquad (2.16)$$

$$\sum_{l} h_l \int_{\partial_l} \eta_i \eta_j = \int_{\partial\Omega} h \eta_i \eta_j, \qquad (2.17)$$

la ecuación (2.14) puede escribirse

$$\int_{\Omega} \rho c_p \eta \frac{\partial T}{\partial t} = -\int_{\Omega} \lambda \nabla \eta \cdot \nabla T + \sum_k \lambda_k \oint_{\partial \Omega_k} \eta \partial_n T + \int_{\Omega} f \eta.$$
(2.18)

2.4.2. Simplificación de la integral de superficie

Nos detenemos ahora en el término

$$\sum_{k} \lambda_{k} \oint_{\partial \Omega_{k}} \eta \partial_{n} T, \qquad (2.19)$$

de la ecuación (2.18), el cual representa la suma de las integrales de superficie en los cuerpos Ω_k que componen el cuerpo Ω , trataremos de simplificar este término.

De forma a explicar la simplificación consideramos dos subdominios Ω_1 y Ω_2 , que se muestran en la Figura 2.2.



Figura 2.2: Cuerpo Ω y subcuerpos Ω_k . Figura de elaboración propia.

Nótese que se integra en la superficie exterior de cada subdominio Ω_k por separado y posteriormente se suman las integrales resultantes. La Figura 2.3 muestra las fronteras $\partial\Omega_1$ y $\partial\Omega_2$ de los cuerpos Ω_1 y Ω_2 en colores diferentes. Así también, se puede apreciar debido a la transparencia de uno de los cuerpos la frontera común a ambos cuerpos, a la que llamamos $\partial\Omega_{1,2}$.



Figura 2.3: Cuerpos Ω_k . Figura de elaboración propia.

Lema 2.4.1 Considerando que $\partial \Omega = \cup_k \partial \Omega_k / \partial \Omega_{1,2}$,

$$\sum_{k} \oint_{\partial \Omega_{k}} \eta \lambda_{k} \partial_{n} T \equiv \oint_{\partial \Omega} \eta \lambda_{k} \partial_{n} T.$$
(2.20)

Demostración :

En las caras en que existe contacto entre las partes de propiedades diferentes la expresión (2.20) integra dos veces, pues se está integrando la derivada normal en dos superficies diferentes (una en cada cuerpo que contacta), siendo que las normales salientes a las mismas son distintas y de hecho opuestas.

En la Figuras 2.4 y 2.5 puede notarse cuales son las superficies de integración, así también se puede apreciar que las superficies coloreadas (de verde) en realidad son una misma, pero se llevan a cabo dos integraciones en ella.

Llevando en cuenta la integración duplicada en las caras repetidas, podemos escribir

$$\sum_{k} \oint_{\partial \Omega_{k}} \lambda_{k} \eta \partial_{n} T = \int_{\bigcup_{k} \partial \Omega_{k} / \partial \Omega_{1} \cap \partial \Omega_{1}} \eta \lambda_{k} \partial_{n} T + \int_{\partial \Omega_{1} \cap \partial \Omega_{1}} \eta \lambda_{k} \partial_{n} T.$$
 (2.21)

Mauricio Poletti



Figura 2.4: Cuerpos Ω_k y fronteras $\partial \Omega_1 \cap \partial \Omega_2$. Figura de elaboración propia.



Figura 2.5: Cuerpos Ω_k y fronteras $\partial \Omega_1 \cap \partial \Omega_2$. Figura de elaboración propia.

Considerando $\partial \Omega_k$ a la frontera de Ω_k , definimos $\partial \Omega_{1,2} = \partial \Omega_1 \cap \partial \Omega_2$, y $\partial \Omega / \partial \Omega_{1,2}$, como el resto de las caras, de manera que

$$\cup_k \partial \Omega_k / \partial \Omega_1 \cap \Omega_2 = \partial \Omega, \tag{2.22}$$

como se ilustra en la Figura 2.2

Nótese que $\partial \Omega_{1,2}$ corresponde a las superficies de color verde de las Figuras 2.4 y 2.5,



Figura 2.6: Cuerpo Ω y frontera $\partial \Omega$. Figura de elaboración propia.

con sus respectivas normales.

Analizando ahora, el término

$$\int_{\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2} \eta \lambda_k \partial_n T,$$
(2.23)

de la ecuación (2.21), y llevando en cuenta la ley de Fourier de conducción de calor en sólidos obtenemos:

$$\lambda_k \partial_n T = -q, \tag{2.24}$$

donde q es el calor que sale de la superficie del cuerpo. Entonces, la expresión (2.23) puede ser escrita:

$$-\int_{\partial\Omega_1\cap\partial\Omega_2}\eta q.$$
 (2.25)

Debemos recordar que la integral de la expresión (2.25) integra dos veces en cada superficie; pues, por cada superficie de contacto existen dos cuerpos, y asumiendo contacto perfecto, el calor que sale de uno entra al otro. Descomponiendo la integral de la expresión (2.25) en una suma de integrales en las áreas de contacto entre cada par de cuerpos que
se tocan (por medio de un área), por cada superficie de contacto se tendrán dos términos iguales en valor y opuestos en signo, obteniéndose (2.26).

$$-\int_{\bigcup_k [\partial\Omega_k \cap (\partial\Omega)^c]} \eta q = \int_{\partial_{1,2}} \eta(-q) + \int_{\partial_{1,2}} \eta(q),$$
(2.26)

donde q es el calor que sale de un cuerpo (que equivale a decir que entra al otro), y -q es el que sale del otro. Naturalmente se tiene

$$-\int_{\partial_{1,2}} \eta q = \int_{\partial_{1,2}} \eta \left(q - q \right) = 0.$$
 (2.27)

Entonces, podemos escribir la ecuación (2.21) como

$$\sum_{k} \oint_{\partial \Omega_{k}} \lambda_{k} \eta \partial_{n} T = \int_{\partial \Omega} \eta \lambda \partial_{n} T + \underbrace{\int_{\partial_{1,2}} \eta \lambda \partial_{n} T}_{0}, \qquad (2.28)$$

es decir,

$$\sum_{k} \oint_{\partial \Omega_{k}} \lambda_{k} \eta \partial_{n} T = \oint_{\partial \Omega} \eta \lambda \partial_{n} T, \qquad (2.29)$$

Observación: La demostración del lema 2.4.1 puede ser fácilmente generalizada para una cantidad finita \hat{k} de cuerpos.

Utilizando el lema 2.4.1 y tomando en cuenta la última observación, podemos escribir

$$\int_{\Omega} \rho c_p \eta \frac{\partial T}{\partial t} = -\int_{\Omega} \lambda \nabla \eta \cdot \nabla T + \oint_{\partial \Omega} \lambda \eta \partial_n T + \int_{\Omega} f \eta.$$
(2.30)

Finalmente podemos expresar el problema en su formulación débil, obteniendo:

Problema 3, formulación débil

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \rho c_{p} \eta \frac{\partial T}{\partial t} &= -\int_{\Omega} \lambda \nabla \eta \cdot \nabla T + \oint_{\partial \Omega} \lambda \eta \partial_{n} T + \int_{\Omega} f \eta \quad \text{en} \quad \Omega \times [t_{0}, t_{f}] \quad \forall \eta \in L^{2}(\Omega) \\ T(x, 0) &= T_{0} \qquad \qquad \text{en} \quad \Omega \\ \frac{\partial T}{\partial \eta} &= -\frac{h}{\lambda} (T - T_{\infty}) \qquad \qquad \text{en} \quad \partial \Omega \times [t_{0}, t_{f}], \end{cases}$$

$$(2.31)$$

Considerando las condiciones de frontera del problema, dadas en (2.4), podemos reescribir la ecuación (2.30) de la forma

$$\int_{\Omega} \rho c_p \eta \frac{\partial T}{\partial t} = -\int_{\Omega} \lambda \nabla \eta \cdot \nabla T - \oint_{\partial \Omega} \eta h \left(T - T_{\infty} \right) + \int_{\Omega} f \eta;$$
(2.32)

2.5. Método de Galerkin

El método de Galerkin consiste en utilizar funciones test que pertenecen al mismo espacio que el de las funciones de búsqueda, y una aproximación del espacio de funciones de dimensión infinita $L^2(\Omega)$ por un espacio dimensión finita. Para tal efecto creamos un conjunto finito linealmente independiente de \hat{m} funciones test η_m . Consideramos que la solución T(x,t) de la ecuación 2.32 tiene la forma:

$$T(x,t) = \sum_{m=1}^{\hat{m}} z_m(t) \eta_m(x).$$
 (2.33)

Esta suposición implica que

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial \sum_{m} z_{m} \eta_{m}}{\partial t} = \sum_{m} \dot{z}_{m} \eta_{m}.$$
(2.34)

Substituyendo en las ecuaciones (2.33) y (2.34) en la (2.32) obtenemos:

$$\int_{\Omega} \rho c_p \eta_i \left(\sum_j \dot{z}_j \eta_j \right) = - \int_{\Omega} \lambda \nabla \eta_i \cdot \nabla \left(\sum_j z_j \eta_j \right) \dots$$

Mauricio Poletti

$$\dots - \int_{\partial_{\Omega}} h\eta_i \left(\sum_j z_j \eta_j\right) + T_{\infty} \int_{\partial_{\Omega}} h\eta_i + \int_{\Omega} f\eta_i.$$
(2.35)

La frontera dividimos \hat{l} elementos de frontera y tomamos la función h(x,t) constante en cada uno de estos elementos. Cuando usamos (2.34) en (2.35) como las integrales que se tienen son espaciales y que las z_j son funciones exclusivamente del tiempo (y consecuentemente lo son también las \dot{z}_j). Entonces, aplicando simultaneamente dos propiedades de la integral; extrayendo la sumatoria por un lado y por otro las funciones que no dependen de las variables de integración a partir de la ecuación (2.35), podemos obtener:

$$\sum_{j} \dot{z}_{j} \int_{\Omega} \rho c_{p} \eta_{i} \eta_{j} = -\sum_{j} z_{j} \int_{\Omega_{k}} \lambda \nabla \eta_{i} \cdot \nabla \eta_{j} \dots$$
$$\dots - \sum_{j} z_{j} \int_{\partial_{\Omega}} h \eta_{i} \eta_{j} + T_{\infty} \int_{\partial_{\Omega}} h \eta_{i} + \int_{\Omega} f \eta_{i}.$$
 (2.36)

así también, los dos últimos términos

$$T_{\infty} \int_{\partial_{\Omega}} h\eta_i + \int_{\Omega} f\eta_i, \qquad (2.37)$$

son independientes de z_j y de \dot{z}_j y pueden ser expresados como

$$T_{\infty} \int_{\partial \Omega} h \eta_i = T_{\infty} e_i \left(h \right) \tag{2.38}$$

y

$$\int_{\Omega} f\eta_i = b_i. \tag{2.39}$$

Es importante destacar ahora que el término $e_i(h)$ presentado en la ecuación (2.38), puede ser expresado como el producto de dos vectores d_i y h

$$\mathbf{d}_{\mathbf{i}} = \left[\begin{array}{ccc} \int_{\partial_1} \eta_i & \dots & \int_{\partial_l} \eta_i & \dots & \int_{\partial_{\hat{l}}} \eta_i \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{\hat{l}}$$
(2.40)

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_1 & \dots & h_l & \dots & h_{\hat{l}} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{\hat{l}}$$
(2.41)

$$e_i(h) = \mathbf{d_i}\mathbf{h}.\tag{2.42}$$

Luego de las últimas consideraciones podemos reescribir la ecuación (2.36) como sigue:

$$\sum_{j} \left(\int_{\Omega} \rho c_p \eta_i \eta_j \right) \dot{z}_j = -\sum_{j} \left(\int_{\Omega} \lambda \nabla \eta_i \cdot \nabla \eta_j \right) z_j - \sum_{j} \left(\int_{\partial \Omega} h \eta_i \eta_j \right) z_j + T_{\infty} e_i(h) + b_i,$$
(2.43)

En la ecuación (2.43) hemos formulado una de las ecuaciones que serán necesarias para resolver el problema variacional; en particular, la que se obtiene tomando el producto interno por la *i*-ésima funcion test. Luego, variando la funcion test, es decir, variando *i* desde 1 hasta \hat{m} , donde m es la dimensión del espacio de aproximación obtenemos un sistema de ecuaciones que puede ser representado en forma matricial, como se muestra a continuación:

Problema 4, problema matricial

Dados
$$\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{\hat{m}}$$
, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^{\hat{l}}$, $A \in \mathbb{R}^{\hat{m} \times \hat{m}}$, $B \in \mathbb{R}^{\hat{m} \times \hat{m}}$, $C(h) \in \mathbb{R}^{\hat{m} \times \hat{m}}$, $D \in \mathbb{R}^{\hat{m} \times \hat{l}}$ y $b \in \mathbb{R}^{\hat{m}}$

$$B\dot{\mathbf{z}} = -A\mathbf{z} - C(h)\mathbf{z} + T_{\infty}D\mathbf{h} + \mathbf{b}.$$
(2.44)

Las matrices utilizadas en la ecuación (2.44) son:

$$B = \left[\int_{\Omega} \rho c_p \eta_i \eta_j\right]_{ij} \in \mathbb{R}^{\hat{m} \times \hat{m}} \quad A = \left[\int_{\Omega} \lambda \nabla \eta_i \nabla \eta_j\right]_{ij} \in \mathbb{R}^{\hat{m} \times \hat{m}}$$
(2.45)

$$C = \left[\int_{\partial\Omega} h\eta_i \eta_j\right]_{ij} \in \mathbb{R}^{\hat{m} \times \hat{m}} \quad D = \left[\int_{\partial j} \eta_i\right]_{ij} \in \mathbb{R}^{\hat{m} \times \hat{l}}$$
(2.46)

Siguen unas observaciones con relación a las propiedades de las matrices de coeficientes *A*, *B*, *C* y *D* que pueden ser fácilmente probadas a partir del análisis de sus términos.

Una propiedad, que más adelante utilizaremos, es la dada cuando ρ , c_p , λ y h son funciones exclusivamente espaciales; pues entonces, la matriz B es una matriz de Gram,

pues la operación

$$\langle \eta_i, \eta_j \rangle = \int_{\Omega} \rho c_p \eta_i \eta_j$$
 (2.47)

define un funcional (real) bilineal simétrico y positivo definido (puesto que las funciones ρ y c_p) son estrictamente mayores que cero. En el caso de las matrices A y C, ocurre exactamente lo mismo, pero con las funciones $\nabla \eta$ y λ en el caso de A; y con las funciones η y las h en el caso de C. Es más, si las funciones cuyos productos internos están siendo considerados en las matrices de Gram [8] son linealmente independientes; entonces, cada matriz de Gram es en realidad una matriz de producto interno, en el espacio envolvente lineal (de los vectores en cuestión). En ese caso, A, B y C son positivas definidas.

En la ecuación (2.44) se ha hecho énfasis en el hecho de que la matriz C es función de h, pues esto es extremadamente importante para las posteriores consideraciones al realizar el control.

También es fundamental notar que los elementos de la matriz C pueden ser expresados como el producto de dos vectores, pues esto será de enorme utilidad más adelante. Entonces, podemos expresar cada elemento de la matriz C como:

$$C_{i,j} = \mathbf{m}_{i,j}\mathbf{h},\tag{2.48}$$

donde

$$\mathbf{m}_{\mathbf{i},\mathbf{j}} = \begin{bmatrix} \int_{\Gamma_1} \eta_i \eta_j & \cdots & \int_{\Gamma_l} \eta_i \eta_j & \cdots & \int_{\Gamma_l} \eta_i \eta_j \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\hat{l}}$$
(2.49)

y h es el vector ya definido en (2.41).

Por otro lado, la matriz *D*, vista en la ecuación (2.46) no es una matriz de producto interno, es más, no es necesariamente cuadrada. Lo que podemos notar de ella es que sus

filas están formada por los vectores d_i que fueron definidos en la ecuación (2.40), es decir,

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & \dots & d_i & \dots & d_{\hat{m}} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{\hat{m} \times \hat{l}}.$$
 (2.50)

En la ecuación (2.44) también aparecen los vectores

$$\dot{\mathbf{z}} = \left[\begin{array}{cccc} \dot{z}_1 & \dots & \dot{z}_j & \dots & \dot{z}_{\hat{m}} \end{array} \right]^T \in \mathbb{R}^{\hat{m}}, \tag{2.51}$$

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 & \dots & z_j & \dots & z_{\hat{m}} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{\hat{m}},$$
(2.52)

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_i & \dots & b_{\hat{m}} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{\hat{m}}$$
(2.53)

(con las b_i definidas en la ecuación (2.39)) y el vector h que ya fue definido en (2.41). Finalmente tenemos también la constante T_{∞} , que también puede ser vista como la matriz homotesia [8] de dimensión \hat{m} y norma usual T_{∞} .

2.6. El método de Euler implícito

Recordemos ahora, que en la ecuación (2.44) las matrices B, A, C y D dependen del tiempo, ya que las funciones ρ , c_p , λ y h son temporales. Lo mismo ocurre, por supuesto, con los vectores \dot{z} , z, h y b.

Entonces, al considerar (como ya lo habíamos mencionado), constantes por partes en el tiempo a las funciones ρ , c_p , λ , h y f y al aplicar el método de Euler implícito, podemos obtener para cada intervalo de tiempo en que dichas funciones se mantienen constantes las condiciones que mencionábamos anteriormente. Es decir, las funciones son exclusivamente espaciales y las matrices B, A y C en cada intervalo de tiempo son positivas definidas.

El método de Euler implícito [9] consiste en la aproximación de una función por medio

de la expresión

$$\varphi_n = \varphi_{n-1} + \tau_n \dot{\varphi}_n, \tag{2.54}$$

donde φ es la función que es aproximada y τ_n es el ancho del intervalo de tiempo $[t_n - 1, t_n]$.

Para la discretización temporal del problema se utiliza el método de Euler implícito con

 \hat{n} intervalos de tiempo de manera a discretizar la ecuación (2.44) obteniéndose:

$$B_n \left(\mathbf{z}_n - \mathbf{z}_{n-1} \right) = -\tau_n A_n \mathbf{z}_n - \tau_n C_n \mathbf{z}_n + \tau_n T_\infty D_n \mathbf{h}_n + \tau_n \mathbf{b}_n,$$
(2.55)

la cual es obtenida haciendo

$$\dot{\mathbf{z}}_n \approx \frac{\mathbf{z}_n - \mathbf{z}_{n-1}}{\tau_n}.$$
 (2.56)

En otras palabras, podemos obtener una ecuación de recurrencia a partir de la ecuación (2.55)

$$(B_n + \tau_n A_n + \tau_n C_n) \mathbf{z}_n - \tau_n T_\infty D_n \mathbf{h} = \tau_n \mathbf{b}_n + B_n \mathbf{z}_{n-1},$$
(2.57)

y así, como el valor inicial se supone conocido; cuando k = 1, z_1 puede ser calculada si se conoce h_1 . Naturalmente, a partir del valor z_1 y el h_2 , se puede calcular z_2 , y así por delante.

Los subíndices de tiempo asociados a las matrices de coeficientes de las ecuaciones (2.55) y (2.57), son debidos a que estas matrices están siendo calculadas con los valores de las constantes físicas y la fuente de calor en los instantes de tiempo indicados.

También se puede acoplar todos los tiempos en un solo sistema de ecuaciones, resultando el sistema que se muestra a continuación:

$$\left(\hat{B} + \hat{A} + \hat{C}\right)\hat{\mathbf{z}} + N\hat{\mathbf{h}} = \hat{\mathbf{f}},$$
(2.58)

donde:

En las matrices mostradas arriba, podemos destacar que cada bloque de la forma B_n , en la ecuación (2.59) es positivo definido, y que cada bloque de la forma $-B_n$ es negativo definido; por los motivos ya expuestos anteriormente con relación a la constancia temporal por parte de las propiedades físicas.

Del mismo modo, cada bloque de la forma $\tau_n A_n$, de la matriz \hat{A} , mostado en la ecuación (2.60) es postivo definido y por ende, la matriz \hat{A} es positiva definida. Lo mismo puede decirse de la matriz C, con relación a los bloques diagonales y la matriz toda.

Aprovechamos aqui, para aclarar que en el presente trabajo, la temperatura no perturbada (o del ambiente) T_{∞} se considera constante durante todo el tiempo de simulación. Sin embargo, esto no necesita ser de dicha manera; y de considerarse una aproximación con temperatura ambiente constante por partes, la formulación sería similar, con la unica diferencia efectiva de la aparición de $T_{\infty n}$ en vez de simplemente T_{∞} en la ecuación (2.62), con el índice correspondiente a cada bloque.

Siguiendo con las explicaciones de la ecuación (2.58) los vectores usados en ella se detallan a seguir,

$$\hat{\mathbf{h}} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1^T & \cdots & \mathbf{h}_n^T & \cdots & \mathbf{h}_{\hat{n}}^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{\hat{l} \cdot \hat{n}},$$
(2.63)

$$\hat{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1^T & \cdots & \mathbf{z}_n^T & \cdots & \mathbf{z}_{\hat{n}}^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{\hat{m} \cdot \hat{n}}$$
(2.64)

y

$$\hat{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} (\mathbf{b}_1 + B_1 \mathbf{z}_0)^T & \mathbf{b}_2^T & \cdots & \mathbf{b}_n^T & \cdots & \mathbf{b}_{\hat{n}}^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{\hat{m} \cdot \hat{n}}.$$
 (2.65)

Donde, podemos ver que lo que se hizo fue una concatenación de filas, un tiempo tras otro de los vectores h_n^T , z_n^T y b_n^T respectivamente; con la salvedad del primer vector en la concatenación de la ecuación (2.65), el cual incluye un factor que depende de la condición

inicial.

El sistema de ecuaciones (2.58) puede verse facilmente que equivale a la resolución tiempo a tiempo de la ecuación (2.57), basta desarrollar el producto de matrices por bloques.

En relación a la matriz \hat{C} se pueden hacer otras observaciones que serán de futuro provecho. Ya en la ecuaciíon (2.48) habíamos mostrado la forma de cada elemento de la matriz C, y habíamos expresado a cada elemento de la misma como el producto de dos vectores; donde el primer vector ($\mathbf{m}_{i,j}$), definido en (2.49), varía de elemento a elemento de la matriz C y el segundo vector (\mathbf{h}) es el mismo para todos los elementos de ella.

De forma similar a lo hecho en la ecuación (2.48), podemos expresar cada elemento de la matriz \hat{C} como el producto de dos vectores, y en dicho producto, variar solo el primer vector a medida que mudamos de elemento a elemento de la matriz, mientras el segundo se mantiene igual para todos los elementos.

Definimos entonces, el vector

$$\hat{\mathbf{m}}\mathbf{n}_{\mathbf{i},\mathbf{j}} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \mathbf{m}_{\mathbf{i},\mathbf{j}} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots \\ \hat{l} \times (n-1) \text{ ceros} & & \vdots \\ \hat{l} \times (\hat{n}-n) \text{ ceros} \end{bmatrix},$$
(2.66)

donde el índice n, indica en que bloque diagonal toma valor y los índices i y j indican el elemento de la submatriz C_n al que esta asociado este vector.

Entonces, cada elemento \hat{c} de la matriz \hat{C} se puede expresar como:

$$\hat{c} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \\ \hat{n} \times \hat{l} \text{ veces} \end{bmatrix}}_{\hat{n} \times \hat{l} \text{ veces}} \hat{\mathbf{h}} = 0$$
(2.67)

si el elemento no pertenece a ningún bloque diagonal C_n , y

$$\hat{c}_{\hat{m}\times(n-1)+i, \hat{m}\times(n-1)+j} = \hat{\mathbf{m}}\mathbf{n}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}\hat{\mathbf{h}}$$
(2.68)

si el elemento pertenece a algún bloque diagonal C_n (ocupando la posición i, j en dicho

bloque). Recordamos aqui que \hat{m} es el número de funciones test, y $\hat{\mathbf{h}}$ es el vector definido en (2.63).

Podemos entonces, definir

$$E = \hat{B} + \hat{A} + \hat{C}\left(\hat{\mathbf{h}}\right), \qquad (2.69)$$

para simplificar la expresión de la ecuación (2.58) y hacer más una vez énfasis en la dependecia funcional de la matriz \hat{C} del vector $\hat{\mathbf{h}}$, para así obtener el

Problema 5, problema discreto acoplado en el tiempo

$$E\left(\hat{\mathbf{h}}\right)\hat{\mathbf{z}} + N\hat{\mathbf{h}} = \hat{\mathbf{f}},\tag{2.70}$$

que representa la forma final discreta del problema de modelado del sistema térmico con las condiciones supuestas. Como puede verse fácilmente, dado el vector $\hat{\mathbf{h}}$ (que es lo mismo que decir, el valor de la función h para todos los puntos y todos los tiempos) el problema de simular la temperatura se reduce a la resolución de este sistema lineal.

Así también podemos notar fácilmente en que punto se encuentra la alinealidad generada al tratar a la función *h* como incógnita en el problema de control óptimo.

CAPÍTULO 3 CONTROL ÓPTIMO

En el presente capítulo se presenta la formulación del control óptimo, usando un funcional de costo que tiene por argumentos a funciones de L^2 . Utilizando las hipótesis simplificatorias presentadas en el Capítulo 2 escribimos el funcional en su forma matricial.

A partir del funcional, ya en forma matricial, y de la restricción establecida por la ecuación de estado, se define un lagrangiano. A este último se le imponen las condiciones necesarias de optimalidad KKT, obteniéndose un sistema de ecuaciones no lineales que es resuelto con una mínima modificación del método de Newton.

La imposición de las condiciones de optimalidad y el cálculo de los jacobianos involucrados, requieren el uso de una generalización del concepto de jacobiano y de arreglos tridimensionales y su producto por arreglos bidimensionales, el cual es descripto.

3.1. El problema de control óptimo

El problema de control óptimo consiste básicamente en encontrar una solución de compromiso entre la adecuada refrigeración de los circuitos y el ahorro de la energía consumida en el proceso de refrigerarlos.

Definimos entonces, un campo óptimo de temperatura T^* (función del tiempo y del espacio), que se desempeña como referencia a ser perseguida por el sistema. Esto establece un esquema de control que se muestra en la Figura 3.1.



Figura 3.1: Diagrama de bloques del controlador diseñado. Figura de elaboración propia.

Una vez definida nuestra temperatura óptima necesitamos cuantificar la distancia del campo obtenido al campo ideal (es decir, definir una norma del error). También es necesario cuantificar el costo de generar el control para seguir a dicho campo, es decir, también es necesaria una medida de la acción del controlador.

3.2. El problema continuo

Para controlar el sistema a través de la frontera de Robin la variable de control que utilizamos es el coeficiente de convección h y las restricciones para la optimización son dadas por la ecuación de estado (2.5). El problema es encarado diseñando un funcional

objetivo

$$J(T,h) = \frac{q}{2} \| T - T^* \|_{L^2(t_o, t_f, \Omega)}^2 + \frac{r}{2} \| h(x, t) \|_{L^2(t_o, t_f, \partial \Omega)}^2,$$
(3.1)

donde

$$\| f \|_{L^{2}(t_{o},t_{f},\Omega)}^{2} = \int_{t_{0}}^{t_{f}} \int_{\Omega} f^{2} dx dt$$
(3.2)

es una forma cuadrática [10] en el espacio $L^{2}\left(t_{0},t_{f},\Omega\right)$ y

$$\|h\|_{L^{2}\left(t_{o},t_{f},\partial\Omega\right)}^{2} = \int_{t_{0}}^{t_{f}} \int_{\partial\Omega} h^{2} dx dt$$
(3.3)

es una forma cuadrática en el espacio $L^2(t_0, t_f, \partial \Omega)$ y T^* es la temperatura objetivo o target.

3.3. El problema discreto

El problema discreto, desarrollado en el Capítulo 2, es expresado por:

$$E(\hat{\mathbf{h}})\hat{\mathbf{z}} + N\hat{\mathbf{h}} = \hat{\mathbf{f}}.$$
(3.4)

Al discretizar el problema (2.5) hasta llegar a (3.4), hemos considerado que el espacio de búsqueda tiene dimensión finita y las funciones en cuestión son constantes por partes en el espacio y tiempo. Estas suposiciones permiten transformar las expresiones definidas en las ecuaciones (3.2) y (3.3) a

$$\| f \|_{L^2(t_o, t_f, \Omega)}^2 = \mathbf{f}^T M \mathbf{f}$$
(3.5)

y

$$\|h\|_{L^{2}(t_{o},t_{f},\partial\Omega)}^{2} = \mathbf{h}^{T}G\mathbf{h},$$
(3.6)

donde M y G son matrices de producto interno cuya naturaleza se detalla a continuación.

Recordamos la aproximación en la ecuación (2.33) en la cual se separa la dependencia

temporal de la espacial

$$T = \sum_{m}^{\hat{m}} z_{m}\left(t\right) \eta_{m}\left(x\right),\tag{3.7}$$

y aproximando T^* del mismo modo, tenemos

$$T^{*} = \sum_{m}^{\hat{m}} z_{m}^{*}(t) \eta_{m}(x).$$
(3.8)

En consecuencia la expresión:

$$\|T - T^*\|_{L^2(t_o, t_f, \Omega)}^2 = \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} (T - T^*)^2 \, dx \, dt$$
(3.9)

puede ser escrita como

$$\|T - T^*\|_{L^2(t_o, t_f, \Omega)}^2 = \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} \left(\sum_j z_j(t) \eta_j(x) - \sum_j z_j^*(t) \eta_j(x)\right)^2 dx \, dt,$$
(3.10)

o bien

$$\|T - T^*\|_{L^2(t_o, t_f, \Omega)}^2 = \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} \left(\sum_j \left(z_j\left(t\right) - z_j^*\left(t\right)\right) \eta_j\left(x\right)\right)^2 dx \, dt,$$
(3.11)

donde, al explicitar el cuadrado se escribe

$$\|T - T^*\|_{L^2(t_o, t_f, \Omega)}^2 = \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} \left(\sum_i \left(z_i - z_i^*\right) \eta_i\right) \left(\sum_j \left(z_j - z_j^*\right) \eta_j\right) dx \, dt$$
(3.12)

y reordenando la sumatoria se tiene

$$\|T - T^*\|_{L^2(t_o, t_f, \Omega)}^2 = \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} \sum_i \sum_j \left(z_i - z_i^*\right) \left(z_j - z_j^*\right) \eta_j \eta_i \, dx \, dt.$$
(3.13)

En este punto podemos notar que debido a que los z_k y z_k^* dependen del tiempo y no de la posición podemos quitarlos fuera de la integral espacial, lo que da como resultado

$$\|T - T^*\|_{L^2(t_o, t_f, \Omega)}^2 = \int_{t_0}^{t_f} \sum_i \sum_j \left(z_i - z_i^*\right) \left(z_j - z_j^*\right) \left(\int_{\Omega} \eta_j \eta_i \, dx\right) dt,$$
(3.14)

Mauricio Poletti

Carlos Galeano

o equivalentemente

$$\|T - T^*\|_{L^2(t_o, t_f, \Omega)}^2 = \int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{z} - \mathbf{z}^*)^T B(\mathbf{z} - \mathbf{z}^*) dt,$$
(3.15)

donde *B* es la matriz definida en (2.45), z es el vector definido en (2.52) y z^* es dado por:

$$\mathbf{z}^{*} = \begin{bmatrix} z_{1}^{*} & \dots & z_{m}^{*} & \dots & z_{\hat{m}}^{*} \end{bmatrix}^{T} \in \mathbb{R}^{\hat{m} \cdot \hat{n}}.$$
 (3.16)

Utilizamos una segunda separación de variables, esta vez para h(x,t) obteniendo:

$$h(x,t) = \sum_{j=1}^{\hat{l}} h_j(t) \,\sigma_j(x),$$
(3.17)

donde:

$$\sigma_{l}(x) = \begin{cases} 1 & \operatorname{si} x \in \partial_{l}\Omega \\ 0 & \operatorname{si} x \notin \partial_{l}\Omega, \end{cases}$$
(3.18)

donde, la frontera del dominio espacial Ω es descompuesta en \hat{l} partes con coeficiente de convección *h* constante en cada parte (partes denotadas por $\partial_k \Omega$). Usando entonces, la ecuación 3.18 la forma cuadrática

$$\|h(x,t)\|_{L^{2}(t_{o},t_{f},\partial\Omega)}^{2} = \int_{t_{0}}^{t_{f}} \int_{\partial\Omega} h(x,t)^{2} dx dt$$
(3.19)

se convierte en

$$\|h(x,t)\|_{L^{2}(t_{o},t_{f},\partial\Omega)}^{2} = \int_{t_{0}}^{t_{f}} \int_{\partial\Omega} \sum_{i} h_{i}\sigma_{i} \sum_{j} h_{j}\sigma_{j} \, dx \, dt,$$
(3.20)

y utlizando la propiedad distributiva del producto respecto de la suma se tiene

$$\|h(x,t)\|_{L^{2}(t_{o},t_{f},\partial\Omega)}^{2} = \int_{t_{0}}^{t_{f}} \int_{\partial\Omega} \left(\sum_{i} \sum_{j} h_{i}h_{j}\sigma_{i}\sigma_{j}\right) dx dt.$$
(3.21)

Recordamos aquí que los h_l no dependen del espacio, entonces, pueden salir de la integral espacial; quedando así

$$\|h(x,t)\|_{L^{2}(t_{o},t_{f},\partial\Omega)}^{2} = \int_{t_{0}}^{t_{f}} \sum_{i} \sum_{j} h_{i}h_{j} \left(\int_{\partial\Omega} \sigma_{i}\sigma_{j} dx\right) dt.$$
 (3.22)

Mauricio Poletti

Ahora bien, la partición $\partial \Omega = \bigcup_l \partial_l \Omega$ es tal que $\partial_i \Omega \cap \partial_j \Omega$ tiene medida nula $\forall i \neq j$, lo que produce que

$$\int_{\partial\Omega} \sigma_i \sigma_j \, dx = \begin{cases} \int_{\partial_i} dS & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$
(3.23)

y por lo tanto resulta que

$$\| h(x,t) \|_{L^{2}(t_{o},t_{f},\partial\Omega)}^{2} = \int_{t_{0}}^{t_{f}} \mathbf{h}^{\mathbf{T}} Q \, \mathbf{h} \, dt, \qquad (3.24)$$

donde Q es una matriz diagonal y el vector h es el definido en la ecuación (2.41), que volvemos a mostrar aquí

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_1 & \dots & h_l & \dots & h_{\hat{l}} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{\hat{l}}$$
(3.25)

y la matriz Q es

$$Q = \begin{bmatrix} \int_{\partial_1} dS & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \int_{\partial_2} dS & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \int_{\partial_{\hat{l}}} dS \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\hat{l} \times \hat{l}}.$$
 (3.26)

Por lo tanto la matriz Q es una matriz diagonal de orden $\hat{l} \times \hat{l}$, recordando que \hat{l} es la cantidad de superficies con coeficente de convección constante. Cada elemento diagonal es justamente el área de cada una de las \hat{l} superficies en la frontera con coeficiente de convección constante. Consecuentemente el funcional queda:

$$J = \frac{q}{2} \int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{z} - \mathbf{z}^*)^T B (\mathbf{z} - \mathbf{z}^*) dt + \frac{r}{2} \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{h}^T Q \mathbf{h} dt.$$
 (3.27)

Aplicando las consideraciones ya hechas, por las cuales discretizamos el tiempo en un número finito \hat{n} de intervalos de tamaño τ , y considerando las funciones z, z* y h constantes

por intervalo de tiempo, escribimos la primera integral de la ecuación (3.27) de la siguiente manera,

$$\int_{t_0}^{t_f} \left(\mathbf{z} - \mathbf{z}^*\right)^T B \left(\mathbf{z} - \mathbf{z}^*\right) dt = \tau \sum_{n=1}^{\hat{n}} \left(\mathbf{z}_n - \mathbf{z}_n^*\right)^T B \left(\mathbf{z}_n - \mathbf{z}_n^*\right).$$
(3.28)

Expresando la sumatoria como un producto de matrices por medio del acoplado de los distintos tiempos obtenemos

$$\int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{z} - \mathbf{z}^*)^T \ B \ (\mathbf{z} - \mathbf{z}^*) \ dt = (\hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{z}}^*)^T \ M \ (\hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{z}}^*),$$
(3.29)

donde M es

$$M = \begin{bmatrix} \tau B & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tau B & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \tau B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\hat{m} \cdot \hat{n} \times \hat{m} \cdot \hat{n}},$$
(3.30)

 $\hat{\mathbf{z}}$ es el vector definido en (2.64) y análogamente el vector $\hat{\mathbf{z}}^*$ es definido como:

$$\hat{\mathbf{z}}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1^{*T} & \dots & \mathbf{z}_n^{*T} & \dots & \mathbf{z}_{\hat{n}}^{*T} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{\hat{m} \cdot \hat{n}}.$$
(3.31)

A su vez, la segunda integral de la ecuación (3.27) puede ser transformada en forma enteramente análoga a la hecha para obtener la ecuación (3.28) y así se obtiene

$$\int_{t_0}^{t_f} \mathbf{h}^T Q \, \mathbf{h} \, dt = \tau \sum_{n=1}^{\hat{n}} \mathbf{h}_n^T Q \, \mathbf{h}_n.$$
(3.32)

Donde la sumatoria es más una vez expresada como producto de matrices

$$\int_{t_0}^{t_f} \mathbf{h}^T Q \, \mathbf{h} \, dt = \hat{\mathbf{h}}^T G \, \hat{\mathbf{h}},\tag{3.33}$$

donde la matriz G es

$$G = \begin{bmatrix} \tau Q & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tau Q & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \tau Q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\hat{l} \cdot \hat{n} \times \hat{l} \cdot \hat{n}}$$
(3.34)

y el vector $\hat{\mathbf{h}}$ es el definido en (2.63).

Aquí se puede observar que las matrices M y G son matrices de Gram para los productos internos inducidos por las formas cuadráticas correspondientes a $\| \|_{L^2(t_o,t_f,\Omega)}^2$ y $\| \|_{L^2(t_o,t_f,\partial\Omega)}^2$ respectivamente. Remarcamos también el hecho de que si el conjunto de vectores que origina la matriz de Gram es linealmente independiente, entonces, dicha matriz es definida positiva [8].

Además, las funciones utilizadas son linealmente independientes, pues las primeras (o k-ésimas) \hat{m} funciones consideradas forman una base del espacio de aproximación de la parte espacial de la solución (en el caso de la matriz M) y el conjunto de las primeras \hat{m} funciones es ortogonal a todas las demás funciones de la base espacio-temporal pues ningun par formado por un elemento de cada uno de estos conjuntos tiene para un mismo valor de tiempo imagen no nula, salvo quizás en un punto temporal. Entonces, tenemos conjuntos linealmente independientes que son ortogonales entre sí, de allí es fácil ver que el conjunto total (la base espacio-temporal) es linealmente independiente. Análoga situación se da con la matriz G.

Es decir, tanto la solución aproximada como el control óptimo aproximado serán expresados como la combinación lineal de $\hat{n} \times \hat{m}$ y $\hat{l} \times \hat{n}$ funciones espacio-temporales respectivamente, las cuales son linealmente independientes, y por tanto sus respectivas matrices

de Gram (M y G) son definidas positivas.

Remplazando (3.29) y (3.33) en (3.27) obtenemos el funcional en su forma discreta expresado como

$$J = \frac{q}{2} \left(\hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{z}}^* \right)^T M \left(\hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{z}}^* \right) + \frac{r}{2} \hat{\mathbf{h}}^T G \hat{\mathbf{h}}.$$
 (3.35)

Las transformaciones introducidas permiten reducir el problema de minimización restric-

ta a:

min
$$J\left(\hat{\mathbf{z}},\hat{\mathbf{h}}\right)$$
 (3.36)
sujeto a $E\left(\hat{\mathbf{h}}\right)\hat{\mathbf{z}} + N\hat{\mathbf{h}} = \hat{\mathbf{f}}.$

3.4. Optimalidad

Para resolver el problema de minimización restricta (3.36), lo reducimos a un problema de minimización irrestricta, por medio de la formulación del lagrangiano discreto [11] asociado

$$L\left(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{h}}, \mathbf{p}\right) = \frac{q}{2} \left(\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z}^*\right)^T M\left(\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z}^*\right) + \frac{r}{2} \hat{\mathbf{h}}^T G \hat{\mathbf{h}} + \left\langle \mathbf{p}, E\left(\hat{\mathbf{h}}\right) \hat{\mathbf{z}} + N \hat{\mathbf{h}} - \hat{\mathbf{f}} \right\rangle,$$
(3.37)

donde ${\bf p}$ es el vector de las variables duales.

El lagrangiano (3.37) cumple las condiciones de regularidad necesarias [12] para que en los puntos mínimos de (3.37) se cumplan las condiones necesarias de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) de primer orden. Es decir, que las derivadas del lagrangiano con respecto a $\hat{z} - z^*$, \hat{h} y p cumplan

$$\partial_{\hat{\mathbf{z}}-\hat{\mathbf{z}}^*}L = q M \ (\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z}^*) + E^T \mathbf{p} = 0, \tag{3.38}$$

$$\partial_{\hat{\mathbf{h}}}L = r G \,\hat{\mathbf{h}} + \mathbf{p}^T \times \frac{\partial E}{\partial \hat{\mathbf{h}}} \times \hat{\mathbf{z}} + N^T \,\mathbf{p} = 0$$
 (3.39)

у

$$\partial_{\mathbf{p}}L = E\left(\hat{\mathbf{h}}\right)\hat{\mathbf{z}} + N\hat{\mathbf{h}} - \hat{\mathbf{f}} = 0.$$
 (3.40)

Nos detenemos aquí para explicar cuidadosamente cada una de las ecuaciones obtenidas a partir de las condiciones de optimalidad de primer orden de KKT para el lagrangiano (3.37). En primer lugar, las condiciones son obtenidas por medio del uso de la derivada en el sentido de Gâteaux [13] del lagrangiano (3.37) con respecto a los vectores mencionados. Por otro lado, se puede ver que la ecuación (3.38), no presenta grandes complicaciones para su entendimiento. Sin embargo, la ecuación (3.39) incluye una operación representada por el símbolo \times que está siendo utilizado para indicar el producto de arreglos tridimensionales con arreglos bidimensionales, producto que definimos a continuación.

Definición 3.4.1 Sea $A_{m \times n \times l}$ un arreglo tridimensional y $v_{n \times 1}$ un arreglo unidimensional, se define el producto × a la derecha $C_{m \times 1 \times l} = A_{m \times n \times l} \times v_{n \times 1}$ como:

$$c_{i\,1\,r} = \sum_{k=1}^{n} a_{i\,k\,r} v_{k\,1} \tag{3.41}$$

Como se puede ver el producto \times a la derecha del arreglo tridimensional por un arreglo bidimensional (vector) da como resultado un arreglo tridimensional pero con solo una columna.

Definición 3.4.2 Sea $A_{m \times n \times l}$ un arreglo tridimensional y $u_{1 \times m}$ un arreglo unidimensional, se define el producto × a la izquierda $C_{1 \times n \times l} = u_{1 \times m} \times A_{m \times n \times l}$ como:

$$c_{1\,i\,r} = \sum_{k=1}^{n} u_{1\,k} a_{k\,j\,r} \tag{3.42}$$

El producto \times del arreglo tridimensional por un arreglo bidimensional (vector) da como resultado un arreglo tridimensional con solo una fila.

A continuación explicaremos el origen de este producto.

El segundo término de la ecuación (3.39) proviene de derivar con respecto al vector $\hat{\mathbf{h}}$

el producto

$$\left(\mathbf{p}^{T}E\left(\hat{\mathbf{h}}\right)\hat{\mathbf{z}}\right),$$
 (3.43)

donde

$$\frac{\partial \mathbf{p}^{T} E\left(\hat{\mathbf{h}}\right) \hat{\mathbf{z}}}{\partial \hat{\mathbf{h}}} = \mathbf{p}^{T} \frac{\partial E\left(\hat{\mathbf{h}}\right) \hat{\mathbf{z}}}{\partial \hat{\mathbf{h}}}.$$
(3.44)

Será demostrado a seguir que (3.44) es equivalente a:

$$\frac{\partial \mathbf{p}^{T} E\left(\hat{\mathbf{h}}\right) \hat{\mathbf{z}}}{\partial \hat{\mathbf{h}}} = \mathbf{p}^{T} \times \left(\frac{\partial E\left(\hat{\mathbf{h}}\right)}{\partial \hat{\mathbf{h}}} \times \hat{\mathbf{z}}\right).$$
(3.45)

En la ecuación (3.45) el símbolo × representa el producto definido en 3.4.1 y 3.4.2. Para contextualizar la expresión (3.45) consideramos el vector $\hat{\mathbf{h}}$ con apenas una componente, entonces el producto × se simplifica al producto usual de matrices. Es decir, si cada elemento de la matriz *E* depende de una única variable real, la derivada $\frac{\partial E}{\partial \hat{\mathbf{h}}}$ de la matriz *E* sería una matriz de la misma dimensión que *E*; y cada elemento de $\frac{\partial E}{\partial \hat{\mathbf{h}}}$ sería la derivada del correspondiente elemento en *E*, con respecto al único elemento de $\hat{\mathbf{h}}$.

Supongamos ahora que el vector $\hat{\mathbf{h}}$ tiene dos componentes, en ese caso existirían dos derivadas parciales (en el sentido de Gâteaux). Es decir, si quisiésemos calcular el incremento Δ de la expresión $\mathbf{p}^T E\left(\hat{\mathbf{h}}\right) \hat{\mathbf{z}}$, dado un incremento de uno de los elementos del vector $\hat{\mathbf{h}}$, Δ podría ser aproximado por su parte lineal, es decir

$$\Delta \approx \mathbf{p}^T \frac{\partial E}{\partial h_l} \hat{\mathbf{z}} \Delta h_l, \tag{3.46}$$

donde h_l es la *l*-ésima componente de $\hat{\mathbf{h}}$, y Δh_l es el incremento en dicha componente.

Ahora bien, estamos aproximando localmente a la expresión $\mathbf{p}^T E(\hat{\mathbf{h}}) \hat{\mathbf{z}}$, por su parte lineal; entonces, sabemos que es válido el principio de superposición de efectos. Es decir, la estimación lineal del incremento Δ de la expresión $\mathbf{p}^T E(\hat{\mathbf{h}}) \hat{\mathbf{z}}$, al producirse incrementos en ambas componentes del vector $\hat{\mathbf{h}}$ es

$$\Delta \approx \mathbf{p}^T \frac{\partial E}{\partial h_1} \hat{\mathbf{z}} \Delta h_1 + \mathbf{p}^T \frac{\partial E}{\partial h_2} \hat{\mathbf{z}} \Delta h_2, \qquad (3.47)$$

que puede ser expresado como un producto escalar de vectores de \mathbb{R}^2

$$\Delta \approx \begin{bmatrix} \mathbf{p}^T \frac{\partial E}{\partial h_1} \hat{\mathbf{z}} & \mathbf{p}^T \frac{\partial E}{\partial h_2} \hat{\mathbf{z}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta h_1 & \Delta h_2 \end{bmatrix}^T,$$
(3.48)

donde el vector $\begin{bmatrix} \mathbf{p}^T \frac{\partial E}{\partial h_1} \hat{\mathbf{z}} & \mathbf{p}^T \frac{\partial E}{\partial h_2} \hat{\mathbf{z}} \end{bmatrix}$ es la derivada de la función $\mathbf{p}^T E\left(\hat{\mathbf{h}}\right) \hat{\mathbf{z}}$ con respecto al vector $\hat{\mathbf{h}}$.

En este punto es importante destacar que la matriz $\frac{\partial E}{\partial h_k}$ tiene siempre la misma dimensión que la matriz *E*. Y como para ambas las componentes h_k del vector $\hat{\mathbf{h}}$ la matriz $\frac{\partial E}{\partial h_k}$ es siempre pre-multiplicada por \mathbf{p}^T y pos-multiplicada por $\hat{\mathbf{z}}$, utilizaremos un producto especial, que puede ser considerado como una variación del producto de Kronecker [14], el cual representaremos por el símbolo × y se aplicaría de manera a transformar

$$\frac{\partial \left(\mathbf{p}^{T} E\left(\hat{\mathbf{h}} \right) \hat{\mathbf{z}} \right)}{\partial \hat{\mathbf{h}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}^{T} \frac{\partial E}{\partial h_{1}} \hat{\mathbf{z}} & \mathbf{p}^{T} \frac{\partial E}{\partial h_{2}} \hat{\mathbf{z}} \end{bmatrix}$$
(3.49)

en

$$\frac{\partial \left(\mathbf{p}^{T} E\left(\hat{\mathbf{h}} \right) \hat{\mathbf{z}} \right)}{\partial \hat{\mathbf{h}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}^{T} \frac{\partial E}{\partial h_{1}} & \mathbf{p}^{T} \frac{\partial E}{\partial h_{2}} \end{bmatrix} \times \hat{\mathbf{z}}.$$
(3.50)

Es fácil ver que los elementos del vector derivada definido en (3.49) son números reales (basta con verificar la dimensión de las matrices que al multiplicar dan origen a dichos elementos). Sin embargo, al extraer el vector \hat{z} de cada elemento, nos quedamos con vectores

fila en cada elemento del vector

$$\left[\mathbf{p}^T \frac{\partial E}{\partial h_1} \quad \mathbf{p}^T \frac{\partial E}{\partial h_2} \right].$$
(3.51)

Es en este sentido que podemos afirmar que el producto representado por × es una generalización del producto de Kronecker, pues, para el producto × multiplicamos cada elemento de la matriz de la izquierda por toda la matriz de la derecha (igual al producto de Kronecker), con la diferencia de que para el producto × cada elemento de la matriz de la izquierda puede ser a su vez ser una matriz (del orden adecuado) y el producto que se distribuye a cada uno de estos elementos no es el producto de escalares por matrices, sino el propio producto usual de matrices.

En realidad, en la ecuación (3.50) el producto × podríamos decir que reproduce en cierta forma al producto usual de matrices; pues, cada "fila" (elemento) del vector $\begin{bmatrix} \mathbf{p}^T \frac{\partial E}{\partial h_1} & \mathbf{p}^T \frac{\partial E}{\partial h_2} \end{bmatrix}$ es multiplicada por cada columna (la única) del vector $\hat{\mathbf{z}}$. Entonces, para conseguir visualizar mejor lo que pasa con el producto × podemos suponer que el vector de vectores $\begin{bmatrix} \mathbf{p}^T \frac{\partial E}{\partial h_1} & \mathbf{p}^T \frac{\partial E}{\partial h_2} \end{bmatrix}$ tiene a sus elementos (que en realidad son vectores fila) uno detrás de otro, como se puede ver en la Figura 3.2



Figura 3.2: Matriz de la ecuación (3.51). Figura de elaboración propia.

Se puede ver entonces que el producto \times opera multiplicando escalarmente cada fila (ubicada en la dirección horizontal) por cada columna de la matriz que tiene a la derecha.

Por analogía al producto usual de matrices podríamos entonces definir que este producto nos da un vector "pila", pues, por cada fila de la matriz $\begin{bmatrix} \mathbf{p}^T \frac{\partial E}{\partial h_1} / \mathbf{p}^T \frac{\partial E}{\partial h_2} \end{bmatrix}$ (donde usamos el símbolo / para representar que la segunda matriz está por detrás de la primera), se



Figura 3.3: Producto de la ecuación (3.50). Figura de elaboración propia.

Ahora, aplicando un análisis análogo al ya realizado para la pos-multiplicación con el producto ×, esta vez para la pre-multiplicación, podemos escribir

$$\frac{\partial \left(\mathbf{p}^{T} E\left(\hat{\mathbf{h}} \right) \hat{\mathbf{z}} \right)}{\partial \hat{\mathbf{h}}} = \mathbf{p}^{T} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial E}{\partial h_{1}} / & \frac{\partial E}{\partial h_{2}} \end{bmatrix} \times \hat{\mathbf{z}}$$
(3.52)

Aquí observamos que lo que eran filas en la matriz $\begin{bmatrix} \mathbf{p}^T \frac{\partial E}{\partial h_1} / \mathbf{p}^T \frac{\partial E}{\partial h_2} \end{bmatrix}$ ya son el resultado de la multiplicación del vector \mathbf{p}^T por la derivada de la matriz E con respecto a cada componente del vector $\hat{\mathbf{h}}$. Entonces, obtenemos una matriz tridimensional $\begin{bmatrix} \frac{\partial E}{\partial h_1} / \frac{\partial E}{\partial h_2} \end{bmatrix}$,

donde cada capa de la matriz tiene las dimensiones de E y sus elementos son las derivadas

de los elementos de E con relación a cada elemento de $\hat{\mathbf{h}}$, capa por capa.

Es importante destacar aquí que debido a la asociatividad del producto usual de matri-

ces se concluye con facilidad la asociatividad del producto \times . En la Figura 3.4 se muestra

el esquema en que se multiplican las matrices en cuestión.



Figura 3.4: Producto de la ecuación (3.52). Figura de elaboración propia.

Denotamos la matriz $\begin{bmatrix} \frac{\partial E}{\partial h_1} / & \frac{\partial E}{\partial h_2} \end{bmatrix}$, como $\frac{\partial E}{\partial \hat{\mathbf{h}}}$. Es quizás más fácil comprender el origen de la matriz $\frac{\partial E}{\partial \hat{\mathbf{h}}}$, notando que, así como el jacobiano de una función vectorial es la generalización del gradiente de una función escalar; la matriz tridimensional es el jacobiano generalizado para una función matricial.

Como se puede apreciar en la Figura 3.6 el resultado de la multiplicación es un vector pila. Además, recordando que el vector resultante es la derivada de Gâteaux de la expresión $\mathbf{p}^T E\left(\hat{\mathbf{h}}\right) \hat{\mathbf{z}}$, entonces tomando en cuenta la ecuación (3.48) podemos expresar Δ como el

producto tridimensional, que denotamos por

$$\Delta \approx \mathbf{p}^T \times \frac{\partial E}{\partial \hat{\mathbf{h}}} \times /\Delta \hat{\mathbf{h}} \times \hat{\mathbf{z}}, \qquad (3.53)$$

y que se muestra en la Figura 3.5, donde se puede apreciar que el vector $\Delta \hat{\mathbf{h}}$ se ubica por



Figura 3.5: Producto de la ecuación (3.53). Figura de elaboración propia.

atrás de la matriz $\frac{\partial E}{\partial \hat{\mathbf{h}}}$. No es dificil ver, que el producto es asociativo en las tres direcciones. De manera completamente análoga se define el producto \times y la matriz derivada $\frac{\partial E}{\partial \hat{\mathbf{h}}}$ cuando el vector tiene más componentes, y en este problema, tiene $n\hat{l}$ componentes. En la Figura 3.6 se puede apreciar como se vería el producto $\mathbf{p}^T \times \frac{\partial E}{\partial \hat{\mathbf{h}}} \times \hat{\mathbf{z}}$ y su resultado el vector pila en cuestión.

Ahora bien, en la ecuación (3.39) se están sumando vectores columna con vectores pila (si bien tienen el mismo número de elementos), esto puede entenderse ya que las condiciones KKT de optimalidad lo que hacen es ubicar las condiciones necesarias para la existencia de un mínimo del funcional, sabiendo que, si la estimación lineal (dada por

la derivada) del incremento del funcional en un punto es nula en todas las direcciones, entonces no existe una vecindad del punto que contenga a otro punto con una imagen por el funcional de valor menor que la del punto desde el cual se estima el incremento. Es decir, la condición de optimalidad está dada por

$$\Delta L \approx \frac{\partial L}{\partial \hat{\mathbf{z}}}^T \Delta \hat{\mathbf{z}} + \frac{\partial L}{\partial \hat{\mathbf{h}}}^T \Delta \hat{\mathbf{h}} + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{p}}^T \Delta \mathbf{p} = 0, \qquad (3.54)$$

es decir,

$$\Delta L \approx \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial L}{\partial \hat{\mathbf{z}}}^T & \frac{\partial L}{\partial \hat{\mathbf{h}}}^T & \frac{\partial L}{\partial \mathbf{p}}^T \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} \Delta \hat{\mathbf{z}}^T & \Delta \hat{\mathbf{h}}^T & \Delta \mathbf{p}^T \end{array}\right]^T = 0.$$
(3.55)



Figura 3.6: Producto de la ecuación (3.52). Figura de elaboración propia.

Además, dado que ΔL debe tener parte lineal cero para todo vector $\begin{bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{z}}^T & \Delta \hat{\mathbf{h}}^T & \Delta \mathbf{p}^T \end{bmatrix}^T$, entonces, no cabe más posibilidad que el hecho de que $\begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial \hat{\mathbf{z}}} & \frac{\partial L}{\partial \hat{\mathbf{h}}}^T & \frac{\partial L}{\partial \mathbf{p}}^T \end{bmatrix}$ sea el funcional lineal nulo; es decir,

$$\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial L^T}{\partial \hat{\mathbf{z}}} & \frac{\partial L^T}{\partial \hat{\mathbf{h}}} & \frac{\partial L}{\partial \mathbf{p}}^T \end{array}\right] = 0.$$
(3.56)

Entonces, podemos decir que los coeficientes de la combinación lineal deben ser nulos. Esto es independiente de la orientación de los vectores, y nos permite entonces transponer en la ecuación (3.39) de pila para columna el vector $\mathbf{p}^T \times \frac{\partial E}{\partial \hat{\mathbf{h}}} \times \hat{\mathbf{z}}$ para poder sumarlo a los demás vectores de coeficientes. En otras palabras, la forma correcta de escribir la ecuación (3.39) es

$$\partial_{\hat{\mathbf{h}}} L = r \, G \, \hat{\mathbf{h}} + \left(\mathbf{p}^T \times \frac{\partial E}{\partial \hat{\mathbf{h}}} \times \hat{\mathbf{z}} \right)^{T_{p \to c}} + N^T \, \mathbf{p} = 0, \tag{3.57}$$

donde, el superíndice $T_{p\to c}$ indica una transposición de fila para columna. Dicho superíndice fue omitido en la ecuación (3.39), pues consideramos que la suma se entiende como una suma de vectores de la misma cantidad de componentes, sin necesitar la citada aclaración. Además, en la ecuación (3.39) se ha utilizado la asociatividad del producto \times y ese hecho en realidad deja al producto \times de la izquierda igual al producto usual de matrices, en todo sentido, salvo quizás en la orientación de las matrices multiplicadas, sentido que también resulta obvio, es por eso que hemos escrito la ecuación (3.39) de la forma en que está y no como se muestra en (3.57).

3.5. La matriz $\frac{\partial E}{\partial \hat{\mathbf{h}}}$

A partir de la ecuación (2.69), podemos escribir

$$\frac{\partial E}{\partial \hat{\mathbf{h}}} = \frac{\partial \hat{A} + \hat{B} + \hat{C}\left(\hat{\mathbf{h}}\right)}{\partial \hat{\mathbf{h}}},\tag{3.58}$$

entonces,

$$\frac{\partial E}{\partial \hat{\mathbf{h}}} = \frac{\partial \hat{C}\left(\hat{\mathbf{h}}\right)}{\partial \hat{\mathbf{h}}}.$$
(3.59)

En este momento, recordamos que, como fue mostrado en la ecuación (2.68), cada elemento de la matriz \hat{C} es un vector $\hat{\mathbf{m}}\mathbf{k}_{i,j}$ multiplicado por el vector $\hat{\mathbf{h}}$ (en caso de pertenecer a uno de los bloques diagonales C_k) y es un vector de ceros (funcional nulo) multiplicado por el vector $\hat{\mathbf{h}}$ en caso de no pertenecer a bloque diagonal alguno. En otras palabras, cada elemento de \hat{C} es la imagen por el vector $\hat{\mathbf{h}}$ de un funcional lineal, en un caso dado por el vector $\hat{\mathbf{m}}\mathbf{k}_{i,j}$ y en otro caso por el vector nulo. Recordamos también que cada bloque diagonal C_k corresponde a cada tiempo discreto τ_k , pues esto es de importancia para entender la estructura de la matriz $\frac{\partial E}{\partial \hat{\mathbf{h}}}$.

Además, sabemos que la derivada de Gâteaux de cada elemento, viene a ser dada por los elementos del vector que representa el funcional lineal. Es decir, para hallar $\frac{\partial \hat{C}}{\partial \hat{h}}$, la cual será una matriz tridimensional, basta alinear a los vectores $\hat{\mathbf{m}}_{\mathbf{k}_{i,j}}$ asociados a cada respectivo elemento a lo largo de la tercera dimensión. En otras palabras, $\frac{\partial \hat{C}}{\partial \hat{h}}$ tiene tantas pilas como la matriz \hat{C} tiene elementos y cada pila es ocupada por el vector $\hat{\mathbf{m}}_{\mathbf{k}_{i,j}}$ correspondiente al elemento que ocupa las mismas fila y columna en la matriz \hat{C} .

También podemos notar aqui que la forma de los vectores $\hat{\mathbf{m}}\mathbf{k}_{i,j}$ hacen que la matriz tridimensional $\frac{\partial \hat{E}}{\partial \hat{h}}$ sea "tridimensionalmente diagonal por bloques", como se mestra en la Figura 3.7. Llamamos tridimensionalmente diagonal por bloques a una matriz tridimensional con bloques nulos fuera de unas submatrices de caras cuadradas y profundidad adecuada, de manera cubrir la diagonal del paralelepípedo, de principio a fin.

Esta estructura claramente esparsa es aprovechable al momento de la implementación.

Mirando retrospectivamente, podemos recordar, que la *k*-ésima cara de la matriz $\frac{\partial E}{\partial \hat{\mathbf{h}}}$ es una matriz de las mismas dimensiones de *E*, y cada elemento de dicha cara es la derivada del correspondiente elemento en *E* con relación a la *k*-ésima componente del vector $\hat{\mathbf{h}}$. Es claro entonces, que las primeras \hat{l} caras de $\frac{\partial E}{\partial \hat{\mathbf{h}}}$ solo tendrán componentes no nulas en las primeras \hat{m} filas y \hat{m} columnas; pues las componentes de los demás elementos solo dependen posiblemente de los demás tiempos. Lo mismo para el segundo tiempo discreto y las segundas \hat{m} filas y \hat{m} columnas, en las segundas \hat{l} caras; y así sucesivamente.



Figura 3.7: Producto de la ecuación (3.59). Figura de elaboración propia.

3.6. Método de resolución

La satisfacción de las condiciones necesarias de optimalidad de KKT para el problema derivaron en el ya ampliamente explicado, sistema de ecuaciones (3.60)

$$qM(\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z}^*) + E^T \mathbf{p} = 0$$

$$rG\hat{\mathbf{h}} + \mathbf{p}^T \times \frac{\partial E}{\partial \hat{\mathbf{h}}} \times \hat{\mathbf{z}} + N^T \mathbf{p} = 0$$

$$E\hat{\mathbf{z}} + \mathbf{N}\hat{\mathbf{h}} - \hat{\mathbf{f}} = 0,$$
(3.60)

cuya alinealidad asociada al término $\mathbf{p}^T \times \frac{\partial E}{\partial \hat{\mathbf{h}}} \times \hat{\mathbf{z}}$, es evidente.

Para resolver este sistema hemos recurrido a una variación mínima del método de Newton-Raphson para sistemas de ecuaciones. Dicha variación se limita al tamaño del paso a utilizar, que por lo general es menor que el usado en el método de Newton-Raphson

usual.

Para proceder a utilizar el método de Newton-Raphson precisamos calcular el Jacobiano del sistema de ecuaciones (3.60), el cual es dado por

$$S = \begin{bmatrix} \frac{\partial \left(qM(\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z}^*) + E^T \mathbf{p}\right)}{\partial \hat{\mathbf{z}}} & \frac{\partial \left(qM(\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z}^*) + E^T \mathbf{p}\right)}{\partial \hat{\mathbf{h}}} & \frac{\partial \left(qM(\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z}^*) + E^T \mathbf{p}\right)}{\partial \mathbf{p}} \\ \frac{\partial \left(rG\hat{\mathbf{h}} + \mathbf{p}^T \frac{\partial E}{\partial \hat{\mathbf{h}}} \times \hat{\mathbf{z}} + N^T \mathbf{p}\right)}{\partial \hat{\mathbf{z}}} & \frac{\partial \left(rG\hat{\mathbf{h}} + \mathbf{p}^T \frac{\partial E}{\partial \hat{\mathbf{h}}} \times \hat{\mathbf{z}} + N^T \mathbf{p}\right)}{\partial \hat{\mathbf{h}}} & \frac{\left(\partial rG\hat{\mathbf{h}} + \mathbf{p}^T \frac{\partial E}{\partial \hat{\mathbf{h}}} \times \hat{\mathbf{z}} + N^T \mathbf{p}\right)}{\partial \mathbf{p}} \\ \frac{\partial \left(E\hat{\mathbf{z}} + \mathbf{N}\hat{\mathbf{h}} - \hat{\mathbf{f}}\right)}{\partial \hat{\mathbf{z}}} & \frac{\partial \left(E\hat{\mathbf{z}} + \mathbf{N}\hat{\mathbf{h}} - \hat{\mathbf{f}}\right)}{\partial \hat{\mathbf{h}}} & \frac{\partial \left(E\hat{\mathbf{z}} + \mathbf{N}\hat{\mathbf{h}} - \hat{\mathbf{f}}\right)}{\partial \mathbf{p}} \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad (3.61)$$

lo que equivale a

$$S = \begin{bmatrix} qM & \frac{\partial \hat{C}^{T_{f \to c}}}{\partial \hat{\mathbf{h}}} \times \mathbf{p} & E^T \\ \mathbf{p}^T \times \frac{\partial \hat{C}}{\partial \hat{\mathbf{h}}} & rG + \mathbf{p}^T \times \frac{\partial^2 \hat{C}}{\partial \hat{\mathbf{h}}^2} \times \hat{\mathbf{z}} & \frac{\partial \hat{C}}{\partial \hat{\mathbf{h}}} \times \hat{\mathbf{z}}^{T_{p \to c}} + N^T \\ E & \frac{\partial \hat{C}}{\partial \hat{\mathbf{h}}} \times \hat{\mathbf{z}} + N & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.62)$$

donde los superíndices $T_{f \to c}$ y $T_{p \to c}$ indican la transposición de filas para columnas y de pilas para columnas respectivamente.

$$\begin{array}{l} \text{Además, como } \frac{\partial C}{\partial \hat{\mathbf{h}}} \text{ no depende ya de } \hat{\mathbf{h}}, \text{ se tiene } \frac{\partial^2 C}{\partial \hat{\mathbf{h}}^2} = 0, \text{ luego,} \\ \\ \\ S = \left[\begin{array}{c} qM & \frac{\partial \hat{C}^{T_{f \to c}}}{\hat{\mathbf{h}}} \times \mathbf{p} & E^T \\ \\ \mathbf{p}^T \times \frac{\partial \hat{C}}{\partial \hat{\mathbf{h}}} & rG & \frac{\partial \hat{C}}{\partial \hat{\mathbf{h}}} \times \hat{\mathbf{z}}^{T_{p \to c}} + N^T \\ \\ E & \frac{\partial \hat{C}}{\partial \hat{\mathbf{h}}} \times \hat{\mathbf{z}} + N & 0 \end{array} \right], \quad (3.63)$$

que equivale a

$$S = \begin{bmatrix} qM & \mathbf{p}^T \times \frac{\partial \hat{C}}{\partial \hat{\mathbf{h}}}^T & E^T \\ \mathbf{p}^T \times \frac{\partial \hat{C}}{\partial \hat{\mathbf{h}}} & rG & \frac{\partial \hat{C}}{\partial \hat{\mathbf{h}}} \times \hat{\mathbf{z}} + N \\ E & \frac{\partial \hat{C}}{\partial \hat{\mathbf{h}}} \times \hat{\mathbf{z}} + N & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.64)$$

donde podemos notar que el jacobiano es simétrico.

Finalmente podemos entoces describir el método iterativo utilizado en el siguiente algoritmo: Mientras k < kmax hacer

- Adoptar valor inicial para el vector $\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{z}}^T & \hat{\mathbf{h}}^T & \mathbf{p}^T \end{bmatrix}^T$.
- Con los valores actuales evaluar el sistema (3.60) y obtener el residuo κ y el jacobiano
 S en el punto en cuestión. Si el residuo es menor que la tolerancia terminar la rutina, sino pasar al tercer paso.
- Calcular la corrección $\theta = \mu S^{-1} \kappa$
- Actualizar el vector $\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{z}}^T & \hat{\mathbf{h}}^T & \mathbf{p}^T \end{bmatrix}^T$ restándole la corrección θ , hacer k = k + 1 y pasar al segundo paso.

En la rutina presentada, μ es un factor menor que uno que es multiplicado al paso original del método de Newton-Raphson, de manera a mejorar la rapidez de la convergencia. Este factor lo hemos hecho variar con el número de iteraciones y con el tamaño del residuo, y obtuvimos tasas de convergencia mucho mejores que las que se obtuvieron con el paso standard.

CAPÍTULO 4 IMPLEMENTACIÓN

En el presente capítulo se muestra la utilización del método de los elementos finitos para la implementación de los métodos de simulación y control desarrollados. Además, se muestra el tipo de elementos utilizados, y se comenta sobre algunas maneras ventajosas, en términos computacionales, para la implementación, mismo que estas sean de uso ya común. Se presentan además los algoritmos básicos de solución de los problemas de simulación y control desarrollados e implementados.

Es importante destacar, que el método de control desarrollado no se limita al uso de elementos lineales como los que se muestran en el capítulo presente, ni a la división en elementos finitos; sin embargo estos presentan amplias ventajas al formar matrices bien esparsas y al ensamblarlas.

4.1. Método de los elementos finitos

En el capítulo 2 hemos mencionado a las funciones de base, que utilizamos para la implementación del método de Galerkin; además, hemos explicado que tenemos una base de funciones espacio temporales que se obtienen multiplicando las funciones z(t) por las funciones $\eta(x)$.

También dijimos en el capítulo 3 que el producto de las z_k por las η_j nos dan una base espacio temporal; y que esto es debido a que las funciones z_k son nulas en $(t_0, t_{k-1}] \cup$ $(t_k, t_n]$ y toman el valor z_k en $(t_{k-1}, t_k]$. Falta ahora conocer la naturaleza de la funciones η_j utilizadas para implementar el método de resolución.

4.1.1. Elementos lineales

Dividiremos inicialmente el dominio espacial en una cantidad finita de elementos tetraédricos conformes [15]; es decir, de manera a que ningún nodo ni arista quede en el interior de cara alguna.

Posteriormente definiremos por cada nodo (vértice de tetraedro) una función φ de la base, y la numeración de los nodos se corresponderá con la de las funciones φ . Cada una de estas funciones φ_i valdrá 1 en el *i*-ésimo nodo y cero en todos los demás y será lineal dentro de cada tetraedro. Es decir, la función φ_i se incrementará linealmente de cero a uno dentro de los tetraedros que tengan como uno de sus vértices al *i*-ésimo nodo y será totalmente nula en todos los demás tetraedros.

Estas funciones son llamadas funciones sombrero, y la limitación del dominio en el cual se definen como no nulas facilita mucho los cáculos de los productos internos en cuestión.

La Figura 4.1 muestra el gráfico de una función sombrero restricta a un tetraedro que tiene

como uno de sus vértices al nodo que corresponde a la función en cuestión.



Figura 4.1: Ejemplo de función sombrero restricta a un elemento. Figura de elaboración



propia.

Figura 4.2: Función sombrero restricta a dos elementos. Figura de elaboración propia.

El uso de este tipo de funciones facilita el cálculo, y permite rutinas sencillas y similares a las que pueden ser encontradas en [16].

Además, ya hemos mencionado anteriormente la constancia por partes de las propie-

dades físicas, y de la generación de calor por unidad de volumen, así como del coeficiente
de convección. Es precisamente en cada elemento que esta constancia se da, es decir las propiedades físicas del material, la generación de calor y el coeficiente de convección se consideran constantes por cada tetraedro, o en el caso del coeficiente de convección por cara externa del tetraedro. El método permite refinar la aproximación simplemente aumentando el número de nodos, y consecuentemente reduciendo el volumen y área externa de cada tetraedro.

También las consideraciones hechas en el capítulo 2 con relación al contacto perfecto entre caras interiores, se pueden considerar como si cada porción de propiedades constantes es un tetraedro; o bien, un grupo de tetraedros.

4.2. Matrices locales y globales

Las matrices *B*, *A*, *C* y *D*; que fueron presentadas en las ecuaciones (2.45) y (2.46), así como otras utilizadas pueden ser calculadas elemento a elemento de la matriz. Sin embargo, dada la forma de las funciones sombrero utilizadas, las matrices obtenidas son muy esparsas, y no es computacionalmente práctico su cálculo por elemento de la matriz, es más conveniente en este caso realizar el cálculo tetraedro a tetraedro, e ir acoplando los cálculos en las matrices, superponiendo los efectos de funciones sombrero diferentes que son simultáneamente no nulas en más de un tetraedro.

Además, de forma completamente análoga a como se muestra en [16] puede mostrarse que las integrales de las citadas matrices, y de otras que se pueden calcular de la misma forma) son funciones exclusivamente dependientes de los volúmenes y las áreas de los tetraedros.

Para el caso de la matriz B, cálculos integrales sencillos pero un poco largos llevan

fácilmente a ver que en un tetraedro la integral

$$\int_{e_i} \rho_{e_i} c_{p_{e_i}} \eta_i \eta_j = \frac{\rho_{e_i} c_{p_{e_i}} V}{10}$$
(4.1)

si i = j, y

$$\int_{e_i} \rho_{e_i} c_{p_{e_i}} \eta_i \eta_j = \frac{\rho_{e_i} c_{p_{e_i}} V}{20}$$
(4.2)

si $i \neq j$, donde e_i es un tetraedro y V es el volumen del tetraedro en cuestión. Esto nos permite ensamblar la matriz B, a partir de los datos de los volúmenes de los elementos, simplemente partiendo de un matriz llena de ceros y sumando sucesivamente las integraciones en cada elemento en los lugares correspondientes.

Se procede en forma similar con las demás matrices, e incluso algunos vectores usados. Más detalles con relación al ensamble de matrices globales a partir de las locales pueden encontrarse en [16] y en [5].

CAPÍTULO 5 EXPERIMENTACIÓN Y RESULTADOS

En el presente capítulo, presentamos los detalles de los modelos utilizados, como son las refinaciones, los valores de las propiedades físicas, etc. Se indican los algoritmos básicos de implementación y se muestran los resultados numéricos que avalan el desempeño de los métdos desarrollados.

Se presenta también una implementación de control con otro tipo de frontera, que formó parte del estudio preliminar al desarrollo del método de control sobre el que versa el presente trabajo.

5.1. Simulación a malla abierta

La simulación a malla abierta consiste en hallar el valor de la temperatura T teniendo el valor de h como dato. El objetivo será comprobar experimentalmente el modelo comparando nuestros resultados con otros obtenidos en laboratorio, los cuales hemos encontrado en la literatura consultada.

5.1.1. Algoritmo de simulación

Para simular la evolución de la temperatura dadas las condiciones de frontera de Robin,

se procede de la siguiente forma:

- Lectura de archivo con coordenadas de los nodos.
- Lectura de archivo con nodos de los elementos.
- Lectura de archivo de caras exteriores.
- Generación las matrices teniendo en cuenta las propiedades físicas.
- Resolución del sistema lineal.
- Despliege de resultados.

5.2. El modelo y sus simplificaciones

Para encontrar el campo de temperatura partimos de la ecuación (3.4) teniendo en cuenta que en este caso el valor de *h* es conocido, por lo que la solución del problema consiste

en reemplazar $\hat{\mathbf{h}}$ en

$$E\left(\hat{\mathbf{h}}\right)\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{f}} - N\hat{\mathbf{h}},\tag{5.1}$$

y resolver el sistema para hallar \hat{z} . Por lo tanto la simulación consiste en resolver (5.1), un sistema de ecuaciones lineales. El sistema de ecuaciones a ser resuelto incorpora ya las propiedades de las distintas capas involucradas, las cuales fueron extraídas de [1].



Figura 5.1: Capas del circuito. Figura extraída de [1].

Simplificamos este modelo pasando de un modelo de 5 capas a 2 capas (del mismo modo que se hizo en [1]), tomando:

- Una capa de aluminio, por el gran gradiente de temperatura que presenta.
- Una capa representativa de las superiores, con propiedades promedio.

El modelo simplificado es el siguiente

De manera a validar experimentalmente los resultados obtenidos tomamos los resulta-

dos experimentales de las medidas de laboratorios encontradas en [17].

El modelo simplificado a simular lo detallamos a continuación:



Figura 5.2: Capas del circuito simplificado. Figura extraída de [1].

- Consideramos una placa fina con diferentes propiedades físicas, las dimensiones de la placa son de 7,5 cm de largo, 5 cm de ancho y 1,5 mm de grosor.
- El flujo de calor aparece principalmente en las superficies superior e inferior, en las superficies laterales despreciamos el intercambio de calor $\frac{\partial T}{\partial \eta} = 0$, consideramos estas como superficies adiabáticas.
- La transmisión de calor al aire se da por convección natural, el coeficiente de convección tomamos $h = 17, 8 \frac{W}{m^2 K}$ en la superficie superior e inferior.
- La generación de calor se da en el chip en el centro de la placa, el chip tiene forma rectangular de 2 cm de largo, 1 cm de ancho y 1,5 mm de grosor. El calor generado por este es de 9,4W
- El sistema térmico parte de una temperatura homogénea igual a la del ambiente $T(x, 0) = T_{\infty}$. Consideramos la temperatura ambiente $T_{\infty} = 293 K$
- Los materiales que componen el sistema son isótropos.

• La conductividad térmica del cuerpo generador de calor es $\lambda_1 = 1, 5 \frac{W}{mK}$, conductividad térmica de la placa es de $\lambda_2 = 240 \frac{W}{mK}$. El producto de la densidad por el calor específico del cuerpo generador de calor es $\rho_1 c_{p1} = 1, 67 \times 10^7 \frac{J}{m^3 K}$ y el producto de la densidad por el calor específico de la placa es $\rho_2 c_{p2} = 240 \times 10^4 \frac{J}{m^3 K}$.

En la figura 5.3 podemos observar el modelo del circuito anteriormente descripto.



Figura 5.3: Modelo del circuito. Figura de elaboración propia.

5.3. Discretización

Para la discretización espacial tomamos 16 nodos en la dirección del largo, de 7, 5 cm, 11 en la del ancho, de 5 cm y 3 en la del grosor, de 1, 5 mm. Lo que nos da 528 nodos. En la discretización temporal tomamos 20 divisiones y el tiempo final es de 400 segundos, tiempo en que llega a estado estable. Con esto el sistema de ecuaciones (5.1) resulta un sistema de 10560 ecuaciones.

Resolvemos el problema (5.1) de forma secuencial y utilizando métodos directos para hallar el campo de temperatura. La Figura 5.4 muestra la distribución de temperatura del



circuito en estado estable por medio de una escala de colores.

Figura 5.4: Simulación (estado estable). Figura de elaboración propia.

Como podemos ver, en la parte central, donde se encuentra el cuerpo generador del calor (el chip) la temperatura es mayor y esta va bajando al aproximarse a los bordes de la placa, es importante notar que en el modelo la placa es rectangular es por esto que la temperatura es mayor en los bordes en la dirección del ancho que la del largo.

Para comprobar el modelo en forma experimental tomamos las mediciones de laboratorio del punto central de la placa extraídas de [1], y comparamos con el valor de la temperatura a través del tiempo del punto central resultante de resolver (5.1). La comparación es mostrada en la Figura 5.5

Se puede observar que los resultados de la simulación se asemejan a los de laboratorio, existen pequeñas diferencias entre las mediciones y los resultados de laboratorio. Con esto se demuestra en forma experimental que el modelo concuerda con los resultados físicos medidos.

La figura 5.6 muestra el valor de la temperatura en los distintos puntos de la placa.



Figura 5.5: Comparación con resultados de laboratorio. Figura de elaboración propia, a partir de figura extraída de [1].

Se puede observar que la temperatura en estado estable de los distintos puntos se encuentra alrededor de los 370 K y que no existe gran diferencia de temperatura entre los distintos puntos de la placa.

5.4. El problema de control óptimo con frontera de Neumann

5.4.1. Modelamiento con frontera de Neumann

Para modelar el problema de control con frontera de Neumann partimos nuevamente de la ecuación (2.3) con la diferencia que las condiciones de frontera cambian. El modelo es el siguiente:



Figura 5.6: Evolución temporal de los distintos puntos de la placa. Figura de elaboración propia.

Problema 1 de Neumann

$$\begin{cases} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + f \quad \text{en} \quad \Omega \times [t_0, t_f] \\ T(x, 0) = T_0 \\ \frac{\partial T}{\partial \eta} = -\frac{q}{\lambda} \qquad \text{en} \quad \partial \Omega \times [t_0, t_f], \end{cases}$$
(5.2)

donde $\Omega \subset \Re^3$ es el dominio espacial, y $[t_0, t_f]$ es el intervalo de tiempo de duración del transitorio estudiado. Realizamos las mismas condiciones que en el problema de Robin. Las propiedades físicas (ρ , c_p y λ) son consideradas constantes por partes tanto en el espacio como en el tiempo, permitiendo así la resolución del problema no lineal. El término de fuente *f* también es supuesto constante por partes, o al menos aproximado por funciones constantes por partes. Cada uno de los materiales que componen la placa es considerado

isótropo, y si bien existe cierta anisotropía en las superficies de contacto entre dos materiales, esta es encarada con una condición de contacto perfecto entre las superficies en cuestión. Escribiendo la formulación variacional tenemos

$$\langle \eta_i, \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \rangle = \langle \eta_i, \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + f \rangle,$$
(5.3)

y tomando las mismas consideraciones que en el capítulo 2 tenemos para la ecuación (2.12), se tiene,

$$\int_{\Omega} \rho c_p \eta_i \frac{\partial T}{\partial t} = -\int_{\Omega} \lambda \nabla \eta_i \cdot \nabla T + \oint_{\partial \Omega} \eta_i \lambda \partial_n T + \int_{\Omega} f \eta_i.$$
(5.4)

A seguir implementamos las condiciones de frontera $\frac{\partial T}{\partial \eta} = -\frac{q}{\lambda}$ y obtenemos

$$\int_{\Omega} \rho c_p \eta_i \frac{\partial T}{\partial t} = -\int_{\Omega} \lambda \nabla \eta_i \cdot \nabla T + \oint_{\partial \Omega} \eta_i \lambda \left(-\frac{q}{\lambda} \right) + \int_{\Omega} f \eta_i.$$
(5.5)

Método de Galerkin

Para aplicar el método de Galerkin, de manera similar a la hecha con la formulación con condiciones de Robin, volvemos a aproximar T mediante un conjunto finito linealmente independiente de \hat{m} funciones test η_i haciendo

$$T = \sum_{m} z_{m}(t) \eta_{m}(x).$$
(5.6)

Lo cual a su vez implica que

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial \sum_{m} z_{m} \eta_{m}}{\partial t} = \sum_{m} \dot{z}_{m} \eta_{m}.$$
(5.7)

Remplazando ahora, (5.6) y (5.7) en (5.5) obtenemos

$$\sum_{j} \dot{z}_{j} \int_{\Omega} \rho c_{p} \eta_{i} \cdot \eta_{j} = \sum_{j} z_{j} \int_{\Omega} \lambda \nabla \eta_{i} \nabla \eta_{j} - \int_{\partial \Omega} q \eta_{i} + \int_{\Omega} f \eta_{i}.$$
(5.8)

Mauricio Poletti

Carlos Galeano

La función q es aproximada como constante por partes triangulares y finitas en el espa-

cio, (igual a lo hecho para la condición de frontera de Robin). Esto nos da

$$\int_{\partial\Omega} q\eta_i = \sum_l q_l \left(\int_{\partial_l \Omega} \eta_i \right)$$
(5.9)

donde $\partial_l \Omega$ es el triangulo *l* de la frontera.

Los dos últimos términos de la ecuación (5.8) son independientes de z_j y de \dot{z}_j y pueden ser expresados como

$$\sum_{l} q_l \left(\int_{\partial_l \Omega} \eta_i \right) = e_i \tag{5.10}$$

y

$$\int_{\Omega} f\eta_i = b_i. \tag{5.11}$$

Además, al llegar aquí, podemos ver en la ecuación (5.10) que el término e_i es el producto de dos vectores \mathbf{d}_i y \mathbf{q}

$$\mathbf{d}_{\mathbf{i}} = \left[\begin{array}{ccc} \int_{\partial_1} \eta_i & \dots & \int_{\partial_l} \eta_i & \dots & \int_{\partial_{\hat{i}}} \eta_i \end{array} \right], \tag{5.12}$$

$$\mathbf{q} = \left[\begin{array}{cccc} q_1 & \dots & q_l & \dots & q_{\hat{l}}\end{array}\right]^T, \tag{5.13}$$

$$e_i = \mathbf{d_iq}. \tag{5.14}$$

Luego de las últimas consideraciones podemos reescribir la ecuación (5.8) como sigue:

$$\sum_{j} \left(\int_{\Omega} \rho c_p \eta_i \eta_j \right) \dot{z}_j = -\sum_{j} \left(\int_{\Omega} \lambda \nabla \eta_i \cdot \nabla \eta_j \right) z_j - e_i + b_i,$$
(5.15)

Vemos entonces que en la (5.15) hemos formulado una de las ecuaciones que serán necesarias para resolver el problema variacional; en particular, la que se obtiene tomando el producto interno por la *i*-ésima funcion test. Luego, variando la funcion test, es decir, variando *i* desde 1 hasta \hat{m} , donde \hat{m} es la dimensión del espacio de aproximación, obtenemos un sistema de ecuaciones que puede ser representado en forma matricial por

Problema 2 de Neumann, formulación matricial

$$B\dot{\mathbf{z}} = -A\mathbf{z} - D\mathbf{q} + \mathbf{b}, \tag{5.16}$$

donde, las matrices B, A y D son idénticas a las definidas en las ecuaciones (2.45) y (2.46), y para aclarar las volvemos a mostrar aquí:

$$B = \left[\int_{\Omega} \rho c_p \eta_i \eta_j\right]_{ij} \in \mathbb{R}^{\hat{m} \times \hat{m}} \quad A = \left[\int_{\Omega} \lambda \nabla \eta_i \nabla \eta_j\right]_{ij} \in \mathbb{R}^{\hat{m} \times \hat{m}}$$
(5.17)

$$D = \left[\int_{\partial j} \eta_i \right]_{ij} \in \mathbb{R}^{\hat{m} \times \hat{l}}$$
(5.18)

Lo mismo acontece con los vectores z, \dot{z} y b utilizados en la ecuación (5.16), es decir, son idéticos a los definidos en las ecuaciones (2.52), (2.51) y (2.53), respectivamente. De igual manera volvemos a recordar sus definiciones aquí.

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 & \cdots & z_m & \cdots & z_{\hat{m}} \end{bmatrix}^T$$
(5.19)

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \dot{z_1} & \cdots & \dot{z_m} & \cdots & \dot{z_m} \end{bmatrix}^T$$
(5.20)

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_m & \cdots & b_{\hat{m}} \end{bmatrix}^T$$
(5.21)

Vemos entonces que el sistema (5.16) es similar al sistema de ecuaciones resultante en la formulación Robin con la diferencia que no aparece el termino C(h)z que marcaba la alinealidad en el problema de frontera Robin. Por lo tanto el sistema (5.16) es un sistema lineal, esto hace que el control Neumann sea de más sencilla resolución.

Discretización temporal

Utilizando el método de Euler implícito dividiendo el intervalo temporal en \hat{n} intervalos de tiempo. Aproximamos la derivada temporal

$$\dot{z}_n = \frac{z_n - z_{n-1}}{\tau}$$
 (5.22)

Lo que resulta en

$$B_n(\mathbf{z}_n - \mathbf{z}_{n-1}) = -\tau A_n \, \mathbf{z}_n - \tau D_n \, \mathbf{q}_n + \tau \, \mathbf{b}_n, \tag{5.23}$$

donde el subíndice k indica el tiempo discreto en que son evaluadas las matrices y vectores en cuestión. La ecuación (5.23) puede ser reordenada, de manera a obtener

$$(B_n + \tau A_n)\mathbf{z}_n + \tau D_n \mathbf{q}_k = B_n \mathbf{z}_{n-1} + \tau \mathbf{b}_n.$$
(5.24)

Dado que el valor de z_0 es conocido podemos acoplar los distintos tiempos en un solo sistema de forma similar a la hecha en la formulación de Robin. Obtenemos entonces la ecuación de estado para el sistema con frontera de Neumann

Problema 3 de Neumann, problema discreto acoplado

$$H\hat{\mathbf{z}} + K\hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{f}},\tag{5.25}$$

donde:

$$H = \begin{bmatrix} B_{1} + \tau A_{1} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -B_{2} & B_{2} + \tau A_{2} & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & -B_{n} & B_{n} + \tau A_{n} & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -B_{n} & B_{n} + \tau A_{n} \end{bmatrix}, \quad (5.26)$$

$$K = \begin{bmatrix} \tau D_{1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \tau D_{n} & \vdots \\ \vdots & & \tau D_{n} & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \tau D_{n} \end{bmatrix}, \quad (5.27)$$

$$\hat{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{1}^{T} & \cdots & \mathbf{z}_{n} & \cdots & \mathbf{z}_{n} \end{bmatrix}^{T}, \quad (5.28)$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{1}^{T} & \cdots & \mathbf{q}_{n}^{T} & \cdots & \mathbf{q}_{n}^{T} \end{bmatrix}$$

y

$$\hat{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} \left(\mathbf{f}_1 + B_1 \, \mathbf{z}_0 \right)^T & \mathbf{f}_2^T & \cdots & \mathbf{f}_n^T & \cdots & \mathbf{f}_{\hat{n}}^T \end{bmatrix}.$$
(5.30)

5.4.2. El problema de control óptimo

Para realizar el control de temperatura tomamos como variable de control el flujo en la frontera, es decir, suponemos que controlamos el flujo en toda la frontera y a lo largo del tiempo. A partir del modelaje de fenómeno, el cual fuera recientemente expuesto obtuvimos

la ecuación de estado

$$H\hat{\mathbf{z}} + K\hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{f}} \tag{5.31}$$

Para realizar el control óptimo definimos el siguiente funcional en forma análoga a lo planteado en (3.1)

$$J = \frac{q}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left(\mathbf{z} - \mathbf{z}^* \right)^T B \left(\mathbf{z} - \mathbf{z}^* \right) dt + \frac{r}{2} \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{v}^T Q \, \mathbf{v} \, dt,$$
(5.32)

donde B es la matriz definida en la ecuación (5.17) y Q es la misma definida en (3.26) (una matriz diagonal en la cual cada termino es el área de la cara en cuestión).

La matriz B, fue recientemente mostrada de nuevo en la ecuación (5.17), y la matriz Q se vuelve a mostrar aquí.

$$Q = \begin{vmatrix} \int_{\partial_{1}\Omega} dS & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \int_{\partial_{10}} dS \end{vmatrix}.$$
 (5.33)

Podemos notar aquí que en el funcional (5.32), el primer termino nos da una norma del error respecto a la temperatura objetivo y el segundo termino nos da una medida del costo de la refrigeración. Por lo tanto al minimizar el funcional, estamos minimizando el error pero a la par minimizando el costo de la refrigeración, dado por una norma de \hat{v} .

En el funcional (5.32), los parámetros q y r son pesos que nos definen la relación de importancia entre el error y el costo de refrigeración. Es decir, si se aumenta la relación $\frac{q}{r}$ se da más importancia a la minimización del error y si se disminuye dicha relación se da más importancia a la minimización del costo de refrigeración.

Procedemos ahora a discretizar la primera integral temporal del funcional (5.32); entonces, aplicando la suposición de constancia por partes en el tiempo de las funciones

involucradas, quedando así

$$\int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{z} - \mathbf{z}^*)^T B (\mathbf{z} - \mathbf{z}^*) dt = \tau \sum_{n=1}^{\hat{n}} (\mathbf{z}_n - \mathbf{z}_n^*)^T B (\mathbf{z}_n - \mathbf{z}_n^*) = (\hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{z}}^*)^T M (\hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{z}}^*), \quad (5.34)$$

donde

$$M = \begin{bmatrix} \tau B & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tau B & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \tau B \end{bmatrix}.$$
 (5.35)

Luego, con el mismo procedimiento, para la segunda integral del funcional (5.32) se

tiene

$$\int_{t_0}^{t_f} \mathbf{v}^T Q \, \mathbf{v} \, dt = \tau \sum_{i=1}^{\hat{n}} \mathbf{v_i}^T Q \, \mathbf{v_i} = \hat{\mathbf{v}}^T G \, \hat{\mathbf{v}}, \tag{5.36}$$

donde

$$G = \begin{bmatrix} \tau Q & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tau Q & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \tau Q \end{bmatrix}.$$
 (5.37)

Finalmente, aplicando los cambios pertinentes, utilizando (5.34) y (5.36) en (5.32) obtenemos el funcional discreto

$$J = \frac{q}{2} \left(\hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{z}^*} \right)^T M \left(\hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{z}^*} \right) + \frac{r}{2} \hat{\mathbf{v}}^T G \hat{\mathbf{v}}.$$
 (5.38)

En este momento, ya podemos expresar el problema de control óptimo como

$$\begin{cases} \min & J(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{v}}) \\ \text{sujeto a} & H\hat{\mathbf{z}} + K\hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{f}}. \end{cases}$$
(5.39)

Una vez más, transformamos el problema de minimización restricta a un problema de minimización irrestricta a partir del uso del lagrangiano discreto [11]

$$L\left(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{v}}, \mathbf{p}\right) = \frac{q}{2} \left(\hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{z}^*}\right)^T M\left(\hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{z}^*}\right) + \frac{r}{2} \hat{\mathbf{v}}^T G \hat{\mathbf{v}} + \left\langle \mathbf{p}, H \hat{\mathbf{z}} + K \hat{\mathbf{v}} - \hat{\mathbf{f}} \right\rangle.$$
(5.40)

Imponiendo las condiciones de optimalidad KKT de primer orden al lagrangiano (5.40)

obtenemos

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{z}^*}} = q M \left(\hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{z}^*} \right) + H^T \mathbf{p} = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{\mathbf{v}}} = r G \hat{\mathbf{v}} + K^T \mathbf{p} = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{\mathbf{p}}} = H \hat{\mathbf{z}} + K \hat{\mathbf{v}} - \hat{\mathbf{f}} = 0$$
(5.41)

El sistema de ecuaciones (5.41), puede ser escrito de forma matricial como en (5.42)

$$\begin{bmatrix} q M & 0 & H^T \\ 0 & r G & K^T \\ H & K & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\mathbf{v}} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q M \, \hat{\mathbf{z}^*} \\ 0 \\ \hat{\mathbf{f}} \end{bmatrix}.$$
 (5.42)

Resolviendo el sistema de ecuaciones (5.42) encontramos los mínimos de $J(\hat{z}, \hat{v})$. Para resolverlo despejamos el sistema obteniendo

$$p = -q H^{-T} M \hat{\mathbf{z}} + q H^{-T} M \hat{\mathbf{z}}^*, \qquad (5.43)$$

$$\hat{\mathbf{z}} = H^{-1}\,\hat{\mathbf{f}} - H^{-1}\,K\,\hat{\mathbf{v}}$$
(5.44)

y reemplanzando (5.43) y (5.44) en la segunda ecuación de (5.42) tenemos

$$(r G + q K^T H^{-T} M H^{-1} K) \hat{\mathbf{v}} = -q K^T H^{-T} M \hat{\mathbf{z}}^* + q K^T H^{-T} M H^{-1} \hat{\mathbf{f}}.$$
 (5.45)

Es decir, el problema de control óptimo se reduce a resolver (5.45).

Observamos aqui que la matriz M es definida positiva por lo tanto la matriz

$$K^T H^{-T} M H^{-1} K$$

Mauricio Poletti

es definida no negativa, como la matriz *G* también es definida positiva vemos que $rG + qK^T H^{-T} M H^{-1} K$ es una matriz definida positiva. Por lo tanto para resolver la ecuación matricial (5.42) podemos utilizar el método del Gradiente Conjugado [18].

5.4.3. Resultados numéricos

Para plantear el problema de control Neumann tomamos el mismo modelo que el mos-

trado en la sección 4.1. Las consideraciones aplicadas a dicho modelo son:

- Consideramos una placa fina con diferentes propiedades físicas, las dimensiones de la placa son de 7,5 cm de largo, 5 cm de ancho y 1,5 mm de grosor.
- La generación de calor se da en el chip en el centro de la placa, el chip tiene forma rectangular de 2 cm de largo, 1 cm de ancho y 1,5 mm de grosor. El calor generado por este es de 9,4W.
- El sistema térmico parte de una temperatura homogénea igual a la del ambiente $T(x, 0) = T_{\infty}$. Consideramos la temperatura ambiente $T_{\infty} = 293 K$.
- Los materiales que componen el sistema son isótropos.
- La conductividad térmica del cuerpo generador de calor es $\lambda_1 = 1, 5 \frac{W}{mK}$, conductividad térmica de la placa es de $\lambda_2 = 240 \frac{W}{mK}$.
- El producto de la densidad por el calor específico del cuerpo generador de calor es $\rho_1 c_{p1} = 1,67 \times 10^7 \frac{J}{m^3 K}$ y producto de la densidad por el calor específico de la placa es $\rho_2 c_{p2} = 240 \times 10^4 \frac{J}{m^3 K}$.

- Tomamos como temperatura óptima para el controlador $T^* = 300 K$ en todos los pun-

tos de la placa.

Para probar el controlador fijamos el valor de q = 1 y resolvemos para los valores de

r = 1, r = 0, 1, r = 0, 01 y r = 0,001.

Los resultados de la evolución de temperatura en el punto central de la placa a través

del tiempo se muestran en la Figura 5.7



Figura 5.7: Resultados para distintos valores de r. Figura de elaboración propia.

Se puede observar que a medida que el valor de r decrece el controlador busca que la temperatura llegue a su valor óptimo lo más rápido posible, para el valor de r = 0,001 se puede observar un pequeño sobre-pico debido a la gran velocidad con que sube la temperatura. El controlador se muestra eficaz y responde correctamente a los distintos valores de r y q.

En la Figura 5.8 mostramos para el valor de r = 0,01 la evolución temporal de todos los puntos de la placa. Por otro lado la Figura 5.9 muestra el flujo en las distintas caras de la placa.



Figura 5.8: Temperatura en los distintos puntos de la placa. Figura de elaboración propia.



Figura 5.9: Flujo en las distintas caras de la placa. Figura de elaboración propia.

Se puede observar cómo al inicio el flujo es grande y positivo pues el cuerpo se encuentra a una temperatura inferior a la óptima T(x, 0) = 293 K, cuando la temperatura de este se acerca a la óptima el flujo decrece y llega a ser negativo para disipar calor y mantener al cuerpo a la temperatura óptima de $T^* = 300 K$.

5.5. Resultados del control Robin

En la presente sección se muestran los resultados de implementar el método a un sistema térmico del tipo ensayado en la simulación, la implementación ha sido hecha de acuerdo con el siguiente algoritmo:

- Lectura de archivo con coordenadas de los nodos.
- Lectura de archivo con nodos de los elementos.
- Lectura de archivo de caras exteriores.
- Generación de las matrices teniendo en cuenta las propiedades físicas.
- Subrutina de Newton-Raphson (presentada en la última sección del capítulo 3).
- Despliege de resultados.

Una vez implementado el control Robin, hemos observado el comportamiento del sistema controlado, y su variación con la modificación de los parámetros q y r, los cuales nos dan la relación de compromiso entre el error y el costo de refrigeración. La relación en el compromiso entre ambas cantidades a ser optimizadas es fácil e intuitivamente interpretada como se muestra:

- Para valores pequeños de la relación ^r/_q se da más importancia a la disminución del error que al costo de refrigeración.
- Para valores grandes de la relación ^r/_q importa más reducir costos de refrigeración, que acercarse a la temperatura óptima.

Para evitar problemas numéricos al trabajar con temperaturas del orden de los 300 K trasladamos la temperatura a una temperatura cercana a 0. Mostraremos ahora que un traslado en el sistema de referencia de la temperatura no afecta a la ecuación.

Tomamos $\hat{T} = T - c$, por lo tanto tenemos $\hat{T}_{\infty} = T_{\infty} - c$ y $\hat{T}^* = T^* - c$. Siendo c una constante. Veremos entonces, como afecta el traslado a las ecuaciones que gobiernan el fenómeno de calentamiento.

$$\begin{split} \rho c_p \frac{\partial \left(\hat{T} + c \right)}{\partial t} &= \nabla \cdot \left(\lambda \nabla \left(\hat{T} + c \right) \right) + f & \text{en } \Omega \times [t_0, t_f] \\ \hat{T}(x, 0) &= T_0 - c & \text{en } \Omega & (5.46) \\ \frac{\partial \left(\hat{T} + c \right)}{\partial \eta} &= -\frac{h}{\lambda} \left(\left(\hat{T} + c \right) - \left(\hat{T}_\infty + c \right) \right) & \text{en } \partial \Omega \times [t_0, t_f] \,, \end{split}$$

$$\begin{aligned} \text{Debido a que } \frac{\partial c}{\partial t} &= 0, \, \nabla c = 0, \, \text{y} \, \frac{\partial c}{\partial \eta} = 0 \, \text{y también } \left(\hat{T} + c \right) - \left(\hat{T}_\infty + c \right) = \hat{T} - \hat{T}_\infty, \end{split}$$

se puede observar que el traslado de la temperatura en una constante nos da la misma formulación. Luego la formulación (5.46) queda

$$\rho c_p \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\lambda \nabla \hat{T}\right) + f \quad \text{en} \quad \Omega \times [t_0, t_f]
\hat{T}(x, 0) = \hat{T}_0 \qquad \text{en} \quad \Omega \qquad (5.47)
\frac{\partial \hat{T}}{\partial \eta} = -\frac{h}{\lambda} \left(\hat{T} - \hat{T}_{\infty}\right) \qquad \text{en} \quad \partial \Omega \times [t_0, t_f],$$

donde $\hat{T}_0 = T_0 - c$.

A continuación, citamos las características utilizadas en el modelo sometido al ensayo del control.

• Consideramos una placa fina con dimensiones de 7,5 cm de largo, 5 cm de ancho y

 $1,5\,\mathrm{mm}$ de grosor.

• La generación de calor es uniforme en toda la placa y el calor generado es de 1 W

- Tomamos las constantes físicas del problema iguales a 1. La conductividad térmica de la placa es de $\lambda_2 = 1 \frac{W}{mK}$. El producto de la densidad por el calor específico del cuerpo generador de calor es $\rho_1 c_{p1} = 1 \frac{J}{m^3 K}$.
- Tomamos $T_{\infty} = 293$, $T^* = 323$ y $T_0 = 293$, por lo tanto tomamos c = 323 lo cual nos da $\hat{T}_{\infty} = -30$, $\hat{T}^* = 0$ y $\hat{T}_0 = -30$
- El intervalo de tiempo considerado es $t_0 = 0$ y $t_f = 0, 1$

Debido a los grandes requerimientos de memoria para la solución del problema, la discretización temporal y espacial no pueden ser tan finas como en el caso anteriormente mostrado, de la frontera de Neumann. En particular, para el presente ejemplo adoptamos una discretización de 60 nodos espaciales y 30 divisiones temporales.

Resolvemos el control para los valores de $\frac{r}{q} = 1$, $\frac{r}{q} = 0, 1, \frac{r}{q} = 0, 01$ y $\frac{r}{q} = 0, 001$.



Figura 5.10: Temperatura para distintos valores de $\frac{r}{q}$. Figura de elaboración propia.

Los resultados muestran que el control responde intuitivamente de acuerdo a lo esperado, modificando principalmente la temperatura en estado estable. Podemos ver como se cita a continuación la respuesta del controlador, de acuerdo al parámetro $\frac{r}{a}$

- Para el valor de r
 q
 = 1, que equivaldría básicamente a no ponderar la participación de cada término en el funcional, tenemos a la temperatura en estado estable cercana a los 370 K aproximadamente 50 K más que la temperatura óptima deseada.
- Para $\frac{r}{q} = 0, 1$ tenemos a la temperatura en estado estable cercana a los 340 K aproximadamente 20 K más que la temperatura óptima deseada.
- Para $\frac{r}{q} = 0,01$ tenemos a la temperatura en estado estable cercana a los 328 K aproximadamente 5 K más que la temperatura óptima deseada.
- Para $\frac{r}{q} = 0,001$ ya tenemos a la temperatura en estado estable cercana a los 323 K que es nuestra temperatura óptima.

Para el valor de $\frac{r}{q} = 0,001$ mostramos también en la Figura 5.11 los valores del coeficiente de convección *h* en cada cara a través del tiempo. El gráfico presenta la evolución a través de los 30 tiempos discretos de las 120 caras de frontera.



Figura 5.11: Coeficiente de convección para $\frac{r}{a}$. Figura de elaboración propia.

Los resultados aquí mostrados fueron obtenidos con el método presentado en el capítulo 3, en donde se explicó la mínima variación con relación al método de Newton-Raphson que fue utilizada para resolver el sistema derivado de la imposición de las condiciones de optimalidad. Como una manera de visualizar la minimización que se lleva a cabo, a medida que se resuelve el sistema, mostramos los valores que el funcional va adoptando a medida que el método de va convergiendo para la solución, en la Figura 5.12.



Figura 5.12: Valor del funcional en las iteraciones de Newton-Raphson. Figura de elaboración propia.

Como se puede observar el funcional empieza en un valor alto y va decreciendo hasta alcanzar el mínimo buscado. Naturalmente los puntos de la trayectoria descendente mostrada no necesariamente satisfacen las ecuaciones del problema, es sólo el último punto el que lo hace dentro de la tolerancia, pero de todos modos, se muestra claramente que el decrecimiento del error en el método viene acompañado del esperado decrecimiento en el valor del funcional.

CAPÍTULO 6 CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

6.1. Conclusiones

El presente trabajo desarrolla un método de simulación de sistemas térmicos constituidos por sólidos y que intercambian calor por medio de la convección en su frontera. El trabajo además orienta dicho estudio hacia un área de actual interés en la investigación de semiconductores.

Se consigue validar las simulaciones con datos experimentales de laboratorio. dicha simulación es luego utilizada como base para el desarrollo del método de control numérico, cuyos resultados muestran un efectivo control de la temperatura y el flujo de calor.

Se ha desarrollado también en el trabajo métodos matriciales que fueron específicamente necesarios para la resolución del problema de optimización, y se detalla en el mismo, el álgebra especial de matrices tridimensionales que se desarrolló e implementó satisfactoriamente.

6.2. Futuros desarrollos

Dado que el área de trabajo en que el presente Trabajo Final de Grado está inmerso es un área que requiere y continuará requiriendo mucho desarrollo en los años venideros, para su aplicación en semiconductores, e incluso en otras áreas, existen muchos desarrollos que pueden aprovechar el presente trabajo para enriquecer los estudios del tema. Entre las posibilidades de desarrollo futuro podemos citar:

- Desarrollo de métodos que optimicen el uso de memoria para la realización de los cálculos asociados a la resolución de los sistemas no lineales utilizados en el presente trabajo.
- Implementación de computación paralela para la resolución de este y de otros problemas de optimización similares
- Aplicación del método desarrollado en el presente trabajo a otros problemas de ingeniería relativos a la disipación de calor.
- Imposición de restricciones de optimalidad asociadas a inecuaciones.
- Adimensionalización de las ecuaciones utilizadas y solución de sensibilidad a datos, para evitar problemas numéricos.
- Utilización de métodos basados en subespacios de Krylov para la resolución de las iteraciones de Newton-Raphson.

ANEXO A

PRESENTACIONES DE DESARROLLOS PARCIALES EN CONGRESOS, SEMINARIOS Y WORKSHOPS

A lo largo del desarrollo del presente trabajo, los resultados parciales del mismo han sido presentados en eventos a los cuales hemos sometido el trabajo. En el presente anexo mostraremos los desarrollos parciales que se han presentado alo largo de la investigación.

La primera presentación fue hecha en el "CIGRE 2008" (Congreso Internacional de Grandes Redes Eléctricas), llevado a cabo en Asunción, Paraguay; en coincidencia con el "VIII SESEP" (Octavo Seminario del Sector Eléctrico de Paraguay). En dicha ocasión se han presentado los resultados de las simulaciones con condiciones de frontera de Dirichlet, Neumann y Robin, así como el control con frontera de Neumann. La modalidad de presentación del trabajo fue presentación oral con medios visuales a disposición y consultas de la audiencia.

La segunda ocasión en que se presentaron desarrollos parciales fue el "Workshop de Energía y Medio Ambiente" llevado a cabo en la Universidad Nacional de Asunción. En esta ocasión, el trabajo fue presentado en formato de póster, con respuesta a las consultas del público asistente. En dicha ocasión se incluían las explicaciones y resultados relativos a simulaciones con frontera de Robin, y control con frontera de Neumann.

Una tercera presentación del trabajo fue llevado a cabo en el "XXXII CNMAC" (trigésimo segundo Congreso Nacional de Matemática Aplicada y Computacional), realizado por la

"SBMAC" (Sociedad Brasilera de Matemática Aplicada y Computacional). Dicho congreso fue llevado a cabo en la ciudad de Cuibá, estado de Matto Grosso, Brasil, en octubre de 2009. La modalidad de presentación del trabajo en dicha ocasión fue de póster de iniciación científica, con consultas del público asistente y distribucion de handouts con resúmenes del trabajo. Para asistir al mencionado congreso henos recibido la ayuda económica de la FIUNA, a la cual representabamos.

Una cuarta presentación fue llevada a cabo en la "ETyC 2009" (Exposición Tecnológica y Científica), en particular, dentro del "Workshop de Tesis" que formaba parte de dicha actividad. La defensa fue oral con ayuda de medios visuales. La "ETyC" se llevó a cabo en la Facultad Politécnica de la Universidad Nacional de Asunción, como todos los años.

En las páginas siguientes se pueden encontrar los resúmenes y pósters que fueron presentados.





VIII SEMINARIO DEL SECTOR ELECTRICO PARAGUAYO - CIGRÉ 29, 30 y 31 de Octubre de 2009

Titulo del Trabajo:

TRANSITORIO TÉRMICO EN CIRCUITOS ELECTRÓNICOS: SIMULACIÓN Y CONTROL

Carlos Antonio Galeano Ríos¹ - Mauricio José Poletti Merlo - Horacio Feliciangeli

Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Asunción, Campus Universitario, San Lorenzo, Paraguay. E-mail: <u>mauripoletti@gmail.com</u>, <u>grcarlosa@gmail.com</u>¹

Christian E. Schaerer

Facultad Politécnica, Universidad Nacional de Asunción, Campus Universitario, San Lorenzo, Paraguay, P.O. Box 2111 SL. Email: cschaer@pol.una.py

Resumen:

En el presente trabajo se presenta el control óptimo de la temperatura en un circuito electrónico sometido a fuentes internas de calor. Las fuentes modelan el calor generado por los componentes electrónicos en la placa. Las ecuaciones constitutivas son obtenidas modelando el circuito como una ecuación diferencial parabólica tridimensional donde los parámetros del circuito (calor específico, densidad y conductividad térmica) son considerados constantes por partes en el espacio.

Para simular el transitorio térmico (malla abierta), el dominio espacio-temporal es discretizado. Una formulación de elementos finitos *standard* es utilizada sobre la formulación variacional débil de forma a discretizar la ecuación en el dominio espacial. Para el dominio temporal es usada una formulación de Euler implícita. Condiciones de frontera de Robin son usadas para modelar el intercambio de calor por convección del aire en el medio, mientras que condiciones de Neumann modelan el sistema de enfriamiento de la placa. Los resultados de la simulación están de acuerdo a mediciones de laboratorio encontradas en la literatura.

Para diseñar el controlador, las condiciones de Neumann son consideradas como las variables de control y se define un problema de minimización con restricciones donde el funcional de desempeño es una función cuadrática lineal asociada al estado del sistema (temperatura) y la variable de control. Las condiciones de optimalidad aplicadas a este problema de minimización con restricciones conllevan a un sistema de ecuaciones indefinido de gran porte. Los resultados muestran que el sistema puede ser adecuadamente controlado y a priori permiten la elaboración de teoría sobre la controlabilidad térmica de circuitos. El software desarrollado permite además la simulación de diferentes configuraciones. Además, están en proceso de implementación algoritmos con menor costo computacional para la resolución del sistema de ecuaciones de gran porte. Esto último permitirá la simulación con una mayor precisión.

¹ Autor para contacto.

Figura A.1: Resumen sometido al SESEP.





VIII SEMINARIO DEL SECTOR ELECTRICO PARAGUAYO - CIGRÉ 29,30 y 31 de Octubre de 2008

TRANSITORIO TÉRMICO EN CIRCUITOS ELECTRÓNICOS:

SIMULACIÓN Y CONTROL

Carlos A. Galeano, Mauricio J. Poletti, Horacio Feliciangeli

FIUNA-UNA, Campus Universitario, San Lorenzo, Paraguay.

Christian E. Schaerer

Politécnica, UNA, Campus Universitario, San Lorenzo

P.O.Box: 2111 SL, Paraguay. Email: cschaer@pol.una.py

RESUMEN

Este trabajo presenta la simulación y el control óptimo de la temperatura en un circuito electrónico sometido a fuentes internas de calor que modelan los componentes electrónicos en la placa. Las ecuaciones constitutivas son obtenidas modelando el circuito como una ecuación diferencial parabólica tridimensional donde los parámetros del circuito (calor específico, densidad y conductividad térmica) son considerados constantes por partes en el espacio. El controlador es diseñado definiendo un problema de control óptimo con restricciones. Los resultados numéricos se corresponden con los resultados de laboratorio obtenidos en la literatura.

PALABRAS CLAVES

Transitorio térmico, ecuación diferencial parabólica, elementos finitos, control óptimo

1. INTRODUCCION

La compactación en la construcción de equipos electrónicos modernos hace que la disipación de potencia afecte el correcto desempeño de los circuitos, degrade el semiconductor y en la mayoría de los casos produzca fallas por motivos térmicos [3], es decir, *el equipo se quema.* Por ello, el estudio del comportamiento térmico en circuitos electrónicos ha adquirido sustancial importancia, y en especial, en los que necesitan gran disipación de energía como los de electrónica de potencia [3,4,5,6]. Esto ocasiona un grave perjuicio especialmente a las economías menores que se ven obligadas a desechar equipos por fallas térmicas previsibles. En el caso del Paraguay, el problema se agrava cuando se considera su meteorología y posición geográfica.

Carlos Antonio Galeano Ríos

grcarlosa@gmail.com

Figura A.2: Trabajo presentado en el SESEP.



Para simular el transitorio térmico (malla abierta), en la Sección 3, el dominio espaciotemporal es discretizado. Una formulación de elementos finitos *standard* es utilizada sobre la formulación variacional débil de forma a discretizar la ecuación en el dominio espacial. Para el dominio temporal es usada una formulación de Euler implícita. Condiciones de frontera de Robin son usadas para modelar el intercambio de calor por convección del aire con el medio, mientras que condiciones de Neumann modelan el sistema de enfriamiento de la placa. Los resultados de la simulación (Sección 5) están en concordancia con mediciones de laboratorio encontradas en la literatura.

En la Sección 4, para diseñar el controlador, se define un problema de minimización con restricciones donde el funcional de desempeño es una función cuadrática lineal asociada al estado del sistema (temperatura) y la variable de control (condiciones de frontera de Neumann). Las condiciones de optimalidad conllevan a un sistema de ecuaciones linearles indefinido de gran porte. Los resultados muestran que el sistema puede ser adecuadamente controlado y a priori permiten la elaboración de teoría sobre la controlabilidad térmica de circuitos (Sección 4). El software desarrollado permite la simulación de diferentes configuraciones de los circuitos.

2. PROBLEMA MODELO

Sea $\{t_0, t_f\}$ un intervalo de tiempo; $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un dominio poligonal; y z(t, x) la temperatura en cada punto $(t, x) \in \{t_0, t_f\} \times \Omega$. El modelo de intercambio de calor en sólidos basado en la ley de conducción de Fourier y en el balance de energía para un elemento de volumen unitario es [4]:

$$\rho c_p \frac{\partial z}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\lambda \nabla z \right) + f \qquad \text{en } (t_0, t_f) \times \Omega , \qquad (1)$$

donde la función f(t,x) representa la fuente de calor del circuito, c_p es el calor específico, ρ es la densidad y λ es la conductividad térmica. De forma a simplificar el modelo, consideramos el circuito como un cuerpo poliédrico, despreciaremos los efectos de la radiación y consideramos el circuito constituido sólo por dos materiales isótropos.

En el presente trabajo tomaremos dos posibles condiciones de frontera dependiendo de si el sistema se encuentra en malla abierta o cerrada. Para el análisis del transitorio térmico en malla abierta, la condición de frontera de la ecuación (1) es dada por la siguiente condición de Robin:

Carlos Antonio Galeano Ríos

grcariosa@gmail.com

Figura A.3: Trabajo presentado en el SESEP.



$$\hat{\lambda} \hat{c}_{s} z(t, x) = h [z(t, x) \quad z_{s}] \quad \text{en} \quad (t_{0}, t_{f}) \times \partial \Omega.$$
(2)

Para el sistema en malla cerrada, consideramos que la variable de control es el flujo de calor en la superficie de la placa. De esta forma, la condición de frontera para la ecuación (1) en malla cerrada es dada por la siguiente condición de Neumann:

$$\partial_n z(t, x) = u(t, x) \text{ sobre } (t_0, t_f) \times \partial \Omega$$
 (3)

Las condiciones iniciales al tiempo $t = t_0$ es $z(t_0, x) = z_0(x)$ paratodo $x \in \Omega$.

3. DISCRETIZACIÓN ESPACIO-TEMPORAL Y FORMULACIÓN VARIACIONAL

Sea el espacio de las funciones $Z = H^1(\Omega)$, sea $\chi(t,x) \in L^2(t_0,t_f,Z)$ y $\frac{\partial \chi}{\partial t} \in L^2(t_0,t_f,Z)$ tal que Z' representa el dual de Z [7]. Para discretizar la ecuación (1), escogemos una partición cuasi-uniforme $\sigma_k(\Omega)$ del dominio Ω y escogemos un espacio $Z_k \subset Z$ de elementos finitos P_1 conforme para aproximar $\chi(t,x)$. Además, empleamos un espacio $U_k \subset U$ de elementos finitos P_0 para aproximar u(t,x). Note que las propiedades físicas pueden ser discontinuas en cada elemento Ω_i , de esta forma como el dominio $\Omega \quad \bigcup_{i=1}^n \Omega_i$, entonces la formulación débil de la ecuación (1) cuando son considerados dos materiales (k = 2) toma la forma:

$$\sum_{k=12} \rho_k c_{\mu k} \sum_{j=lm} \left(\frac{d z_j}{dt} \int_{c_k} \eta_j \otimes dx \right) = \sum_{k=12} \left(\lambda_k \sum_{j=lm} \left(z_j \int_{c_k} \nabla \eta_j \cdot \nabla \otimes dx \right) \right) \dots + \sum_{k=12} \left(\int_{c_k} \lambda_k \hat{c}_n \left(\sum_{j=lm} z_j \eta_j \right) \otimes dx \right) + \sum_{k=12} \left(\int_{c_k} \omega f dx \right)^{*}$$
(4)

donde $\Gamma_{\!\!\!\!k}$ es la frontera de una región (conjunto de Ω_i) con propiedades físicas constantes. Utilizando el método de Galerkin, la ecuación (4) con las condiciones de contorno para malla abierta, conlleva a un sistema de ecuaciones lineales que puede ser representado matricialmente de la forma siguiente:

Carlos Antonio Galeano Ríos

grcarlosa@gmail.com

Figura A.4: Trabajo presentado en el SESEP.



$$\begin{cases} M \frac{dz}{dt} = (A+D)\underline{z} + T_{v}B\underline{h} + \underline{b} \\ z(t) = z_{o}, \end{cases}$$
(5)

donde D_{ij} : $\int_{\Gamma_{\Omega}} h \eta_i \eta_j dx$ y $B_{ij} \coloneqq \int_{\gamma_j} \eta_i dx$. En este trabajo consideramos $\underline{h} \in \Re^n$ como un

vector constante. En la ecuación (5), $z \in \Re^{n}$ y $\underline{b} \in \Re^{n}$ son vectores que representan las variables de estado y las fuentes de calor en el interior del circuito, respectivamente. Las matrices son obtenidas usando el método de Galerkin. Es importante notar que las matrices M y A son simétricas positivas definidas (matriz de masa y rigidez) [1]. La matriz B es la matriz de entrada y no es de puesto completo.

En el caso de malla cerrada (control por flujo en la frontera), tomamos las condiciones de Neumann como las variables de control, así la ecuación (4) toma la siguiente forma:

$$\begin{cases} M \frac{dz}{dt} = A \underline{z} + B \underline{v} + \underline{b} \\ z(t) = z_o. \end{cases}$$
(6)

donde $\underline{\nu} \in \mathfrak{N}^{\alpha}$ es la variable de control (condición de frontera de Neumann).

Para la discretización temporal usamos una malla de (l-1) puntos internos. Así el paso de tiempo queda $\tau = (t_f - t_o)/l$ y asumimos que el controlador discreto <u>v</u> es constante en cada intervalo de tiempo. Usando un esquema de Euler implícito retroactivo, la representación matricial de la ecuación (5) es escrita como:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{M} & \tau \boldsymbol{A} \end{pmatrix}_{\boldsymbol{Z}_{i-1}} = \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{Z}_{i}} + \tau \boldsymbol{b}_{i+1} & \tau \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{B} \boldsymbol{h}_{i+1}, \tag{7}$$

y equivalentemente la ecuación (6):

$$(M \quad \tau \mathbf{A})_{\mathbf{Z}_{i+1}} = M \, \mathbf{Z}_i + \tau \, \underline{b}_{i+1} \quad \tau \mathbf{B}_{\mathbf{Y}_{i-1}}. \tag{8}$$

En este caso los vectores \underline{z}_i , \underline{u}_i y \underline{b}_i representan las variables de estado, control y el termino fuente, respectivamente, en el *i-esimo* intervalo de tiempo. Considerando un ordenamiento léxico-grafico la ecuación (10) tendrá la forma:

$$\mathbf{E}\mathbf{z} + \mathbf{N}\mathbf{v} = \mathbf{f} , \qquad (9)$$

Carlos Antonio Galeano Ríos

grcarlosa@gmail.com

Figura A.5: Trabajo presentado en el SESEP.



donde $z = (z_1^T \cdots z_i^T)^T y v = (v_1^T \cdots v_i^T)^T$. Las matrices **E** y **N**, y el vector **f** se definen en forma análoga.

4. CONTROL ÓPTIMO

Definimos una temperatura objetivo (función objetivo) para el circuito z' y un funcional de desempeño como sigue [7]:

$$J(\underline{z}(t),\underline{\nu}(t)) = \int_{t_0}^{t_0} \left(\underline{z}(t) - \underline{z}^*(t) \right)^T \mathcal{Q}\left(\underline{z}(t) - \underline{z}^*(t) \right) dt + r\left(\underline{\nu}(t)\right)^T R(\underline{\nu}(t)) dt$$
(10)

donde $R \in \mathfrak{N}^{n}$ a es simétrica positiva definida y $Q \in \mathfrak{N}^{n \times n}$ es simétrica positiva semi-definida. El parámetro r permite ajustar la velocidad de respuesta de la solución. El controlador es escogido de forma a forzar la solución de la ecuación (6), de manera que minimice el funcional de desempeño (10) y se comporte de la forma especificada por la función objetivo z^* . Así, el problema de control óptimo para la ecuación (6) consiste en encontrar un controlador $\underline{v}(t)$ que minimice el funcional (10), es decir:

$$J(\underline{z}(t),\underline{v}(t)) = \min_{(\underline{z}(t),\underline{v}(t)) \in \mathbb{N}} J(\underline{z}(t),\underline{v}(t)),$$
(11)

donde la restricción $(\underline{z}(t),\underline{v}(t)) \subset \mathbb{N}$ consiste en el conjunto de los $(\underline{z}(t),\underline{v}(t))$ que satisfacen la ecuación (6). En forma análoga a la discretización de la ecuación (6), que fue establecida en la sección anterior, discretizamos en el tiempo el funcional (10). Así, el problema de control (11) es transformado en un problema de minimización algebraico como sigue:

$$\begin{cases}
\min \mathbf{J} \\
\text{sujeto a } \mathbf{E}\mathbf{z} + \mathbf{N}\mathbf{u} \quad \mathbf{f}
\end{cases}$$
(12)

donde es $\mathbf{J} = (z - z^*)^T \mathbf{M} (z - z^*) + r \mathbf{u}^T \mathbf{G} \mathbf{u}$ (para mas detalles vea [7]). Para transformar el problema de minimización con restricciones (12) en un problema de minimización irrestricta, usamos multiplicadores de Lagrange y aplicamos las condiciones de optimalidad obteniendo el siguiente sistema linear de gran porte:

Carlos Antonio Galeano Ríos

grcarlosa@gmail.com

Figura A.6: Trabajo presentado en el SESEP.


$$\begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{E} \\ \mathbf{G} & \mathbf{N} \\ \mathbf{E} & \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M} \mathbf{z}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{f} \end{pmatrix}.$$
 (13)

Para resolver el sistema (13) usamos un método directo. Otros métodos más eficientes pueden ser implementados, vea por ejemplo [7] y las referencias en él incluidas.

5. RESULTADOS NUMERICOS

Consideramos una placa circuital de $7.5 \times 5 \times 0.15$ cm. La conductividad térmica del cuerpo generador de calor $\dot{\lambda}_1 = 1.5 W / mK$, conductividad térmica de la placa $\dot{\lambda}_2 = 240 W / mK$, el coeficiente de convección para las caras superior e inferior $h = 17,8 W / m^2 K$, Producto de la densidad por el calor específico del cuerpo generador de calor $\rho_1 c_{\rho 1} = 1,67 \times 10^7 J/m^3 K$ y producto de la densidad por el calor específico de la placa $\rho_2 c_{\rho^2} = 240 \ x 10^4 J/m^3 K$. El calor disipado del cuerpo generador es 9,4 W. La placa tiene en su centro una fuente generadora de calor rectangular de $2 \times 1 \times 0.075 \, cm$. En [4], esta fuente fue simulada agregando a una zona de la frontera un flujo de calor por medio de condiciones de Neumann.



Figura 1: Malla abierta a los 400 segundos de simulación.

Caso 1. Para reproducir los resultados presentados en [4] consideramos en los bordes de la placa condiciones de frontera adiabáticas. La dirección con mayor gradiente es debido a la proximidad física de la frontera a la fuente (Figura 1). En la Figura 2, se presenta una comparación entre el resultado obtenido en laboratorio (extraído de [4]) y el resultado

Carlos Antonio Galeano Ríos

grcarlosa@gmail.com

Figura A.7: Trabajo presentado en el SESEP.



obtenido con la simulación. Puede notarse que con las simplificaciones, los resultados numéricos obtenidos están en concordancia con los resultados obtenidos en laboratorio. De esta forma, se observa que el modelo captura eficientemente la física del problema.



Figura 2: Malla abierta. Perfil de temperatura en el centro de la placa. Las marcas representan mediciones de laboratorio extraídas de [4]. La línea continua muestra el resultado de la simulación.



Figura 3: Malla cerrada. Temperatura en el centro de la placa para diferentes valores de r.

Carlos Antonio Galeano Ríos

grcarlosa@gmail.com

Figura A.8: Trabajo presentado en el SESEP.



Caso 2. En la figura 3, se presenta el resultado obtenido aplicando el controlador para llegar a una temperatura prefijada de 300 K. Note que en la medida que los valores de r disminuyen desde 1 a 0.001, la velocidad de respuesta del controlador es mayor y su tiempo de establecimiento es menor.

6. OBSERVACIONES FINALES

Los resultados numéricos muestran que la formulación de elementos finitos y las simplificaciones realizadas permiten capturar el fenómeno de calentamiento y enfriamiento de la placa El control óptimo de frontera permite controlar la temperatura en la placa cuando se considera un modelo tridimensional. La discretización *all at once* tiene la deficiencia de generar un sistema de ecuaciones de gran porte. Este problema es relevante en tres dimensiones, especialmente si se desea alta precisión en los resultados, otras técnicas menos costosas están en estudio.

BIBLIOGRAFIA

- Alberty J.; Carstensen C.; Funken S.; Remarks around 50 lines of Matlab: short finite element implementation. Numerical Algorithms, 20: 117-137, 1999.
- [2] Bock H.G.; Diehl M.; Kostina E.; Schölder J. P.; Constrained Optimal Feedback Control of System Governed by Large Differential Algebraic Equations, En: Real-Time PDE-Constrained Optimization, Editores: Biegler L.T.; Keyes D.; Gattas O.; Waanders B.v.B.; Heinkenschloss M.; Serie: Computational Science & Engineering, SIAM, Philadelphia, 2007.
- Janicki M.; Napieralski A.; Modeling electronic circuit radiation cooling using analytical thermal model. Microelectronics Journal, 31: 781-785, 2000.
- [4] Janicki M.; De Mey G.; Napieralski A.; Application of Green's function for analysis of transient thermal states in electronic circuits. Microelectronics Journal, 33: 733-738, 2002.
- [5] Janicki M.; De Mey G.; Napieralski A.; Transient thermal analysis of multilayered structures using Green's function. Microelectronics Reliability, 42: 1059-1064, 2002.
- [6] Sauer C.E.; Feliciangeli H.; Schaerer C.E.; Optimal boundary control for cooling electronic circuits. CNMAC, Florianopolis, Setiembre, Brasil, 2007.
- [7] Schaerer C.E.; Mathew T.; Sarkis M.; Temporal domain decomposition for a linear quadratic optimal control problems, En: High Performance Computing for Computational Sciences-VECPAR 2006, Lecture Notes in Computer Sciences, vol. 4395, 2007, pp. 452-465, 2007.

Carlos Antonio Galeano Ríos

grcarlosa@gmail.com

Figura A.9: Trabajo presentado en el SESEP.

Cooling electronic circuits: three dimensional simulation and control

Carlos Galeano¹, Mauricio Poletti², Horacio Feliciangeli² National University of Asuncion - Engineering Department E-mail: ¹grearlosa@gmail.com, ²mauripoletti@ieee.org, ³hfelic@sce.cnc.una.py

> <u>Christian E. Schaerer</u> National University of Asuncion – Polytechnic Department E-mail: cschaer@pol.una.py

SUMMARY

electronic circuits subject to internal present a good agreement when compared heating sources. The constitutive with experimental data. Future equations are obtained by modeling the implementations involve Robin boundary circuits as a three-dimensional parabolic conditions. partial differential equation. The parameters of the circuits (specific heat, References density and conductivity) are considered discontinuous over the space domain. [1] Neumann boundary conditions (control variable) are used to model the electromechanical cooler system.

To simulate the transient period, the [2] Janicki M.; De Mey G.; Napieralski A.; standard finite element method and the backward Euler method are used for the spatial and temporal discretization, respectively. This results in a large algebraic linear system (state equations) parameterized by the control variable [3] Janicki M.; De Mey G.; Napieralski A.; where the unknown is the circuit board temperature.

For designing a controller, a constrained minimization problem is associated to the state and control variables, where the [4] restrictions are given by the state equations. This constrained minimization problem yields a large algebraic indefinite saddle point system in the state, control and dual variables. The Shur complement with respect to the control variable of this large linear system gives a symmetric positive definite linear system solved by a Conjugate Gradient method.

The numerical results show that the temperature in the circuit can be

We consider the optimal cooling of controlled under certain conditions and

- Alberty J.; Carstensen C.; Funken S. A.; Remarks around 50 lines of Matlab: shart finite element method implementation. Numerical Algorithms, 20: 117-137, 1999.
- Transient thermal analysis of mutilayered structures using Green's functions. Microeletronics Reliability, 42: 1059-1054, (2002)
- Aplication of Green's functions for analysis of transient thermal states in Microelectronics electronic circuits. Journal, 33: 733-738, 2002.
- Schaerer C.E.; Mathew T.; Sarkis M.; Temporal domain decomposition for a linear quadratic optimal control problems, En: High Performance Computing for Computational Sciences-VECPAR 2006, Lecture Notes in Computer Sciences, vol. 4395, 2007, PP. 452-465, 2007.

Figura A.10: Resumen sometido al Workshop de Energía y Medio Ambiente.





Robin optimal boundary control for cooling electronic circuits

Carlos A. Galeano, Mauricio J. Poletti, Horacio Feliciangeli National University of Asuncion - Department of Engineering, San Lorenzo, Paraguay E-mail: grcarlosa@gmail.com, mauripoletti@ieee.org, hfelic@sce.cnc.una.py

Christian E. Schaerer

National University of Asuncion - Polytechnical Department 2111 SL, San Lorenzo, Paraguay B-mail: cschaer@pol.una.py

ABSTRACT

We consider the optimal cooling of an electronic circuit plate, which is subject to internal heating sources. The constitutive equations are obtained by modeling the circuit as a parabolic partial differential equation. The properties of the materials (specific heat, density and conductivity), are constant by part over the space domain. Robin boundary conditions (control variable) are used to model the convective electromechanical cooler system.

To simulate the transient period, the standard finite element method, and the backward Euler method are used for the spatial and temporal discretizations, respectively. This results in a large linear system (state equations) parameterized by the control variable where the unknown is the temperature of the circuit plate.

To design a controller, we define a constrained minimization problem where a linearized quadratic cost function is associated to the state and control variables, and the restrictions are given by the state equations. This constrained minimization problem yields a large nonlinear system of equations in the state, control and dual variables. This nonlinear equation is solved using an iterative method with relaxation for the control variable.

Comparisons between numerical results and experimental data found in the literature show that the temperature in the circuit can be controlled effectively with high precision.

Keywords: Parabolic PDE, Robin Boundary Condition, Optimal Control

Referências

- J. Alberty, C. Carstensen, S. A. Funken, Remarks around 50 lines of Matlab: Short finite element method implementation, *Numerical Algorithms*, 20 (1999) 117-137.
- [2] M. Janicki, G. De Mey, A. Napieralski, Aplication of Green's functions for analysis of transient thermal states in electronic circuits, *Microelectronics Journal*, 33 (2002) 733-738.
- [3] M. Janicki, G. De Mey, A. Napieralski, Transient thermal analysis of multilayered structures using Green's functions, *Microelectronics Reliability*, 42 (2002) 1059-1064.
- [4] C. E. Schaerer, T. Mathew, M. Sarkis, Block iterative algorithms for the solution of parabolic optimal control problems, *Lecture Notes in Computer Science*, 4395 (2007) 452-465.

Figura A.12: Resumen sometido al CNMAC 2009.



Figura A.13: Póster presentado en el CNMAC 2009.

This is a handout for the CNMAC-2009

Robin Optimal Boundary Control for Cooling Electronic Circuits

Carlos Galeano¹, Mauricio Poletti, Horacio Feliciangeli, Christian Schaerer², Universidad Nacional de Asunción, Campus de la UNA, San Lorenzo - Paraguay.

ABSTRACT. We consider the optimal cooling of an electronic circuit plate subject to internal heating sources. The constitutive equations are obtained by modeling the circuit as a parabolic partial differential equation with discontinuous coefficients. Robin boundary conditions are used to model the convective cooler system. The discretization of the model is performed using a standard finite element method and the backward Euler method resulting in a large linear system which is parameterized by the control variable.

To determine the control variable, an optimal control problem - OCP - is defined where the cost function associates the temperature in system and control variables and the restrictions are given by the state equations. This OCP yields a large nonlinear system of equations, which is solved using a Newton method. Numerical results show that the temperature in the circuit can be controlled effectively.

1. Introduction

Let $[t_0, t_f]$ denote a time interval, let Ω be a polygonal domain and let T denote the temperature at each point (x, t) of the Domain $D = \Omega \times [t_0, t_f]$. The model of heat exchange in solids based on the Fourier law of conduction and energy balance for a unitary volume can be expressed as:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \left[\lambda \nabla T \right] + f, \qquad (1.1)$$

subject to $T(x,0) = T_0$ and $\frac{\partial T}{\partial r_1} = -\frac{h}{\lambda}(T - T_\infty)$ where f is the heat source, ρ is the density, c_p is the specific heat at constant pressure, λ is the thermal conductivity and h is the convection constant. All these properties mentioned are considered constant by part in space and time. T_∞ is the temperature of the environment, and h is the control variable.

To obtain the variational formulation, let $Z = H^1(\Omega)$, $T \in L^2(t_0, t_f, Z)$ and $\frac{\partial T}{\partial t} \in L^2(t_0, t_f, Z')$, then the weak formulation of 1.1 is:

$$\int_{\Omega} \eta_i \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \int_{\Omega} \eta_i \nabla [\lambda \nabla T] + \int_{\Omega} \eta_i f \qquad (1.2)$$

To discretize equation 1.2, we choose an uniform triangulation $\sigma_h(\Omega)$ of the domain Ω and employ a P1 conforming finite element space $Z_h \subset Z$ for $T(\cdot, t)$. Once the boundary condition on equation (1.1) is considered for all the boundary, the following system is obtained:

$$B\dot{\alpha} = -A\alpha - B_1(h)\alpha + b + T_{\infty}b_1h, \qquad (1.3)$$

¹Ingeniería. Ernails: grcarlosa@gmail.com, mauripoletti@ieee.org, hfelic@sce.cnc.una.py ²Polibécnica. Ernail: cschaer@pol.una.py

Figura A.14: Handout repartido en el CNMAC 2009.

2

A

where α is defined by $T \approx \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i} \eta_{i}$ and η_{i} are linear last functions. Similarly, $\frac{\delta T}{R} \approx \sum_{i=1}^{m} \delta_{i} \eta_{i}$. Using the Backward Euler method on equation (1.3) and coupling all the n discrete times of equations, we obtain:

$$-E(\dot{h})\dot{\alpha} = N\dot{h} = \dot{f}.$$
(1.4)

2. Optimal Control and Numerical Results

$$J = \frac{\pi}{2} \left(\alpha - \alpha^* \right)^T M \left(\tilde{\alpha} - \alpha^* \right) + \frac{\pi}{2} h^T G h$$
(2.5)

where g and r are weights that define the behavior of the controller and M and G are internal product matrices, and α^* is the optimal discrete temperature field. The functional on equation 2.5 yields the following Legrangian:

$$L = J - \langle p, E\hat{a} - N\hat{b} - f \rangle, \qquad (2.6)$$

which in order to satisfy the first order KK I' conditions has to verify the following nonlinear system:

$$-\partial_{\hat{\alpha}-\hat{\alpha}}L = M\left(\hat{\alpha}-\alpha^*\right) + E^2 \ p = 0 \tag{2.7}$$

$$\partial_{\hat{h}}L = Gh - p^T \times \frac{\partial E}{\partial h} \times \hat{\alpha} - N^T p = 0$$
 $\partial_y L = E\hat{\alpha} + N\hat{h} - f = 0$ (2.8)

The derivative $\frac{BE}{\partial t}$ is a tridimensional array, and \times represents a special product involving this type of array (see details in [3]). The system is solved using a Newton-Rephson based mutine. The controlled exploition of the temperature field is plotted for each node of the



Figure 1: Evolution of the controlled temperature.

model in the Figure 1.

References

- M. Janicki, G. De Moy, A. Napieralski, Transient Inernal analysis of multilayered structures using Green's functions. Microelectronics Belia'sili, y. 42 (2002) 1059-1064.
- [2] C. E. Scheerer, T. Mehrew, M. Sarkis, Block iterative algorithms for the solution of parabelic optimal control problems. Locoure Notes in Computer Science, 4395 (2007) 452-465.
- [3] Galeano C A.; Polotti M. J.; Generalization of the Jacobian to 3D Arrays Used for Robin Optimal Control. Interna, Report, LCCA Nationa, University of Asuncian, August 2009.

Figura A.15: Handout repartido en el CNMAC 2009.

ANEXO B

GLOSARIO

Anexamos un pequeño glosario de términos técnicos y matemáticos utilizados en el presente Trabajo Final de Grado, de manera a facilitar su lectura, principalmente al lector no muy familiarizado con el tema.

Las explicaciones que se presentan aquí no necesariamente coinciden con las definiciones formales de los términos que son aclarados, pues en el interés de facilitar la lectura del trabajo y agregar claridad, aún a un costo en términos de rigurosidad; nos hemos centrado en explicar las acepciones que son usadas en el trabajo.

Términos

- Convergencia: Cercanía aceptable a una solución exacta buscada. En ciertos casos, la cercanía puede ser medida no por el error, sino por el residuo, asumiendo cierta continuidad en el operador utilizado.
- Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT): Condiciones necesarias de optimalidad irrestricta de un funcional, corresponden a la generalización de la condición de la nulidad de la primera derivada en un mínimo en una función convexa derivable.
- Derivada en el sentido de Gâteaux: Generalización funcional del concepto usual de derivadas, que consiste en derivar una función que depende de otra función, con relación a esta última. Las funciones con respecto a las cuales se deriva pueden ser vectores, es decir, *f* : *I_n* → ℝ, siendo *I_n* un conjunto de índices.
- Espacio vectorial de funciones: Conjunto de funciones que es cerrado para la suma, y el producto por números reales.
- Formulación variacional: Formulación integral de problemas, que pueden ser originalmente problemas diferenciales.
- Funcional: Transformación o función que tiene por dominio a un espacio de funciones y por codominio a los números reales. Las funciones del dominio pueden ser vectores, es decir, *f* : *I_n* → ℝ, siendo *I_n* un conjunto de índices.
- Jacobiano: Generalización del concepto de gradiente, que corresponde a una matriz que contiene a las derivadas parciales de una función vectorial. Es utilizado en el

método de Newton-Raphson, para calcular un punto más próximo de la solución que el actual.

- Lagrangiano: Funcional definido a partir de un funcional inicial y sus restricciones, de manera a transformar una minimización restricta a una minimización irrestricta.
 La utilización de un lagrangiano permite, por medio del uso de los multiplicadores de Lagrange, la imposición de las condicones necesarias de optimalidad KKT.
- Método de Euler implícito: Método de aproximación de la derivada por medio del cociente incremental, evaluado en función del valor desconocido.
- Método de Galerkin: Método para resolución de problemas variacionales que permite proyectar las soluciones sobre un espacio de dimensión finita, por medio de productos internos con las funciones base del espacio.
- Método de los elementos finitos: Método de discretización de un dominio espacial en elementos volumétricos en cantidad finita, frecuentemente utilizado para resolver problemas variacionales.
- Método de Newton-Raphson: Método para la solución de sistemas de ecuaciones no lineales, que utiliza las derivadas parciales de las ecuaciones con respecto a las incógnitas para generar aproximaciones sucesivas de la solución.
- Producto interno: Operación que toma dos vectores de un espacio vectorial, y les asocia un número real. La operación es bilineal, simétrica, y definida positiva. Un espacio vectorial en el que se puede definir un producto interno es llamado un espacio vectorial de Hilbert.

BIBLIOGRAFÍA

- M. Janicki, G. De Mey and A. Napieralski. *"Transient thermal analysis of multilaye-red structures using Green's functions"*, Microelectronics Reliability Journal, 42, (2002), 1059 1064.
- [2] International Technology Roadmap for Semiconductors, ITRS Assembly & Packaging Report. More than Moore Initiative, (2008), 15 pags.
- [3] M. Janicki and A. Napieralski. *"Modelling electronic circuit radiation cooling using analytical thermal model"*. Microelectronics Journal, 31, (2000), 781–785.
- [4] International Technology Roadmap for Semiconductors, "Assembly and Packaging", 2007 Edition and 2008 Update, 77 pags.
- [5] C. E. Sauer, "Circuitos Electrónicos 2D: Simulación, Control y Refrigeración", Universidad Nacional de Asunción, (2009), 116 pags.
- [6] I. Liu, M. Rincon, "Introduçao ao Método de Elementos Finitos. Análise e Aplicaçao", UFRJ. IM, (2001), 213 pags.
- [7] A. Santaló, "Vectores y tensores con sus aplicaciones", Universitaria de Buenos Aires, (1981), 381 pags.
- [8] E. Lima, "Álgebra Linear 7ma ed.", IMPA, (2006), 357 pags.

- [9] U. Ascher, L. Petzold, *Computer methods for ordinary differential equations and differential-algebraic equations*, SIAM, (1998), 294 pags.
- [10] K. Hoffman, R. Kunze, *Linear Algebra*, Dorling Kindersley, (1971), 407 pags.
- [11] S. Boyd, L. Vandenberghe, *Convex optimization*, Cambridge University Press, (2004), 716 pags.
- [12] J. Nocedal, S. Wright, Numerical Optimization, Springer Series on Operations Research, (1999), 636 pags.
- [13] K. Atkinson, W. Han, *Theoretical Numerical Analisis: A Functional Analysis Framework*, Springer, (2000), 625 pags.
- [14] S. Wang, S. Chow, Advanced linear models: theory and applications, Marcel Dekker, (1994), 537 pags.
- [15] J. Toro, *Problemas variacionales y elementos finitos en ingeniería mecánica*, Uniandes, (2007), 430 pags.
- [16] J. Alberty, C. Carstensen and S. Funken. "Remarks around 50 lines of Matlab: short finite element implementation", Numerical Algorithms, 20, (1999), 117–137.
- [17] M. Janicki, G. De Mey and A. Napieralski. "Application of Green's function for analysis of transient thermal states in electronic circuits". Microelectronics Journal, 33, (2002), 733–738.
- [18] W. Press, S. Teulkolsky, W. Vetterling, B. Flannery, *Numerical recipes in fortran 77: the art of scientific computing*, Cambridge University Press, (2001), 1147 pags.

- [19] Y. Çengel. "Heat transfer: A practical approach", 2nd Ed, McGraw-Hill, (2003), 932 pags.
- [20] R. Viswanath et al. "Thermal Performance Challenges from Silicon to Systems, Microprocessor Packaging", Intel Technology Journal, Vol. 4 Issue 3 (August 2000)
- [21] "http://www.gridnewzealand.co.nz/f1574,1417749/hvdc-thyristor-technology.jpg".
- [22] "http://www.gridnewzealand.co.nz/n1574.html".
- [23] D.E. Manuel Rico Secades. "http://www.unioviedo.es/ate/manuel/EP-13326.htm", Universidad de Oviedo. Asturias.
- [24] D. Mallik et al. "Advanced Package Technologies for High-Performance Systems", Electronic Package Technology Development, Intel Technology Journal Vol. 9 Issue 4 (November 2005)
- [25] Semiconductor Industry Association (SIA), "The National Technology Roadmap for Semiconductors: Technologie Needs", (1997), 239 pags.
- [26] R.Hannemann, "Thermal Control of Electronics: Perspectives and Prospects", Rohsenow Symposium on Future Trends in Heat Transfer, Massachusetts Institute of Technology (MIT) (2003)
- [27] A. Bejan, A. Kraus, "Heat Transfer Handbook", WILEY (2003), 1480 pags.
- [28] International Technology Roadmap for Semiconductors: "Modeling and Simulation",2007 Edition 2008 Update, 41 pags.

- [29] C. Johnson, "Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method", Cambridge University Press, (1987), 278 pags.
- [30] E. Gonçalves, T. Mathew, M. Sarkis and C. E. Schaerer, "A Robust Preconditioner for the Hessian System in Elliptic Optimal Control Problems", Lecture Notes in Computational Science and Engineering, Springer, 2007.
- [31] J. L. Lions. "Optimal control of systems governed by partial differential equations", Springer - Verlag, (1971), 396 pags.
- [32] T. Mathew, C. Schaerer and M. Sarkis, "Block Iterative methods for optimal control of parabolic equations". In: Lecture Notes in Computer Sciences. Springer. LNCS 4395, (2007), 452–465.
- [33] Y. Kwon, H. Bang, "The Finite Element Method using MATLAB", CRC Press, (1997), 519 pags.
- [34] L. Evans, "Partial Differential Equations", American Mathematical Society, (1997), 662 pags.